



Διακριτό πρόβλημα σακιδίου (Discrete Knapsack)

Input: $|X| = n$ c_i, a_i, b integers

Output: $Y \subseteq X$ s.t. $\sum_{x_i \in Y} a_i \leq b$

και $\sum_{x_i \in Y} c_i$ maximum



0-1 Knapsack

$$x_i \in \{1, 0\}$$

$$\text{Max} \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$$

$$\frac{c_{j1}}{a_{j1}} \geq \frac{c_{j2}}{a_{j2}} \geq \dots \geq \frac{c_{jn}}{a_{jn}}$$

$(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* : \text{output})$



Greedy Knapsack (n, c, a, b)

c_i / a_i in non-increasing order

$Y := \emptyset$

for $i := 1$ *to* n *do*

if $b \geq a_i$ *then*

begin

$Y := Y \cup \{x_i\}$

$b := b - a_i$

end

return Y



Dynamic Programming

- Ορισμός υπο-προβλημάτων: $n \times (b+1)$
- Σύνδεση βέλτιστων λύσεων (αναδρομική σχέση)
- Κατασκευή του πίνακα

Δυναμικός Προγραμματισμός

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \leq b \\ & x_j \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$f_k(y) = \max \left\{ \sum_{j=1}^k c_j x_j \mid \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \leq y, \quad x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, k \right\}$$

$$f_k(y) = \begin{cases} f_{k-1}(y) & \text{αν } y \leq \alpha_k \\ \max\{f_{k-1}(y), c_k + f_{k-1}(y - \alpha_k)\} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Δυναμικός Προγραμματισμός

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq b \\ 1 \leq k \leq n \\ f_k(0) = 0 \end{cases} \quad \text{βέλτιστη λύση} = f_n(b)$$

- εύρεση λύσης:

$$x_k(y) = \begin{cases} 0 & \text{αν } f_k(y) = f_{k-1}(y) \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Δυναμικός Προγραμματισμός

- Πολυπλοκότητα:
 - $O(nb)$ χρόνος
 - $O(b)$ μνήμη
 - (pseudo-polynomial)

Δυναμικός Προγραμματισμός (παράδειγμα)

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 20x_1 + 16x_2 + 11x_3 + 9x_4 + 7x_5 + x_6 \\ & 9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 12 \\ & x_j \in \{0,1\} \end{aligned}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	20	20	20
2	0	0	0	0	0	0	0	0	16	20	20	20	20
3	0	0	0	0	0	11	11	11	16	20	20	20	20
4	0	0	0	0	9	11	11	11	16	20	20	20	20
5	0	0	0	0	9	11	11	11	16	20	20	20	23
6	0	1	1	1	7	9	11	12	16	20	21	21	23

Δυναμικός Προγραμματισμός (παράδειγμα)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20 ¹	20 ¹	20 ¹	20 ¹
2	0	0	0	0	0	0	0	0	16 ¹	20 ⁰	20 ⁰	20 ⁰	20 ⁰
3	0	0	0	0	0	0	11 ¹	11 ¹	16 ⁰	20 ⁰	20 ⁰	20 ⁰	20 ⁰
4	0	0	0	0	0	9	11	11	16 ⁰	20	20	20	20
5	0	0	0	0	7	9	11	11	16 ⁰	20 ⁰	20 ⁰	20 ⁰	23 ¹
6	0	1 ¹	1 ¹	1 ¹	7 ⁰	9 ⁰	11 ⁰	12 ¹	16 ⁰	20 ⁰	21 ¹	21	23 ⁰

$$x_6(12) = 0$$

$$x_5(12) = 1 \quad 12 - x_5(12)a_5 = 8$$

$$x_4(8) = 0$$

$$x_2(8) = 1 \quad 8 - 8 = 0$$

Πολ/τα: Εύρεση Τιμής σε χρόνο:

$$O(n(b+1)) \Leftarrow O(nb)$$

Μνήμη: $O(b)$