Τρόπος λύσης της τρίτης άσκησης του δευτέρου συνόλου ασκήσεων.

Η πιθανότητα σφάλματος μέγιστης πιθανοφάνειας δοθέντος ότι έχεις μεταδώσει το μήνυμα 1 είναι

$$P_{e,1} = \sum_{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}_1^c} \Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_1) \tag{1}$$

όπου $\boldsymbol{Y}_1^c$, όλες οι ληφθείσες λέξεις στην έξοδο του καναλιού, που προκαλούν σφάλμα. Δοθέντος επομένως ότι υπάρχει σφάλμα, ισχύει ότι

$$\Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_1) \leq \Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_2) \rightarrow 1 \leq \left(\frac{\Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_2)}{\Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_1)}\right)^s \tag{2}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} P_{e,1} = \sum_{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}_1^c} \Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_1) \times 1 \leq \sum_{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}_1^c} \Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_1) \left(\frac{\Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_2)}{\Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_1)}\right)^s \\ \leq \sum_{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}} \Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_1) \left(\frac{\Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_2)}{\Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_1)}\right)^s = \sum_{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}} \Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_1)^{1-s} \left(\Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_2)\right)^s \end{aligned} \tag{3}$$

όπου $\boldsymbol{Y}$ ο χώρος όλων των πιθανών λαμβανόμενων ακολουθιών. Δοθέντος ότι το κανάλι δεν έχει μνήμη, ισχύει

$$\begin{aligned} \Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_1) = \prod_{i=1}^{N} \Pr(y_i|x_{1,i}) = \prod_{i=1}^{N} \Pr(y_i|0) \\ \Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_2) = \prod_{i=1}^{N} \Pr(y_i|x_{2,i}) = \prod_{i=1}^{N} \Pr(y_i|1) \end{aligned} \tag{4}$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (3)

$$\begin{aligned} & P_{e,1} \leq \sum_{y_1} \sum_{y_2} \ldots \sum_{y_N} \prod_{i=1}^{N} \Pr(y_i|0)^{1-s} \Pr(y_i|1)^s = \\ & \left(\sum_{y_1} \Pr(y_1|0)^{1-s} \Pr(y_1|1)^s\right) \left(\sum_{y_2} \Pr(y_2|0)^{1-s} \Pr(y_2|1)^s\right) \ldots \left(\sum_{y_N} \Pr(y_N|0)^{1-s} \Pr(y_N|1)^s\right) = \\ & \left(\sum_{y} \Pr(y|0)^{1-s} \Pr(y|1)^s\right)^N \end{aligned} \tag{5}$$

Ακολουθώντας την ίδια τεχνική φράγματος για την πιθανότητα σφάλματος $P_{e,1}$ και για την πιθανότητα σφάλματος $P_{e,2}$ έχουμε

$$P_{e,2} = \sum_{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}_2^c} \Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_2) \leq \sum_{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}_2^c} \Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_2) \left(\frac{\Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_2)}{\Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_1)}\right)^{1-s} \leq \sum_{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}} \Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_1)^{1-s} \left(\Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_2)\right)^s \tag{6}$$

Παρατηρούμε από τις (3) (6), ότι οι πιθανότητες σφάλματος $P_{e,1}$ και $P_{e,2}$ άνω φράσσονται από την ίδια ποσότητα, και συνεπώς λόγω της (5)

$$P_{e,2} \leq \left(\sum_{y} \Pr(y|0)^{1-s} \Pr(y|1)^s\right)^N \tag{7}$$