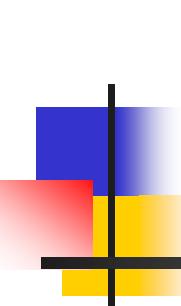


# Διακριτό πρόβλημα σακιδίου (Discrete Knapsack)

Input:  $|X| = n$   $c_i, a_i, b$  integers

Output:  $Y \subseteq X$  s.t.  $\sum_{x_i \in Y} a_i \leq b$

$\kappa\alpha i \sum_{x_i \in Y} c_i$  maximum



# 0-1 Knapsack

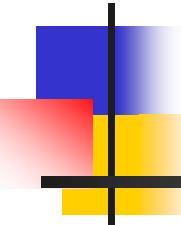
---

$$x_i \in \{1, 0\}$$

$$\begin{aligned} & \text{Max} \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ & \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \end{aligned}$$

$$\frac{c_{j1}}{a_{j1}} \geq \frac{c_{j2}}{a_{j2}} \geq \dots \geq \frac{c_{jn}}{a_{jn}}$$

$(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* : output)$



# Greedy Knapsack (n, c, a, b)

$c_i/a_i$  in non-increasing order

```
Y := Ø
for i := 1 to n do
    if b ≥ ai then
        begin
            Y := Y ∪ {xi}
            b := b - ai
        end
return Y
```

# Dynamic Programming

- Ορισμός υπο-προβλημάτων:  $n \times (b+1)$
- Σύνδεση βέλτιστων λύσεων  
(αναδρομική σχέση)
- Κατασκευή του πίνακα

# Δυναμικός Προγραμματισμός

## Παράδειγμα

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{subject to } & \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \leq b \\ & x_j \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$f_k(y) = \max \left\{ \sum_{j=1}^k c_j x_j \mid \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \leq y, \quad x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, k \right\}$$

$$f_k(y) = \begin{cases} f_{k-1}(y) & \text{αν } y \leq \alpha_k \\ \max\{f_{k-1}(y), c_k + f_{k-1}(y - \alpha_k)\} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

# Δυναμικός Προγραμματισμός

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq b \\ 1 \leq k \leq n \\ f_k(0) = 0 \end{cases} \quad \text{βέλτιστη λύση} = f_n(b)$$

- εύρεση λύσης:

$$x_k(y) = \begin{cases} 0 & \text{αν } f_k(y) = f_{k-1}(y) \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

# Δυναμικός Προγραμματισμός

- Πολυπλοκότητα:
  - $O(nb)$  χρόνος
  - $O(b)$  μνήμη
  - (pseudo-polynomial)

# Δυναμικός Προγραμματισμός (παράδειγμα)

$$\begin{aligned}
 \max \quad z &= 20x_1 + 16x_2 + 11x_3 + 9x_4 + 7x_5 + x_6 \\
 9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 &\leq 12 \\
 x_j &\in \{0,1\}
 \end{aligned}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	20	20	20
2	0	0	0	0	0	0	0	0	16	20	20	20	20
3	0	0	0	0	0	11	11	11	16	20	20	20	20
4	0	0	0	0	9	11	11	11	16	20	20	20	20
5	0	0	0	0	9	11	11	11	16	20	20	20	23
6	0	1	1	1	7	9	11	12	16	20	21	21	23

# Δυναμικός Προγραμματισμός (παράδειγμα)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20 <sup>1</sup>	20 <sup>1</sup>	20 <sup>1</sup>	20 <sup>1</sup>
2	0	0	0	0	0	0	0	0	16 <sup>1</sup>	20 <sup>0</sup>	20 <sup>0</sup>	20 <sup>0</sup>	20 <sup>0</sup>
3	0	0	0	0	0	0	11 <sup>1</sup>	11 <sup>1</sup>	16 <sup>0</sup>	20 <sup>0</sup>	20 <sup>0</sup>	20 <sup>0</sup>	20 <sup>0</sup>
4	0	0	0	0	0	9	11	11	16 <sup>0</sup>	20	20	20	20
5	0	0	0	0	7	9	11	11	16 <sup>0</sup>	20 <sup>0</sup>	20 <sup>0</sup>	20 <sup>0</sup>	23 <sup>1</sup>
6	0	1 <sup>1</sup>	1 <sup>1</sup>	1 <sup>1</sup>	7 <sup>0</sup>	9 <sup>0</sup>	11 <sup>0</sup>	12 <sup>1</sup>	16 <sup>0</sup>	20 <sup>0</sup>	21 <sup>1</sup>	21 <sup>1</sup>	23 <sup>0</sup>

$$x_6(12) = 0$$

$$x_5(12) = 1 \quad 12 - x_5(12)a_5 = 8$$

$$x_4(8) = 0$$

$$x_2(8) = 1 \quad 8 - 8 = 0$$

Πολ/τα: Εύρεση Τιμής σε χρόνο:

$$O(n(b+1)) \leq O(nb)$$

Μνήμη:  $O(b)$