

ΝΙΚΟΛΑΟΣ Ί. ΔΑΡΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΣΕΩΝ ΤΟΥ
ΕΘΝΙΚΟΥ ΚΑΤΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Ι. ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

• $\left\{ \begin{array}{l} \min (c^T \cdot x), \\ \text{όταν } A \cdot x = b \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$ (:τυπική μορφή Γραμμικού Προγράμματος) (1.1) \Leftrightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \max (b^T \cdot \lambda) \\ \text{όταν } A^T \cdot \lambda + s = c \\ s \geq 0 \end{array} \right\}$ (:Δυικό Πρόγραμμα του "αρχικού" (1.1)) (1.2)

($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$) ($\lambda \in \mathbb{R}^m$: Δυικές μεταβλητές και $s \in \mathbb{R}^n$: Δυική καθυστέρηση)

• Αν x : ερικό σημείο του (1.1) ($\Leftrightarrow A \cdot x = b$ και $x \geq 0$) και αν (λ, s) : ερικό σημείο του (1.2) ($\Leftrightarrow A^T \cdot \lambda + s = c$ και $s \geq 0$), τότε

$$0 \leq s^T \cdot x = (c - A^T \cdot \lambda)^T \cdot x = c^T \cdot x - \lambda^T \cdot (A \cdot x) = c^T \cdot x - \lambda^T \cdot b = c^T \cdot x - b^T \cdot \lambda \Rightarrow$$

$$0 \leq s^T \cdot x = c^T \cdot x - b^T \cdot \lambda \quad (1.3)$$

και

$$b^T \cdot \lambda \leq c^T \cdot x \quad (1.4)$$

(:η δυική αντικειμενική συνάρτηση αποτελεί ένα κάτω γράμμα της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης υπεράνω των αντίστοιχων ερικών συνόλων).

• Από την (1.4), έπεται ότι οι δύο αντικειμενικές συναρτήσεις συμπίπτουν στα σημεία επίλυσης, δηλαδή:

$$b^T \cdot \lambda^* = c^T \cdot x^* \quad , \quad \forall \text{ λύση } x^* \text{ του (1.1) και } \forall \text{ λύση } (\lambda^*, s^*) \text{ του (1.2).}$$

Πράγματι, ισχύει το εξής:

Θεώρημα (i). Το διάνυσμα $x^* \in \mathbb{R}^n$ είναι μια λύση του αρχικού Γραμμικού Προγράμματος (1.1), εάν και μόνον εάν υπάρχουν διανύσματα $s^* \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε να ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

Συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker (KKT):

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T \cdot \lambda^* + s^* = c, \quad (1.5\alpha) \\ A \cdot x^* = b, \quad (1.5\beta) \\ x_j^* \cdot s_j^* = 0 \quad (j=1, \dots, n), \quad (1.5\gamma) \\ x^* \geq 0, \quad s^* \geq 0. \quad (1.5\delta) \end{array} \right.$$

(ii). Αντιστρόφως, το διάνυσμα (λ^*, s^*) είναι μια λύση του Δυικού Γραμμικού Προγράμματος (1.2), εάν και μόνον εάν υπάρχει διάνυσμα $x^* \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες (1.5). ■

Ιδιαίτερως, η συνθήκη συμπληρωματικότητας (1.5γ), γράφεται ισοδύναμα υπό την μορφή $s^T \cdot x = 0$, οπότε λόγω της (1.3), έχουμε ότι, για κάθε λύση x^* του (1.1) και για κάθε λύση (λ^*, s^*) του (1.2), ισχύει $b^T \cdot \lambda^* = c^T \cdot x^*$.

• Οι αρχικο-δυναμικές μέθοδοι εσωτερικού σημείου έγκεινται στην εφαρμογή παραλλαγών της μεθόδου Newton για την (προσεγγιστική) επίλυση της (ισοδύναμης προς το σύστημα (1.5)) διανυσματικής εξίσωσης:

$$f(x, \lambda, s) := \begin{bmatrix} A^T \lambda + s - c \\ A \cdot x - b \\ X \cdot S \cdot \mathbf{1} \end{bmatrix} = 0 \quad (x \geq 0, s \geq 0), \quad (1.6)$$

όπου

$$X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & x_2 & \\ 0 & & \dots & x_n \end{pmatrix}, \quad S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n) = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \dots & s_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

προκειμένου να κατασκευασθεί μία (πεπερασμένη) ακολουθία διαδοχικών σημείων:

$$(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T \quad \text{με} \quad x^{(k)} > 0, s^{(k)} > 0$$

προσεγγίζοντας την λύση της (1.6). (Ο λόγος της αξίωσης $x^{(k)} > 0$ και $s^{(k)} > 0$ συνίσταται στην αποφυγή νόθων προσεγγιστικών λύσεων, δηλαδή σημείων που δεν είναι τέτοια ώστε $x^{(k)} \geq 0$ και $s^{(k)} \geq 0$.)

Καθώς οι περισσότερες αρχικο-δυναμικές μέθοδοι εσωτερικού σημείου παράγουν "γνήσιως ερικτά" επαναληπτικά σημεία $(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T$, δηλαδή σημεία τα οποία επιλύουν μόνον τις δύο πρώτες γραμμικές εξισώσεις:
 $A^T \lambda + s - c = 0$ και $A \cdot x - b = 0$ (και φυσικά σέβονται τις γνήσιες ανισότητες $x^{(k)} > 0, s^{(k)} > 0$)

ορίζουμε για την συνέχεια:

$$\text{το αρχικο-δυναμικό ερικτό σύνολο } \mathcal{F} := \{ (x, \lambda, s)^T : A^T \lambda + s - c = 0, Ax - b = 0 \text{ και } x \geq 0, s \geq 0 \} \quad (1.7a)$$

και

$$\text{το γνήσιως αρχικο-δυναμικό ερικτό σύνολο } \mathcal{F}^o := \{ (x, \lambda, s)^T : A^T \lambda + s - c = 0, Ax - b = 0 \text{ και } x > 0, s > 0 \}. \quad (1.7b)$$

• Η μέθοδος Newton κατασκευάζει ένα απλό γραμμικό μοντέλο για την διεκπεραίωση της (1.6) γύρω από ένα τρέχον σημείο, καθορίζοντας την προσεχή κατεύθυνση αναζήτησης: $(\Delta x, \Delta \lambda, \Delta s)^T$ μέσω της επίλυσης του ακόλουθου συστήματος γραμμικών εξισώσεων:

$$J_f(x, \lambda, s) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta s \end{pmatrix} = -f(x, \lambda, s)$$

όπου J_f είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης f . Έτσι, εάν $(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T \in \mathbb{F}^o$, τότε το βήμα της μεθόδου προσδιορίζεται από την εξίσωση:

$$\begin{pmatrix} 0_{n \times n} & A^T & I_{n \times n} \\ A & 0_{m \times m} & 0_{m \times m} \\ s^{(k)} & 0_{n \times n} & X^{(k)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x^{(k)} \\ \Delta \lambda^{(k)} \\ \Delta s^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ 0_{m \times 1} \\ -X^{(k)} s^{(k)} \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Πολλόσο, επειδή ένα τέτοιο βήμα θα μπορούσε να παραβιάσει την βασική αξίωση: $x^{(k+1)} \geq 0, s^{(k+1)} \geq 0$, επιδιώκουμε την επίλυση της (1.8) έτσι ώστε να ικανοποιείται η επιπλέον συνθήκη:

$$\begin{cases} (x^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}, s^{(k+1)})^T = (x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T + \alpha_k (\Delta x^{(k)}, \Delta \lambda^{(k)}, \Delta s^{(k)})^T \\ \text{για κάποιο } \alpha_k \in]0, 1[. \end{cases}$$

(Η τιμή της παραμέτρου α_k πρέπει να επιλέγεται πολύ μικρή για να αποσοβηθεί το ενδεχόμενο αδοσίωσης μιας τουλάχιστον από τις βασικές προϋποθέσεις $x^{(k+1)} > 0$ και $s^{(k+1)} > 0$.)

• Οι αρχικο-δυναμικοί αλγόριθμοι ανασκευάζουν την μέθοδο Newton σε δύο βασικά σημεία:

- ① Μεταβάλλουν την διεύθυνση αναζήτησης του επόμενου σημείου μέσα στο εσωτερικό του μη αρνητικού τεταρτημορίου (έτσι ώστε να είναι δυνατή η μεγαλύτερη μετατόπιση κατά μήκος της νέας διεύθυνσης, χωρίς να υπάρχει κίνδυνος κάποια από τις συνιστώσες του $(x^{(k+1)}, s^{(k+1)})$ να γίνει αρνητική).
- ② Διατηρούν τις συνιστώσες των παραγόμενων σημείων $(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T$ σε μια διαρκώς ελεγχόμενη στάθμη (έτσι ώστε να αποφεύγεται η μετακίνηση κατά την διεύθυνση αναζήτησης πολύ κοντά στο σύνορο του μη αρνητικού τεταρτημορίου. Οι διευθνήσεις αναζήτησης που εκπηγάζουν από σημεία που βρίσκονται πολύ κοντά στο σύνορο του μη αρνητικού τεταρτημορίου πρέπει ενίοτε να σφραγίζονται και γι'αυτό η πρόοδος που επιτυγχάνεται από την μετατόπιση κατά μήκος μιας τέτοιας διεύθυνσης είναι συνήθως ελάχιστη).

Για τους ως άνω δύο σκοπούς θεμελιώδης είναι η έννοια της κεντρικής διαδρομής, όπως επίσης και η έννοια της λογαριθμικής συνάρτησης δυναμικού. Στην πρώτη θ' αναφερθούμε αμέσως. Την δεύτερη θα γυρίσουμε λίγο αργότερα.

- Η κεντρική διαδρομή C ορίζεται ως το σύνολο των τῶνων που διατρέχουν εφικτά σημεία και είναι παραμετρικοποιημένα από ένα θετικό αριθμό τ έτσι ώστε το οποιοδήποτε σημείο $(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau)^T$ ενός τέτοιου τῶνου να συνιστά μία λύση του ακόλουθου συστήματος: (4)

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T \lambda + s = c, \\ A \cdot x = b, \\ x_j \cdot s_j = \tau, \\ x > 0, s > 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1.9a) \\ (1.9b) \\ (1.9\gamma) \\ (1.9\delta) \end{array}$$

Με άλλα λόγια,

$$C = \{ (x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau)^T \text{ λύση του συστήματος (1.9) : } \tau > 0 \}.$$

Ένας άλλος τρόπος ορισμού της κεντρικής διαδρομής C είναι μέσω της χρήσης του συμβολισμού που υιοθετήθηκε στην (1.6): "Κάθε σημείο $(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau)^T \in C$ χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ικανοποίησης της εξίσωσης:

$$f(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (x_\tau > 0, s_\tau > 0). \quad (1.10)$$

Πρόταση. Η κεντρική διαδρομή C είναι καλά ορισμένη εάν και μόνον εάν $F^0 \neq \emptyset$. ■

Ιδιότητα (προφανής). Καθώς ο θετικός αριθμός τ μικραίνει απερίοριστα, οι εξισώσεις (1.9) "προσεγγίζουν" όλο και περισσότερο τις εξισώσεις (1.4). (Πράγματι, εάν τα ισσοσταθμικά υποσύνολα $C_\tau = \{ (x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau) \in C \}$ της C συγκλίνουν σε κάτω, τότε αυτό το κάτω πρέπει να είναι μία αρχικο-δυνατή λύση. Έτσι, κατά μήκος ενός δρόμου που ακολουθεί σε άφθονες λύσεις, η κεντρική διαδρομή μας οδηγεί προς μία λύση διατηρώντας όλα τα ανά ζεύγη γινόμενα $x_j \cdot s_j$ γρήγορα θετικά και ελαττώνοντας ομοιόμορφα τις τιμές τους.)

Παρατήρηση. Είναι σαγές ότι η εξίσωση (1.10) επιλύεται με την μέθοδο Newton όπως η εξίσωση (1.6). Αυτήν την φορά το βήμα της μεθόδου θα είναι της μορφής:

$$\begin{pmatrix} O_{n \times n} & A^T & I_{n \times n} \\ A & O_{m \times m} & O_{m \times m} \\ S^{(k)} & O_{n \times n} & X^{(k)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x^{(k)} \\ \Delta \lambda^{(k)} \\ \Delta s^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{n \times 1} \\ O_{m \times 1} \\ -X^{(k)} \cdot S^{(k)} \cdot \mathbf{1} + \tau \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

που αποτελεί το ανάλογο του βήματος (1.8). ■

• Παρά την ισχυρή (προφανή) ιδιότητα που αναφέρθηκε παραπάνω, πολλοί σφαιρικο-δυναμικοί αλγόριθμοι προσδιορίζουν τα σημεία τους ως σημεία (μίας ελαφρώς διαταραγμένης μεθόδου Newton) τα οποία βρίσκονται κοντά στην κεντρική διαδρομή C : επειδή αυτά τα σημεία μπορούν να λαμβάνουν μη-συγγραμμικές θέσεις μέσα στο εσωτερικό του μη αρνητικού τεταρτημορίου $(x, s)^T \geq 0$, είναι δυνατή η θεώρηση μεγαλύτερων βημάτων χωρίς να παραβιάζεται η συνθήκη της θετικότητας των συνιστωσών των διανυσμάτων x και s .

Προκειμένου να περιγράψουμε την πορεία της μη-συγγραμμικής τακτοποίησης των διαδοχικών επαναληπτικών σημείων, εισάγουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{μία παράμετρο επικέντρωσης } \sigma \in [0, 1] \text{ και} \\ \text{ένα μέτρο δυσκότητας } \mu = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n x_j s_j = \frac{x^T s}{n} \end{array} \right. \quad (:\text{ η μέση τιμή των ανά ζεύγη γινομένων } x_j s_j),$$

έτσι ώστε οι εξισώσεις γεννήτορες των διαδοχικών επαναλήψεων να μεταλλάξουν την (1.11) στην ακόλουθη διατύπωση:

$$\begin{pmatrix} 0_{n \times n} & A^T & I_{n \times n} \\ A & 0_{m \times m} & 0_{m \times m} \\ S & 0_{n \times n} & X \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ 0_{m \times 1} \\ -X \cdot S \cdot \mathbf{1} + \sigma \cdot \mu \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

και το βήμα $(\Delta x, \Delta \lambda, \Delta s)^T$ να είναι το βήμα Newton προς το σημείο $(x_{\sigma, \mu}, \lambda_{\sigma, \mu}, s_{\sigma, \mu})^T \in C$ στο οποίο όλα τα ανά ζεύγη γιόμενα $x_j s_j$ να είναι ίσα προς την τιμή $\sigma \mu$. Το βήμα $(\Delta x, \Delta \lambda, \Delta s)^T$ θα αναφέρεται και ως διεύθυνση αναζήτησης της (1.12).

Παρατήρηση. Όταν $\sigma = 0$, οι εξισώσεις (1.12) ταυτίζονται με τις εξισώσεις (1.8) και τα βήματα της (προσεγγιστικής) επίλυσής τους ονομάζονται αριθμο-συσχετιζόμενες διευθύνσεις. Όταν πάλι $\sigma = 1$, οι εξισώσεις (1.12) ορίζουν την επωνομαζόμενη επίκεντρο διεύθυνση, δηλαδή ένα βήμα Newton περί το σημείο $(x_\mu, \lambda_\mu, s_\mu)^T \in C$ στο οποίο όλα τα ανά ζεύγη γιόμενα $x_j s_j$ ισούνται με την τιμή μ . (Συνήθως, οι επίκεντρες διευθύνσεις σφραγίζονται αρκετά μέσα στο εσωτερικό του μη αρνητικού τεταρτημορίου και η ελάττωση της τιμής του μ δεν επιφέρει αξιόλογη πρόοδο. Όμως, στην περίπτωση που η σφραγίσωση πραγματοποιείται κοντά στην C , οι επίκεντρες διευθύνσεις παρέχουν την δυνατότητα θεώρησης ενός μεγάλου βήματος και επομένως επίτευξης ουσιαστικής πρόοδου.)

Στην πράξη, οι πλέον γνωστοί αλγόριθμοι επικαλούνται ενδιάμεσες τιμές για την παράμετρο επικέντρωσης σ , προκειμένου απ' ενός να περιορίσουν το εύρος του μ και απ' ετέρου να βελτισώσουν την επικέντρωση.

Συνοψίζοντας, έχουμε το ακόλουθο:

ΓΕΝΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΕΝΟΣ ΑΡΧΙΚΟ-ΔΥΙΚΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ΕΞΣΤΕΡΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

1. Έστω $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T \in F^0$

2. Για $k=0, 1, 2, \dots$:

Να επιλυθεί η εξίσωση:

$$\begin{pmatrix} 0_{n \times n} & A^T & I_{n \times n} \\ A & 0_{m \times m} & 0_{m \times n} \\ s^{(k)} & 0_{n \times n} & X^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^{(k)} \\ \Delta \lambda^{(k)} \\ \Delta s^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ 0_{m \times 1} \\ -X^{(k)} \cdot s^{(k)} \cdot \mathbf{1} + \sigma_k \cdot \mu_k \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

όπου $\sigma_k \in [0, 1]$ και $\mu_k = \frac{(x^{(k)})^T \cdot s^{(k)}}{n}$.

Να τεθεί

$$(x^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}, s^{(k+1)})^T := (x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T + a_k \cdot (\Delta x^{(k)}, \Delta \lambda^{(k)}, \Delta s^{(k)})^T, \quad (1.14)$$

για κάποια επιλογή του αριθμού a_k τέτοια ώστε $x^{(k+1)} > 0$ και $s^{(k+1)} > 0$.

Οι δύο πλέον ενδιαφέρουσες περιοχές της κεντρικής διαδρομής C είναι η περιοχή:

$$V_2^\theta = \{ (x, \lambda, s)^T \in F^0 : \|X \cdot s \cdot \mathbf{1} - \mu \cdot \mathbf{1}\| \leq \theta \mu \} \quad (1.15)$$

για κάποιο $\theta \in]0, 1[$, καθώς και η περιοχή

$$V_{-\infty}^\gamma = \{ (x, \lambda, s)^T \in F^0 : x_j, s_j \geq \gamma \mu \quad \forall j=1, 2, \dots, n \} \quad (1.16)$$

για κάποιο $\gamma \in]0, 1[$.

Στην πράξη, οι ενδεικτικές τιμές των παραμέτρων θ και γ είναι:

$$\theta = 0.5 \quad \text{και} \quad \gamma = 10^{-3}.$$

• Ιστορική Παρατήρηση. Ο πρώτος που θεώρησε την έννοια της κεντρικής διαδρομής ήταν ο McLinden το 1980. (Όμως θεώρησε την συγκεκριμένη έννοια, προσπαθώντας να αποδείξει την ύπαρξη της προκειμένου, ακολούθως, να την εφαρμόσει σ' ένα πρόβλημα συμπληρωματικότητας που αφορούσε σ' ένα αρχικό-δυσικό ζεύγος ενός προβλήματος κυρτής βελτιστοποίησης και ενός επισυναπτόμενου μη γραμμικού συμπληρωματικού προβλήματος.) Αργότερα, το 1985, ο Sonnevend όρισε την έννοια της κεντρικής διαδρομής ενός αρχικού προβλήματος (1.1) σαν μια ακολουθία αναλυτικών κέντρων των πολυτόπων:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = b, x \geq 0, c^T \cdot x \leq Z\} \\ (\text{όπου } Z \text{ είναι ένα άνω φράγμα της βέλτιστης τιμής } Z^* = c^T \cdot x^* \text{ του προβλήματος (1.1)}) \end{array} \right.$$

Το 1989 και το 1990, οι Bayer και Lagarias εξέτασαν (από κοινού) τις κεντρικές διαδρομές ενός αρχικού και του συναφώς προς αυτό σχηματιζόμενου αντίστοιχου αρχικό-δυσικού προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού, μελετώντας τις τροχιές των κεντρικών διαδρομών κατά ποικίλους μαθηματικούς τρόπους.

Εκείνος όμως που έδωσε τον απλούστερο ορισμό της έννοιας της κεντρικής διαδρομής, σύμφωνα με τις ετιώσεις (1.9) ήταν ο Megido το 1987, ο οποίος όπως θα δούμε, λίγο παρακάτω, κατάφερε, εκτός των άλλων, να συσχετίσει την κεντρική διαδρομή ενός αρχικό-δυσικού προβλήματος με την συνάρτηση προσέγγισης λογαριθμικού φραγμού που θα παρουσιάσουμε σύντομα.

Στηριζόμενοι στην θεμελιώδη εργασία του Megido, οι Kojima-Mizuno-Yoshise ανέπτυξαν τον ^{πολυωνυμικής τάξης} πρώτο αρχικό-δυσικό αλγόριθμο το 1989. Πρόκειται για μια "μεγάλου βήματος μέθοδο ακολουθούσα την διαδρομή", η οποία περιορίζει τις επαναλήψεις της σε μια περιοχή της μορφής $V_1^{-\infty}$ (όπως αυτή ορίσθηκε στην σχέση (1.16)). Η πολυπλοκότητα του αλγόριθμου τους ήταν της τάξης του $O(n \cdot \ln \frac{1}{\epsilon})$. Σχεδόν ταυτόχρονα, οι ίδιοι επιστήμονες κατασκεύασαν και τον δεύτερο αρχικό-δυσικό αλγόριθμο πολυωνυμικής τάξης. Πρόκειται για μια "μικρού βήματος μέθοδο ακολουθούσα την διαδρομή", η οποία περιορίζει τις επαναλήψεις της σε μια περιοχή της μορφής V_2^{θ} (όπως αυτή ορίσθηκε στην σχέση (1.15)), με πολυπλοκότητα της τάξης του $O(\sqrt{n} \cdot \ln \frac{1}{\epsilon})$.

Τέλος, η γεωμετρία της κεντρικής διαδρομής (ενός αρχικό-δυσικού προβλήματος) εξηγήθηκε επαρκώς από τους Van der Vort το 1996, οι οποίοι μάλιστα κατασκεύασαν έναν αλγόριθμο που καταδείκνυε ότι η δομή της C αποτελείται από λίγα διαστήματα που συνδέονται μεταξύ τους σχηματίζοντας οξείες σπείρες. Αφίζει να σημειωθεί ότι ο χρόνος εκτέλεσης του αλγόριθμου αυτού εξαρτάται μόνον από την έκταση που απαιτεί η αποθήκευση του πίνακα A (και όχι των διανυσμάτων b και c).

1^ο ΕΙΔΟΣ: ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΣΕΣ ΤΗΝ ΔΙΑΔΡΟΜΗ (PATH-FOLLOWING METHODS)

σ (: παράμετρος επικέντρωσης)

Α' ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

σ : ελαφρώς μικρότερη του 1:

ΜΙΚΡΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΣΕΣ ΤΗΝ ΔΙΑΔΡΟΜΗ:

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (SFP) *

(SHORT-STEP PATH-FOLLOWING METHODS)

(Επιτυγχάνουν αργή πρόοδο, γιατί η υλοποίηση της εργασιακής συμπεριφοράς τους προσπαθεί μία (πριμοριστική) πέρωξη της μορφής $\frac{1}{2}^\theta$. Η πολυπλοκότητα είναι της τάξης του $O(\sqrt{n} \ln \frac{1}{\epsilon})$)

(ΙΔΙΑΙΤΕΡΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ-ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ:

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (PC) **

(PREDICTOR-CORRECTOR METHOD)

(Χρησιμοποιεί δύο περιοχές της μορφής $\frac{1}{2}^\theta$, από τις οποίες η μία έχει εμφυτευθεί κανονικά μέσα στην άλλη. Κάθε επόμενο βήμα είναι ένα βήμα πρόβλεψης, το οποίο ξεκινά μέσα από την εσωτερική περιοχή και μετακινείται κατά μήκος της αριθμοσυσχετισμένης διεύθυνσης προς το σύνορο της εξωτερικής περιοχής. Το χάσμα μεταξύ των συνόρων των δύο περιοχών είναι αρκετά ευρύ προκειμένου να επιτρέψει στο βήμα αυτό να οδηγήσει σε αξιόσημωτη πρόοδο όσον αφορά στην ελάττωση της τιμής του μ . Ανάμεσα σε δύο διαδοχικά τέτοια βήματα, η μέθοδος παρεμβάλλει ένα βήμα διορθωσης (στο οποίο λαμβάνουμε $\sigma=1$ και $a=1$ και) με το οποίο επαναφέρουμε την διαδικασία στην εσωτερική περιοχή για να προετοιμασθεί το επόμενο βήμα πρόβλεψης. Η μέθοδος αυτή συχλίνει υπεργραμμικά. Η πολυπλοκότητα είναι επίσης της τάξης του $O(\sqrt{n} \ln \frac{1}{\epsilon})$.)

Β' ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

σ : λιγότερο δεσμευτική τιμή (σε σχέση με την Α' ΚΑΤΗΓ):

ΜΕΓΑΛΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΣΕΣ ΤΗΝ ΔΙΑΔΡΟΜΗ:

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (LPF) ***

(LONG-STEP PATH-FOLLOWING METHODS)

(Υποχρεώνονται να εκτελούν ευθύγραμμες αναζητήσεις κατά την διεύθυνση $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ προκειμένου να αποφεύγουν τον κίνδυνο της εφόδου από την επιλεγείσα περιοχή. Μπορούν όμως να έχουν πιο γρήγορη σύγκλιση ειδικότερα όταν μετέρχονται μιας περιοχής $\frac{1}{2}^\theta$ και ιδιαίτερα όταν αποδίδουν συνεχείς τιμές στο σ . Η πολυπλοκότητα είναι της τάξης του $O(n \ln \frac{1}{\epsilon})$.)

* { Kojima - Mizuno - Yoshise (1989) }
Monteiro - Adler (1989)

** { Mizuno - Todd - Ye (1993) }
{ Mehrotra (1992) : Διαφορετικού τύπου Αλγόριθμος ! }

*** Kojima - Mizuno - Yoshise (1989)

Επίσης, συναγώς, βλ. { Grüler - Ye (1993) }
{ Tapia - Zhang - Ye (1995) }
Xu (1994)
{ Xu - Hung - Ye (1996) }

Παρατήρηση. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο III, κατά την Ανάλυση των Αλγορίθμων (SPF), (PC) και (LPF), η προσοχή μας δεν θα επικεντρωθεί στην σύγκλιση της ακολουθίας των επαναληπτικών σημείων $(x^{(k)}, s^{(k)})$, αλλά στην σύγκλιση της ακολουθίας των αντίστοιχων μέτρων της δεικνότητας $\mu_k = \frac{x^{(k)T} \cdot s^{(k)}}{n}$. Στην πραγματικότητα, η ασυμπτωτική συμπεριφορά της ακολουθίας $\{\mu_k : k=0,1,2,\dots\}$ είναι αρκετή για να προσδιορίσει την ασυμπτωτική συμπεριφορά της ακολουθίας $\{(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)}) : k=0,1,2,\dots\}$. Πράγματι, εάν \mathcal{K} είναι μία υπακολουθία των δεικνών, για την οποία ισχύει $\lim_{k \in \mathcal{K}} (x^{(k)}, s^{(k)}) = (x^*, s^*)$, τότε, για κάθε $k \in \mathcal{K}$, ισχύει:

$$A \cdot x^{(k)} = b, \quad c - s^{(k)} \in \text{Im}(A^T), \quad (x^{(k)}, s^{(k)}) > 0.$$

Περνώντας στο όριο και χρησιμοποιώντας τόσο το γεγονός ότι το σύνολο $\text{Im}(A^T)$ της εικόνας της γραμμικής απεικόνισης που επάγεται από τον πίνακα A^T , όσο και το γεγονός ότι $\mu_k > 0$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

$$A \cdot x^* = b, \quad c - s^* \in \text{Im}(A^T), \quad (x^*, s^*) \geq 0 \quad \text{και} \quad x^* \cdot s = 0$$

Ιδιαίτερα, βλέπουμε ότι :

$$c - s^* = A \cdot \lambda^* \quad \text{για κάποιο } \lambda^*.$$

Συγκρίνοντας αυτές τις συνθήκες με τις συνθήκες KKT (1.5), μπορούμε να διαπιστώσουμε το σημείο $(x^*, \lambda^*, s^*)^T$ ανήκει στο σύνολο \mathcal{F} των λύσεων του αρχικο-δualικού συστήματος.

Βεβαίως, προκειμένου να υπάρχει μία υπακολουθία \mathcal{K} των δεικνών, για την οποία ισχύει $\lim_{k \in \mathcal{K}} (x^{(k)}, s^{(k)}) = (x^*, s^*)$, πρέπει η ακολουθία $\{(x^{(k)}, s^{(k)}) : k=0,1,2,\dots\}$

να είναι φραγμένη. Η συνθήκη αυτή εφασφατίζεται όταν $\mu_k > 0$ (Güeller-Ye (1993)).

Επί πλέον, μπορούμε να δείξουμε πως, κάτω από την προϋπόθεση ότι $\mu_k > 0$, το σύνολο των οριακών σημείων (x^*, s^*) της (φραγμένης) ακολουθίας $\{(x^{(k)}, s^{(k)}) : k=0,1,2,\dots\}$ συνιστά ένα συνεχές υποσύνολο του \mathbb{R}^{2n} (Tapia-Zhang-Ye (1995)), και, ακόμη, πως όλα τα οριακά σημεία αντιστοιχούν σε γνησίως συμπληρωματικές λύσεις, δηλαδή σε λύσεις:

$$(x^*, \lambda^*, s^*)$$

οι οποίες είναι τέτοιες ώστε :

$$x_i^* > 0 \quad (i \in \mathcal{B}) \quad \text{και} \quad s_i^* > 0 \quad (i \in \mathcal{N})$$

όπου $\mathcal{B} \cup \mathcal{N}$ είναι μία διαμέριση του συνόλου των συνιστωσιακών δεικνών $\{1,2,\dots,n\}$. Αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν και για τον Αλγόριθμο (IPF) (που συμπεριλαμβάνεται στο \mathcal{F}^0 είδος, στο οποίο αναφερόμαστε παρακάτω). Συγκεκριμένα, μπορούμε να δείξουμε πως, κάτω από την προϋπόθεση ότι $\mu_k > 0$ και ότι $F^0 \neq \emptyset$, η ακολουθία που παράγεται από τον Αλγόριθμο:

$$\{(x^{(k)}, s^{(k)}) : k=0,1,2,\dots\}$$

είναι φραγμένη και, άρα, έχει ένα τουλάχιστον οριακό σημείο. Επί πλέον, κάθε τέτοιο οριακό σημείο της ακολουθίας $\{(x^{(k)}, s^{(k)}) : k=0,1,2,\dots\}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή μιας γνησίως συμπληρωματικής λύσης υπό την παραπάνω έννοια.

Πρόκειται για μεθόδους που καθορίζουν τα βήματά τους όπως και οι ακολουθούσες την διαδρομή μέθοδοι, με μόνη διαφορά ότι οι μέθοδοι αυτές δεν επιχειρούν την παρακολούθηση της κεντρικής διαδρομής C και εξελίσσονται ανεξάρτητα αυτής. Σ' αυτές τις μεθόδους, χρησιμοποιείται μία (λογαριθμική) συνάρτηση δυναμικού, προκειμένου να μετράται η αξία κάθε σημείου της F^0 και, σε κάθε επανάληψή τους, επιδιώκεται η μείωση της εν λόγω συνάρτησης.

Γνωρίζουμε ήδη ότι ο Αλγόριθμος του Karmarkar μετράει την επιτευχθείσα πρόοδο προς το βέλτιστο σημείο με την βοήθεια μιας λογαριθμικής συνάρτησης δυναμικού. Ήσως, η έννοια αυτή είναι παλιά. Συγκεκριμένα, θεωρήθηκε για πρώτη φορά το 1955 από τον Frisch ο οποίος εισήγαγε την συνάρτηση προσέγγισης λογαριθμικού φραγμού (: logarithmic barrier function approximation) ως προς το πρόβλημα (1.1), εξετάζοντας το συναρτές πρόβλημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x (c^T x - \tau \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i), \\ \text{όταν} \quad A \cdot x = b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \quad (1.17)$$

όπου $\tau > 0$ είναι μία θετική παράμετρος. (Σύμφωνα με το Θεώρημα Karush-Kuhn-Tucker, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\tau > 0$, η λύση του (1.17) πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \cdot X^{-1} \cdot \mathbf{1} + A^T \cdot \lambda = c \\ A \cdot x = b \\ x > 0 \end{array} \right\}$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Θέτοντας:

$$s_i := \frac{\tau}{x_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

βλέπουμε ότι αυτές οι συνθήκες μετασχηματίζονται στις συνθήκες (1.9) που ορίζουν την κεντρική διαδρομή. Για τον λόγο αυτό, οι ελαχιστοποιητές x_τ του προβλήματος (1.17) είναι απλά οι x_τ -συνιστώσες των συνιστωσών των διανυσμάτων $(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau)^T \in C$ της κεντρικής διαδρομής C . Η παρατήρηση αυτή έγινε από τον Megiddo, το 1987.

Ιδιότητες της συνάρτησης προσέγγισης λογαριθμικού φραγμού μελετήθηκαν το 1968 από τους Fiacco και McCormick (για την περίπτωση προβλημάτων Μη Γραμμικού Προγραμματισμού, όπου η πληρέστερη ανασκόπηση δόθηκε το 1992 από τον Wright) Ήσως, οι αλγόριθμοι που βασίστηκαν στην συνάρτηση προσέγγισης λογαριθμικού φραγμού δεν έτυχαν μεγάλης αποδοχής, λόγω της αυξανόμενης δυσκολίας που παρουσίαζαν όταν η παράμετρος τ προσέγγιζε το μηδέν. Το ενδιαφέρον αναζωπυρώθηκε το 1985 όταν επιστημάνθηκε η σχέση του Αλγορίθμου του Karmarkar και της συνάρτησης προσέγγισης λογαριθμικού φραγμού. Μάλιστα, το 1986, οι Gill-Murray-Saunders-Tomlin-Wright απέδειξαν ότι οι διευθύνσεις αναζήτησης του Αλγορίθμου του Karmarkar συμπίπτουν με τις διευθύνσεις που διαμορφώνονται με την εφαρμογή μιας μεθόδου όπως Newton για την επίλυση του προβλήματος (1.17), όταν η παράμετρος τ λάβει μία εδωκή τιμή. Συγκεκριμένα, θυμίζουμε ότι (στην διασκευή του Αλγορίθμου του Karmarkar, η οποία προκύπτει μετά από την προσαρμογή του σ' ένα πρόβλημα τυπικής μορφής (1.1),) η συνάρτηση προσέγγισης λογαριθμικού φραγμού είναι:

$$\left. \begin{array}{l} (n+1) \cdot \ln(C^T x - Z) - \sum_{i=1}^n \ln x_i \\ \text{(όπου } Z \text{ είναι ένα κάτω φράγμα της βέλτιστης αντικειμενικής τιμής)} \end{array} \right\} \quad (1.18)$$

Λίγα χρόνια αργότερα, το 1988, ο Renegar κατασκεύασε έναν αλγόριθμο ο οποίος εφαρμόζει την μέθοδο Newton για την επίλυση διανυσματικών εξισώσεων σε συνδυασμό με μια άλλη λογαριθμική συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x [-n \cdot \ln(Z - C^T x) - \sum_{i=1}^n \ln x_i] \\ \text{όταν } A \cdot x = b, \\ \quad x > 0, \\ \quad C^T x < Z, \end{array} \right\} \quad (1.19)$$

όπου το Z είναι τώρα ένα άνω φράγμα της βέλτιστης αντικειμενικής τιμής Z^* της συνάρτησης $C^T x$ του προβλήματος (1.1).

(Επισημαίνουμε όμως ότι η ιδέα του συνδυασμού της μεθόδου Newton με την συνάρτηση λογαριθμικού γραμμού της (1.17) για την επίλυση ενός προβλήματος Προγραμματισμού οφείλεται στον Dikin (1967). Όμως, η ιδέα αυτή καθ'εαυτή οδηγεί σ' ένα άλλο είδος αλγορίθμων που δεν θα εξετασθεί.) Το ελαχιστοποιητικό σημείο του προβλήματος (1.19) είναι το "αναλυτικό κέντρο" του πολυτόπου:

$$\{x \in \mathbb{R}^n: A \cdot x = b, x \geq 0, C^T x \leq Z\}.$$

Καθώς το Z φθίνει προς την βέλτιστη τιμή Z^* , οι λύσεις του προβλήματος (1.19) προσεγγίζουν μία λύση x^* του προβλήματος (1.1).

(Πράγματι, κάθε λύση του προβλήματος (1.19) ανήκει στην κεντρική διαδρομή του αρχικού προβλήματος. Ο Αλγόριθμος του Renegar ακολουθεί αυτήν την διαδρομή χρησιμοποιώντας την μέθοδο Newton προκειμένου να εντοπίζει προσεγγιστικές λύσεις του προβλήματος (1.19), καθώς το Z φθίνει προς την βέλτιστη τιμή Z^* .) Η πολυπλοκότητα του εν λόγω Αλγορίθμου είναι καλύτερη από αυτήν του Αλγορίθμου του KarmarKar, αφού απαιτεί $O(\sqrt{n} \cdot \ln \frac{1}{\epsilon})$ επαναλήψεις για να προσδιορίσει ένα εφικτό σημείο x του αρχικού Προγράμματος τέτοιο ώστε να ισχύει $|C^T x - Z^*| < \epsilon$, για μια δεδομένη τιμή του $\epsilon > 0$. Δεν έχει βρεθεί Αλγόριθμος με πολυπλοκότητα καλύτερη από αυτήν του Renegar.

Μέχρι εκείνη την εποχή, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται σε συναρτήσεις των μεταβλητών του αρχικού προβλήματος, όπως είναι οι συναρτήσεις των τύπων (1.17), (1.18) και (1.19). Οποιαδήποτε πληροφορία προήρχετο από το δίκιο πρόβλημα χρησιμοποιείτο μόνον για την εκτίμηση ενός βέλτιστου αντικειμενικού φράγματος Z . Προς αυτήν την κατεύθυνση, αξίζει ν' αναφερθούν οι συμβολές των Ye (1991), Freund (1991) και Gronzaga-Todd (1992), που όμως υιοθέτησαν και χρησιμοποίησαν την συνάρτηση δυναμικού \mathcal{F} του τύπου (1.20) που θα δοθεί αμέσως παρακάτω).

Επομένως, τα έτη 1987 και 1990, οι Ταταβε και Todd-Υε, αντιστοίχως, εισήγαγαν, για πρώτη φορά, αρχικο-δυναμικές συναρτήσεις δυναμικού οι οποίες αναβάθμισαν τον ρόλο των δυναμικών μεταβλητών. Έτσι, έναν χρόνο αργότερα, δηλαδή το 1991, οι Kojima-Mizuno-Yoshise, στηρίχθηκαν στις θεωρήσεις των Ταταβε-Todd-Υε και παρουσίασαν τον πρώτο Αλγόριθμο περιορισμού του δυναμικού. Ο Αλγόριθμος αυτός πραγματοποιεί μια κομψή και ισορροπημένη διαχείριση των αρχικών και δυναμικών μεταβλητών και αναζητεί το μήκος του επόμενου βήματος, μέσω εξισώσεων της μορφής (1.12) και χρησιμοποιώντας την συνάρτηση δυναμικού:

$$P_\rho(x, s) = \rho \cdot \ln(x^T \cdot s) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i \cdot s_i) \quad (\rho > n). \quad (1.20)$$

(Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε την σχέση που υφίσταται μεταξύ της συνάρτησης δυναμικού (1.20) των Ταταβε-Todd-Υε με την συνάρτηση προσέγγισης λογαριθμικού γραμμού (1.18) του Καρμαρκάρ. Από την θεωρία της Δυναμικότητας, και συγκεκριμένα από την σχέση (1.4), γνωρίζουμε ότι, για κάθε εφικτό σημείο (x, s) του δυναμικού προβλήματος, η ποσότητα $b^T \cdot x$ συνιστά ένα κάτω φράγμα της αντικειμενικής συνάρτησης $c^T \cdot x$ ($A \cdot x = b, x \geq 0$). Έτσι, μπορούμε να θέσουμε $Z = b^T \cdot x$ και, χρησιμοποιώντας την σχέση (1.3), να αντικαταστήσουμε την ποσότητα $c^T \cdot x - Z$ του Καρμαρκάρ με την ποσότητα $x^T \cdot s$ των Ταταβε-Todd-Υε:

$$c^T \cdot x - Z = x^T \cdot s.$$

Εξ άλλου, ο δεύτερος όρος της έκφρασης (1.20) διαφέρει από τον αντίστοιχο δεύτερο όρο της έκφρασης (1.18) μόνον κατά τον επί πλέον αθροιστικό παράγοντα $-\sum_{i=1}^n \ln s_i$.

Ο Αλγόριθμος αυτός των Kojima-Mizuno-Yoshise έχει την καλύτερη πολυπλοκότητα απ' όλους τους γνωστούς Αλγόριθμους εσωτερικού σημείου, αφού απαιτεί ένα πλήθος επαναλήψεων το οποίο είναι της τάξης του $O(\sqrt{n} \cdot |\ln \epsilon|)$ προκειμένου να ελαττωθεί το "χάσμα" της δυναμικότητας $x^T \cdot s$ και να καταστεί μικρότερο από μια δοθείσα ανεκτικότητα $\epsilon > 0$. Το σκεπτικό του εν λόγω Αλγόριθμου οριοθετείται από το γενικό πλαίσιο εργασίας ενός αρχικο-δυναμικού Αλγόριθμου, σχηματίζοντας τις διαδοχικές διευθύνσεις αναζήτησης κατά την επίλυση της εξίσωσης (1.13) για κάποιες τιμές της παραμέτρου σ_k . Τα μήκη των βημάτων α_k επιλέγονται έτσι ώστε η συνάρτηση P_ρ να υποχρεώνεται να τείνει προς το $-\infty$. Η επιτυχία αυτής της επιλογής θα εγγυάται την σύγκλιση των διαδοχικών επαναληπτικών βημάτων προς το σύνολο λύσεων. (Η ερμηνεία και αιτιολόγηση του τελευταίου ισχυρισμού πιστοποιείται από την θεωρία των Ταταβε-Todd-Υε, σύμφωνα με την οποία κάθε αρχικο-δυναμική συνάρτηση δυναμικού P (και ειδικότερα η P_ρ) έχει τις εξής δύο σημαντικές ασυμπτωτικές ιδιότητες:

$$\lim_{x_j, s_j \rightarrow 0} P(x, s) = +\infty \quad \text{για κάποιο } j=1, 2, \dots, n \text{ με } \mu := \frac{x^T \cdot s}{n} \neq 0 \quad (1.21a)$$

$$P(x, s) \rightarrow -\infty \quad \text{εάν και μόνον εάν } (x, \lambda, s) \rightarrow \Sigma \quad (1.21b)$$

όπου Σ είναι το σύνολο των αρχικο-δυναμικών λύσεων του Γραμμικού Προγράμματος. Η πρώτη ιδιότητα (1.21a) απαγορεύει σε οποιοδήποτε από τα ανά ζεύγη γινόμενα $x_i \cdot s_i$ να πλησιάσει προς το μηδέν ανεξαρτήτως από τα υπόλοιπα τέτοια γινόμενα και, για τον λόγο αυτόν, διατηρεί όλες τις επαναλήψεις μακριά από το σύνορο του μη αρνητικού τεταρτημορίου. Η δεύτερη ιδιότητα (1.21b) συνδέει την P με το σύνολο λύσεων Σ , έτσι ώστε εάν ο Αλγόριθμος εξαναγκάσει την P να ελαττώνεται προς το $-\infty$, τότε η ιδιότητα αυτή εξασφαλίζει την σύγκλιση των επαναληπτικών βημάτων προς το σύνολο λύσεων.) Ο ως άνω Αλγόριθμος είναι γνωστός ως **ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (PR)**.

Παρατήρηση. Εκτός από τον ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ (PR), στο τρίγων ΕΙΔΟΣ μπορεί να συμπεριληφθεί και η ΑΡΧΙΚΟ-ΔΥΙΚΗ ΑΡΙΘΜΟΣΥΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΗ (13) ΜΕΘΟΔΟΣ. Παρά το γεγονός ότι δεν θα την παρουσιάσουμε, ας σκιαγραφήσουμε τις βασικές της ιδέες.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η ιδέα του συνδυασμού της μεθόδου Newton με την συνάρτηση λογαριθμικού φραγμού της (1.17) για την επίλυση ενός προβλήματος Προγραμματισμού οφείλεται στον Dikin, ο οποίος πρότεινε, το 1967, έναν Αλγόριθμο που προσδιορίζει τα βήματα της αναζήτησης σχηματίζοντας ένα τετραγωνικό μοντέλο της αντικειμενικής συνάρτησης της (1.17) γύρω από το τρίγων γνησίως ερικό σημείο x , επιλύοντας το διαμορφώσιμο τετραγωνικό πρόβλημα και, τέλος, συλλέγοντας τον όρο με την υψηλότερη τάξη ($O(\frac{1}{2})$) μέσα από την λύση. Τα προκύπτοντα βήματα αναζήτησης Δx είναι της μορφής:

$$\Delta x = -X \cdot P_{\text{ker}(A \cdot X)}(X \cdot c)$$

όπου X είναι ο διαγώνιος πίνακας

$$X = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & x_2 & \\ 0 & & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

και όπου το σύμβολο $P_{\text{ker}(A \cdot X)}(\cdot)$ αναπαριστά την προβολή επί του πυρήνα της απεικόνισης του πίνακα $A \cdot X$. (Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε το πρόβλημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\bar{x}} (c^T \cdot \bar{x}), \\ \text{όταν} \quad A \cdot \bar{x} = b, \\ \quad \quad \|X^{-1}(\bar{x} - x)\|^2 \leq 1 \end{array} \right\}$$

και να θέσουμε $\Delta x = \bar{x} - x$.) Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή αρχική αριθμοσυσχετιζόμενη μέθοδος (: primal affine-scaling method), λόγω του αριθμοσυσχετιζόμενου μετασχηματισμού με τον πίνακα X , ο οποίος εφαρμόζεται στις αρχικές μεταβλητές σε κάθε επανάληψη.

Η μέθοδος αυτή επανήλθε σ' ένα ερευνητικό επίκεντρο μετά το 1985. Παρ' όλο το ενδιαφέρον και τις προσπάθειες που κατεβλήθησαν δεν παρουσιάστηκε ποτέ κάποιο αποτέλεσμα που να αποδεικνύει ότι η μέθοδος αυτή έχει πολυωνυμική πολυπλοκότητα. Μόνον αποτελέσματα ολικής σύγκλισης αποδείχθηκαν (βλ. π.χ. Tsuchiya-Mitsumatsu (1995), Monteiro-Tsuchiya-Wang (1993) και Tseng-Luo (1992))

Μια αρχικο-δυική παραλλαγή της μεθόδου προτάθηκε από τους Monteiro-Adler-Resende το 1990, στην οποία χρησιμοποιείται η μέθοδος Newton για την επίλυση της εξίσωσης $f(x, \lambda, s) = 0$ (1.6) και για τον προσδιορισμό των βημάτων αναζήτησης. Ο λόγος για τον οποίον η διεύθυνση αυτή καλείται "αριθμο-συσχετιζόμενη" διεύθυνση προέρχεται από την παρατήρηση ότι η Δx συνιστώσα της ισούται με:

$$\Delta x = -D \cdot P_{\text{ker}(A \cdot D)}(D \cdot c)$$

όπου D είναι ο πίνακας:

$$D = S^{-\frac{1}{2}} \cdot X^{\frac{1}{2}} \quad (S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)).$$

Τούτη τη φορά, αποτελέσματα περί της πολυωνυμικής πολυπλοκότητας αυτής της αρχικο-δυικής παραλλαγής της μεθόδου Dikin παρουσιάστηκαν από τους ίδιους τους εισηγητές της (το 1990).

As σημειωθεί, τέλος, ότι, το 1996, οι Jansen-Roos-Terlaky πρότειναν έναν κάπως διαφορετικό αρχικο-δυικό αριθμο-συσχετιζόμενο Αλγόριθμο και απέδειξαν την πολυωνυμική πολυπλοκότητά του.

3: ΕΙΔΟΣ: ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΟΥ ΜΗ ΕΦΙΚΤΟΥ ΕΞΣΤΕΡΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ (: INFEASIBLE-INTERIOR POINT METHODS)

Μέχρι τώρα υποθέταμε ότι το αρχικό σημείο $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T$ έχει εκληφθεί ως ένα γνησίως εφικτό σημείο, ότι δηλαδή $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T \in F^0$ ή ισοδύναμα ότι οι συνιστώσες του ικανοποιούν τις δύο γραμμικές εξισώσεις:

$$A \cdot x^{(0)} = b \quad \text{και} \quad A^T \cdot \lambda^{(0)} + s^{(0)} = c \quad (x^{(0)} > 0, s^{(0)} > 0).$$

Όμως, σε πολλά προβλήματα, είναι δύσκολη η ανεύρεση ενός τέτοιου αρχικού σημείου. Ακόμα, υπάρχουν περιπτώσεις καλώς ορισμένων Γραμμικών Προγραμμάτων στα οποία δεν υπάρχουν τέτοια σημεία. (Για παράδειγμα, το Γραμμικό Πρόγραμμα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min (2x_1 + x_2) \\ \text{όταν} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_3 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

έχει εφικτό σύνολο το σύνολο $\{(b, 0, 5-b)^T : b \in [0, 5]\}$: Επειδή η δεύτερη συνιστώσα κάθε εφικτού σημείου είναι ίση με μηδέν, το σύνολο F^0 είναι κενό.)

Υπάρχουν τρεις βασικές κατηγορίες τρόπων αντίδρασης έναντι μιας τέτοιας εμπλοκής. Οι τρεις αυτές κατηγορίες συνιστούν ένα τρίτο είδος Αλγορίθμων που φέρουν την επωνομασία:

ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΟΥ ΜΗ ΕΦΙΚΤΟΥ ΕΞΣΤΕΡΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Α' ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

Γ' ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (IPF) (: παραλλαγή του ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ (LPPF)) *

ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΑΥΤΟ-ΔΥΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ (HSD FORMULATION) **

Β' ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

ΕΜΠΥΤΕΥΣΗ ΤΟΥ ΔΟΒΕΝΤΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΑ Σ' ΕΝΑ ΕΛΑΦΡΕΣΣΕ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ

(με την προσθήκη επιπλέον γραμμών και στηλών στον πίνακα A)

(Έχει όλες τις επιθυμητές ιδιότητες που επιδιώκονται με την Β' ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ και είναι πολύ αποτελεσματική. Το κόστος της σε κάθε επανάληψη δεν υπερβαίνει το αντίστοιχο της μεθόδου της Β' ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΣ. Μια παραλλαγή, γνωστή ως απλοποιημένη ομογενής αυτο-δύικη διατύπωση (: simplified HSD formulation), συνδυάζει την μέθοδο της Α' ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΣ με την HSD. Όπως η HSD, έχει πάντοτε λύση, ακόμα και όταν το αρχικό πρόβλημα δεν έχει. Σ αυτήν την περίπτωση όμως, είναι σε θέση να δηλώνει την ανέφικτη δομή του αρχικού προβλήματος.)

(Δεν απαιτείται τίποτα περισσότερο από την θετικότητα των συνιστωσών του διανύσματος εκκίνησης $x^{(0)}$ και $s^{(0)}$. Τότε, τα βήματα αναζήτησης θα πρέπει να ανασκευασθούν ελαφρώς με την προσθήκη υπολοίπων (: residuals)

$$r_b := Ax - b \quad \text{και} \quad r_c := A^T \lambda + s - c \quad (1.22)$$

στις δύο πρώτες γραμμικές εξισώσεις που συμμετέχουν στην (1.12), έτσι ώστε η εξίσωση βήματος μιας τέτοιας μεθόδου να δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{pmatrix} 0_{n \times n} & A^T & I_{n \times n} \\ A & 0_{m \times m} & 0_{m \times m} \\ S & 0_{n \times n} & X \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_c \\ -r_b \\ -X \cdot S \cdot \mathbb{1} + s \cdot \mu \cdot \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

Το κάθε βήμα αναζήτησης θα είναι πάλι ένα βήμα Newton περί το σημείο $(x_{\mu}, \lambda_{\mu}, s_{\mu})^T \in C$ και θα επιδιώκει να αποτραβήξει εφ' άπαξ από το σύνολο των ανέφικτων λύσεων το επόμενο σημείο, επιλέγοντας τις τιμές της παραμέτρου επικέντρωσης μ γραμμικές και μακριά από το μηδέν. Η περιοχή μέσα στην οποία εξελίσσονται οι επαναλήψεις είναι μία επικταγή της περιοχής F^0 , εντός της οποίας περιέχονται και ανέφικτα σημεία. Επί πλέον, δύο νέες συνθήκες επιβάλλονται επί της επιλογής του μήκους μ του βήματος: Πρώτον, η απόκλιση από τις δύο βασικές συνθήκες $Ax = b$ και $A^T \lambda + s = c$ πρέπει να γθίνει κατά τουλάχιστον κάποιο κλάσμα της προ-τερου μέτρου δικιότητας μ , και δεύτερον, το μέτρο δικιότητας μ που παράγεται από τον Αλγόριθμο (IPF) γθίνει μονότονα προς το μηδέν, για οποιαδήποτε επιλογή αρχικού σημείου τέτοιου ώστε $(x^{(0)}, s^{(0)})^T > 0$. Μάλιστα, αποδεικνύεται ότι εφ' όσον $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)}) = (J, \mathbb{1}, 0, J, \mathbb{1})$ με $J \gg 0$ τότε (ισχύει το εζης αποτέλεσμα πο-λυωνυμικής πολυπλοκότητας): μπορούμε να παράξουμε ένα σημείο $(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T$ τέτοιο ώστε $\mu_k < \epsilon$ μετά από $O(n^2 / \epsilon \ln \epsilon)$ πλήθος επαναλήψεων.)

- Mejido (1989)
- Kojima-Mizuno-Yoshise (1989)
- Monteiro-Adler (1989)
- McShane-Monma-Spanno (1989)
- Lustig (1991)
- Lustig-Marsten-Shanno (1991)

* Kojima-Mizuno-Yoshise (1993), Zang (1994), Wright (1994), Potra (1994)

** Ye-Todd-Mizuno (1994) Xu-Hung-Ye (1996)

Από το 1990 και μετά, πολλές μέθοδοι εσωτερικού σημείου έχουν βασισθεί στον Αλγόριθμο Πρόβλεψης-Διόρθωσης Μετρώτα (ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (MPC)). Ο Αλγόριθμος αυτός αποκλίνει ελαφρώς από το Γενικό Πλαίσιο Εργασίας ενός Αρχικού-Δυναμικού Αλγορίθμου ως προς το ότι επιβαρύνει την βασική Διεύθυνση αναζήτησης τύπου Newton με μία διόρθωση της οποίας ο υπολογισμός είναι ακούρντως οικονομικός. Επί πλέον, επιτρέπει μία προσαρμόσιμη επιλογή της παραμέτρου επικέντρωσης σ σε κάθε επανάληψή του. Το θεωρητικό του υπόβαθρο στηρίζεται στην θεωρία των προηγμένων Αλγορίθμων, καθώς και σε άλλες ιδέες που προέρχονται από τα γνωστικά πεδία της Βελτιστοποίησης και της Αριθμητικής Ανάλυσης. Συμπεριλαμβάνει τέλος έναν αριθμό από καινοτομίες οι οποίες αναπτύχθηκαν μετά από δέκα χρόνια υπολογιστικής εμπειρίας.

Ωστόσο, δεν πρέπει να θεωρείται ότι προήλθε ως αποτέλεσμα μιας φρενητικής προσπάθειας ανεξάρτητης τελείως των προηγούμενων αυτής. Ένα από τα κύρια συστατικά του συγκεκριμένου Αλγορίθμου - η χρήση υψηλής τάξης προσεγγίσεων προς την κεντρική διαδρομή - είχε θεωρηθεί κατ' αρχάς από τον Megido το 1989 και άρχισε ιδιαίτερης μελέτης από τους Monteiro-Adler-Resende και τους Karmarkar-Lagarias-Slutsman-Wang το 1990. Ακόμα, ένα άλλο βασικό συστατικό του ίδιου Αλγορίθμου - η ακολουθούσα την διαδρομή μέθοδος του μη ερικού εσωτερικού σημείου - είχε εφαρμοστεί με επιτυχία, έναν χρόνο νωρίτερα από την δημοσίευση του Αλγορίθμου που πραγματοποιήθηκε το 1992, από τους Lustig-Marsten-Shanno. Υστερα από αυτά, η συμβολή του Μετρώτα ενέκλειτο στην σύζευξη των υπάρχουσών ως άνω ιδεών προς την σωστή κατεύθυνση και στην προσθήκη τεχνικών καινοτομιών όσον αφορά στην κατάλληλη επιλογή της (προσαρμόσιμης σε κάθε επανάληψη) παραμέτρου επικέντρωσης, του μήκους του εκάστοτε βήματος και, φυσικά, του αρχικού σημείου εκκίνησης. Το αποτέλεσμα ήταν ένας εξαιρετικά αποτελεσματικός Αλγόριθμος που, όπως ήδη αναφέρθηκε, διαμόρφωσε πολλούς από τους επόμενους Αλγορίθμους εσωτερικού σημείου.

As επιχειρήσουμε να γίνουμε λίγο πιο επεξηγηματικοί περί του σχολιασμού του ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ (MPC). Στον Αλγόριθμο αυτόν, επιχειρείται η παραγωγή μιας ακολουθίας μη ερικών σημείων $(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T$ τέτοιων ώστε $(x^{(k)}, s^{(k)}) > 0$. Το βήμα αναζήτησης σε κάθε επανάληψη διαμορφώνεται επί της επιδίωξης σχηματισμού τριών συστατικών κατευθύνσεων:

- μίας αριθμο-συσχετιζόμενης συστατικής συνιστώσας "πρόβλεψης" - που συνίσταται σ' ένα βήμα Newton για την συνάρτηση $f(x, \lambda, s)$ της διανυσματικής εξίσωσης (4.6),
- ενός όρου επικέντρωσης, του οποίου το μέγεθος προσδιορίζεται από την προσαρμόσιμη επιλογή της παραμέτρου επικέντρωσης σ ,
- μίας συστατικής συνιστώσας "διόρθωσης" - που συνίσταται στην επανόρθωση της οποίας επιβάρυνσης έχει προέλθει από την μη γραμμική έκδοχή της αριθμο-συσχετιζόμενης συστατικής συνιστώσας της "πρόβλεψης".

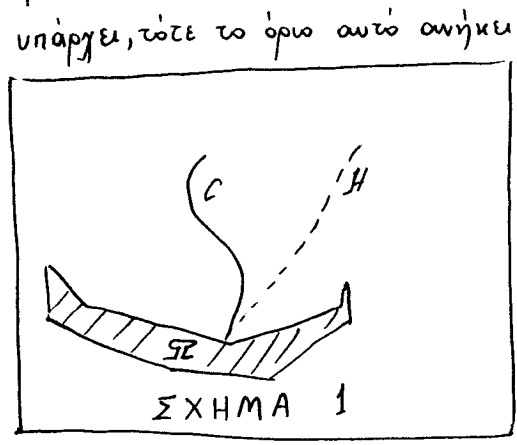
Οι δύο πρώτες από τις παραπάνω συστατικές κατευθύνσεις συνδυάζονται προκειμένου να δώσουν το πρότυπο βήμα της μεθόδου του Μη Ερικού Εσωτερικού Σημείου όπως αυτό δημιουργείται κατά την επίλυση των γεννητών εξισώσεων (4.23). Ωστόσο, η μόνη βασική διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι στον ΑΛΓΟΡΙΘΜΟ (MPC) η αριθμο-συσχετιζόμενη συστατική συνιστώσα υπολογίζεται χωριστά, και προηγουμένως, από την παράμετρο επικέντρωσης. Τακτοποιώντας τους υπολογισμούς κατ' αυτόν τον τρόπο, διαφραγίζεται το πλεονέκτημα-κλειδί της προσαρμόσιμης επιλογής της παραμέτρου σ (σε αντίθεση με τους άλλους προηγμένους Αλγορίθμους): εφ' όσον το αριθμο-συσχετιζόμενο βήμα ετασγαλίσει αξιοσημείωτη πρόοδο ως προς την επιδιωκόμενη ελάττωση του μέτρου δυσκολίας μ , ενώ ταυτόχρονα κατορθώσει να παραμείνει μέσα στο θετικό τεταρτημόριο $(x, s)^T > 0$, τότε αρκεί η επιλογή μίας μικρής τιμής για την παράμετρο επικέντρωσης σ σε άλλη περίπτωση, όταν δηλαδή μπορούσαμε να μετακινηθούμε μόνον κατά μία μικρή απόσταση κατά την εκτέλεση ενός αριθμο-συσχετιζόμενου βήματος, χωρίς να παραβιάσουμε τις συνθήκες $(x, s)^T > 0$, τότε πρέπει η επιλογή της τιμής της παραμέτρου επικέντρωσης σ να γίνει κοντά στον αριθμό 1.

Το μειονέκτημα του Χριστού υπολογισμού της παραμέτρου επικέντρωσης είναι το επακόλουθο της επίλυσης δύο γραμμικών συστημάτων (αντί ενός) σε κάθε επανάληψη. Εν τούτοις, το περιθώριο κόστος δεν είναι πολύ μεγάλο: επειδή τα δύο συστήματα έχουν τον ίδιο πίνακα συντελεστών, αρκεί να παραγοντοποιήσουμε μία μόνη φορά τον εν λόγω πίνακα και να εκτελέσουμε δύο αντικαταστάσεις (μία για κάθε δεξιό μέρος των δύο συστημάτων).

Η αριθμο-συσχετιζόμενη συστατική συνιστώσα επιτυγχάνεται από μία γραμμική προσέγγιση των ισοτήτων των συνθηκών ΚΚΤ. Καθώς η συνιστώσα αυτή υπολογίζεται χωριστά, μπορούμε να αποτιμήσουμε το σφάλμα της γραμμικής προσέγγισης. Η γνώση του αποτιμηθέντος σφάλματος μας οδηγεί στον προσδιορισμό της "διορθωτικής" συνιστώσας και, επομένως, στην βελτίωση του γραμμικού μοντέλου πρώτης τάξης που ορίζεται από την εξίσωση $f(x, \lambda, s) = 0$. Η βελτίωση αυτή έγκειται στην υποκατάσταση του μοντέλου αυτού με ένα άλλο τετραγωνικό μοντέλο δεύτερης τάξης. Επειδή οι δύο τελευταίες συνιστώσες προκύπτουν από την επίλυση γραμμικών συστημάτων με κοινό πίνακα συντελεστών, όπως εκείνος της πρώτης συστατικής συνιστώσας, και επειδή αυτές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, δεν υπάρχει κάποιος λόγος χωριστού υπολογισμού τους. Μπορούμε απλώς να εμμετεύσουμε και τις δύο συνιστώσες μέσα σ'ένα κοινό βήμα προσθέτοντας τα αντίστοιχα δεξιά μέρη τους και υπολογίζοντας το συνδυασμένο αυτό βήμα με μία κοινή αντικατάσταση. Για το κόστος αυτής της αντικατάστασης, ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (MPC) παρέχει μία προσαρμοσμένη επίλυση της παραμέτρου σ και μία υψηλής τάξης ακρίβεια κατά την εκτέλεση των βημάτων της αριθμο-συσχετιζόμενης συνιστώσας. Γενικά, το επί πλέον αυτό κόστος ανά επανάληψη εξισορροπείται από τον περιορισμό του αριθμού των επαναλήψεων.

Ας έρθουμε τώρα στο σκεπτικό του ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ (MPC). Η έμπνευση έγκειται στην θεωρία μεθόδων που ακολουθούν τις τροχιές. μέσα στο σύνολο $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n+m}$. Η κεντρική διαδρομή είναι μια τέτοια τροχιά που περατώνεται στο σύνολο Σ των λύσεων του αρχικο-δυναμικού προβλήματος. Μια διαφορετική τροχιά η οποία κατευθύνεται από το τρέχον σημείο $(x, \lambda, s)^T$ προς το Σ παρουσιάζει άμεσο ενδιαφέρον, γιατί το τρέχον αυτό σημείο σπάνια ανήκει στην κεντρική διαδρομή. Τα κοινά γνωρίσματα αυτών των τροχιών είναι αφ' ενός ότι συνίστανται σε σημεία $(\hat{x}_\tau, \hat{\lambda}_\tau, \hat{s}_\tau)^T$ με $\tau \in [0, 1]$ τέτοια ώστε $(\hat{x}_0, \hat{\lambda}_0, \hat{s}_0)^T = (x, \lambda, s)^T$ και αφ' ετέρου ότι εάν το όριο:

$$\lim_{\tau \rightarrow 1} (\hat{x}_\tau, \hat{\lambda}_\tau, \hat{s}_\tau)^T$$



ΣΧΗΜΑ 1

υπάρχει, τότε το όριο αυτό ανήκει στο σύνολο Σ . Μια τέτοια τροχιά φαίνεται στο Σχήμα 1. Όσοι Αλγόριθμοι προέρχονται από το Γενικό Πλαίσιο Εργασίας Αρχικο-Δυναμικών Αλγορίθμων Εσωτερικού Σημείου μπορούν να θεωρούνται ως μέθοδοι πρώτης τάξης ως προς την ικανότητά τους να προσδιορίζουν κάποια εσθία που εφάπτεται προς μία τροχιά όπως η H και να εκτελούν μία ευθύγραμμη αναδίπλωση κατά μήκος της εφαπτομένης αυτής. Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (MPC) σχηματίζει το βήμα υπολογισμού της καμπυλότητας της H στο τρέχον σημείο, διαφοροποιώντας έτσι την περιγραφή μιας δεύτερης τάξης προσέγγισης προς την H . Η καμπυλότητα (που είναι ισοδύναμη προς το βήμα της "διορθωτικής") μπορεί να βρεθεί με σχετικά μικρό υπολογιστικό κόστος. Η υπολογιστική εμπειρία γαληνώνει ότι το δημιουργούμενο επί πλέον κόστος εξισορροπείται από τον αβυσθημώτο περιορισμό του πλήθους των επαναλήψεων σε σχέση με το αντίστοιχο πλήθος επαναλήψεων που απαιτούνται για την υλοποίηση οποιασδήποτε μεθόδου στηρίζεται στο Γενικό Πλαίσιο Εργασίας Αρχικο-Δυναμικών Αλγορίθμων Εσωτερικού Σημείου.

Παρατήρηση. Δεν υπάρχουν διαθέσιμα στοιχεία περί της πολυπλοκότητας του ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ (MPC) !!

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (SPF)

Με δεδομένα τα μεγέθη $\theta = 0.4$, $\sigma = 1 - \frac{0.4}{\sqrt{n}}$ και $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T \in V_2^\theta$,

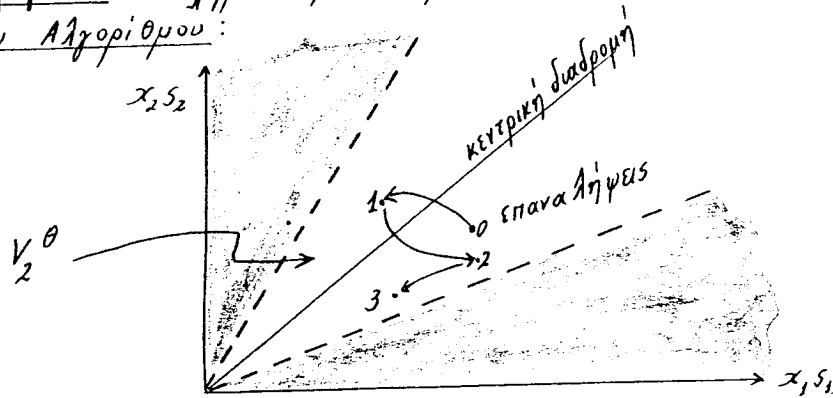
για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$

να τεθεί $\sigma_k := \sigma$ και να επιλυθεί ως προς $(\Delta x^{(k)}, \Delta \lambda^{(k)}, \Delta s^{(k)})^T$ η (1.13)

να τεθεί $(x^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}, s^{(k+1)})^T := (x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T + (\Delta x^{(k)}, \Delta \lambda^{(k)}, \Delta s^{(k)})^T$

Τέλος (του για κάθε).

Παρατηρήσεις. (i). Σχηματική αναπαράσταση της συμπεριφοράς των επαναλήψεων του Αλγορίθμου:



(ii). Η μέθοδος ξεκινά από ένα σημείο $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T \in V_2^\theta$ και χρησιμοποιεί ομοιόμορφες επιλογές:

$$\alpha_k = 1 \quad \text{και} \quad \sigma_k = \sigma$$

όπου οι αριθμοί θ και σ συνδέονται μεταξύ τους με σχέση που θα δοθεί σε λίγο. Όλες οι επαναλήψεις $(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T$ παραμένουν μέσα στην περιοχή V_2^θ (κι αυτό αποτελεί έναν από τους κύριους προβληματισμούς της ανάλυσης του Αλγορίθμου, γιατί δεν είναι προφανές), και τα μέτρα δυσκότητας μ_k τείνουν γραμμικά προς το 0 με σταθερό ρυθμό μείωσης ίσο με $1-\sigma$.

(iii). Στην Ανάλυση του Αλγορίθμου, η οποία πρόκειται να ακολουθήσει, τα δύο Λήμματα 1 και 2 ισχύουν για όλους τους Αλγορίθμους που ακολουθούν την (κεντρική) διαδρομή.

(iv). Η απόδειξη του γεγονότος ότι οι επαναλήψεις του Αλγορίθμου (SPF) παραμένουν μέσα στην περιοχή V_2^θ προέρχονται από το επόμενο Θεώρημα, που είναι απόρροια του πιο κάτω αναφερόμενου Λήμματος 3 (γ):

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Ας υποθέσουμε ότι οι παράμετροι $\theta \in]0, 1[$ και $\sigma \in]0, 1[$ έχουν επιλεγεί έτσι ώστε:

$$\frac{\theta^2 + n(1-\sigma)^2}{2^{3/2}(1-\theta)} \leq \sigma \cdot \theta$$

Εάν $(x, \lambda, s) \in V_2^\theta$, τότε $(x(a), \lambda(a), s(a))^T \in V_2^\theta$ για κάθε $a \in [0, 1]$.

Ανάλυση του Αλγορίθμου: Θέτουμε:

$$(x(a), \lambda(a), s(a))^T := (x, \lambda, s)^T + a \cdot (\Delta x, \Delta \lambda, \Delta s),$$

$$\mu(a) := \frac{x(a)^T \cdot s(a)}{n}$$

ΛΗΜΜΑ 1. Ας υποθέσουμε ότι το βήμα $(\Delta x, \Delta \lambda, \Delta s)$ προέρχεται από την επίλυση της εξίσωσης (1.12). Τότε:

$$\Delta x^T \cdot \Delta s = 0 \quad \text{και} \quad \mu(a) = [1 - a(1-\sigma)] \cdot \mu \quad \blacksquare$$

Στον συγκεκριμένο Αλγορίθμο, έχουμε, λόγω της εξειδικευμένης επιλογής των τιμών α_k , a και σ_k , ότι:

$$\mu_{k+1} = \sigma \cdot \mu_k = \left(1 - \frac{0.4}{\sqrt{n}}\right) \cdot \mu_k \quad (k=0, 1, \dots) \quad (1.24)$$

Επεται, άμεσως, η γραμμική σύγκλιση του Αλγορίθμου.

ΛΗΜΜΑ 2 (ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ). Εστω $\varepsilon \in]0, 1[$. Ας υποθέσουμε ότι ένας Αλγορίθμος που ακολουθεί την διαδρομή παράγει μία ακολουθία από επαναλήψεις τέτοια ώστε:

$$\mu_{k+1} \leq \left(1 - \frac{\delta}{\eta \omega}\right) \cdot \mu_k \quad (k=0, 1, \dots)$$

όπου δ και ω είναι δύο θετικές σταθερές. Εάν ισχύει:

$$\mu_0 \leq \varepsilon / \varepsilon^c,$$

για κάποια θετική σταθερά c , τότε υπάρχει ένας δείκτης $K = O(n^\omega \cdot \lceil \ln \varepsilon \rceil)$ τέτοιος ώστε:

$$\mu_k \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad k \geq K \quad \blacksquare$$

Στον συγκεκριμένο Αλγορίθμο, η πολυωνυμική πολυπλοκότητα είναι άμεση συνέπεια της σχέσης (1.24) και του Λήμματος 2. Πράγματι, λόγω της (1.24), μπορούμε να θέσουμε $\delta = 0.4$, $\omega = 0.5$ και να εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.

Όσον αφορά στην απόδειξη του γεγονότος ότι:

$$(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T \in V_2^\theta$$

επισημαίνουμε ότι η απόδειξη αυτή στηρίζεται στο ακόλουθο τεχνικό και κλιμακωτό Λήμμα 3:

ΛΗΜΜΑ 3. (α). Εάν $u, v \in \mathbb{R}^n$ είναι τέτοια ώστε $u^T \cdot v \geq 0$, τότε

$$\|U \cdot V\| \leq 2^{-3/2} \cdot \|u+v\|^2,$$

όπου $U = \text{diag}(u_1, \dots, u_n)$ και $V = \text{diag}(v_1, \dots, v_n)$.

(β). Εάν $(x, \lambda, s)^T \in V_2^\theta$, τότε

$$\|\Delta x \cdot \Delta s\| \leq \frac{\theta^2 + n(1-\sigma)^2}{2^{3/2}(1-\theta)} \cdot \mu.$$

(γ). Εάν $(x, \lambda, s)^T \in V_2^\theta$, τότε

$$\|X(a) \cdot S(a) - \mu(a)\| \leq (1-a) \cdot \|X \cdot S\| - \mu \cdot \|1\| + a^2 \cdot \|\Delta X \cdot \Delta S\|$$

$$\leq (1-a) \cdot \theta \cdot \mu + a^2 \cdot \left[\frac{\theta^2 + n(1-\sigma)^2}{2^{3/2}(1-\theta)} \right] \cdot \mu \quad \blacksquare$$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (PC)

Με δεδομένο το σημείο $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T \in V_2^{\theta=0.25}$,
για κάθε $k=0, 1, 2, \dots$

εάν ο δείκτης k είναι άρτιος

(* βήμα πρόβλεψης *)

να τεθεί $\sigma_k := 0$ και να επιλυθεί ως προς $(\Delta x^{(k)}, \Delta \lambda^{(k)}, \Delta s^{(k)})^T$ η (1.13) *

να επιλεγεί ως α_k η μέγιστη μεταξύ των τιμών του $\alpha \in [0, 1]$ που ικανοποιούν την

$$(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T \in V_2^{\theta=0.5}$$

να τεθεί $(x^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}, s^{(k+1)})^T := (x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T + \alpha_k (\Delta x^{(k)}, \Delta \lambda^{(k)}, \Delta s^{(k)})^T$

άλλως

(* βήμα διόρθωσης *)

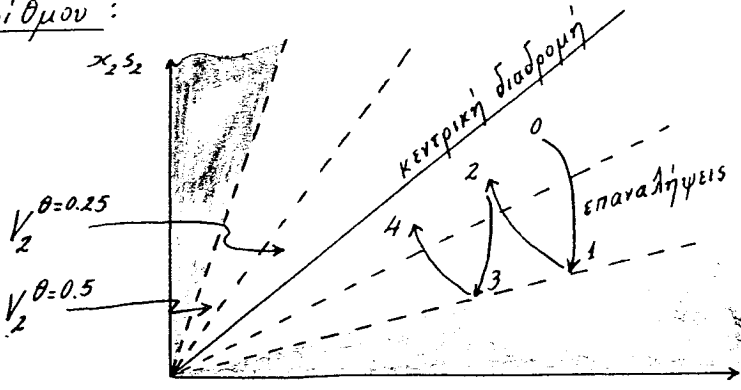
να τεθεί $\sigma_k := 1$ και να επιλυθεί ως προς $(\Delta x^{(k)}, \Delta \lambda^{(k)}, \Delta s^{(k)})^T$ η (1.13) *

να τεθεί $(x^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}, s^{(k+1)})^T := (x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T + (\Delta x^{(k)}, \Delta \lambda^{(k)}, \Delta s^{(k)})^T$

τέλος (του εάν)

τέλος (του για κάθε).

→ Παρατηρήσεις. (i). Σχηματική αναπαράσταση της συμπεριφοράς των επαναλήψεων του Αλγορίθμου:



(ii). Η μέθοδος ξεκινά από ένα σημείο $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T$ της (εσωτερικής) περιοχής $V_2^{\theta=0.25}$ και εκτελεί ένα βήμα πρόβλεψης θέτοντας $\sigma_0 = 0$. Κινείται τότε κατά μήκος αυτής της διεύθυνσης έως ότου συναντήσει το σύνορο της (εξωτερικής) περιοχής $V_2^{\theta=0.5}$. Σταματά στο σημείο αυτό και ορίζει το νέο επαναληπτικό σημείο $(x^{(1)}, \lambda^{(1)}, s^{(1)})^T$. Τώρα, η μέθοδος ορίζει ένα βήμα διόρθωσης θέτοντας $\sigma_1 = 1$. Ένα μοναδιαίο βήμα κατά μήκος αυτής της διεύθυνσης οδηγεί στο επόμενο επαναληπτικό σημείο $(x^{(2)}, \lambda^{(2)}, s^{(2)})^T$ το οποίο βρίσκεται και πάλι στο εσωτερικό της ενδοτερής περιοχής. Το σύστημα αυτό των βημάτων πρόβλεψης και διόρθωσης επανα-

λαμβάνεται αδιαλείπτως, έτσι ώστε τα επαναληπτικά σημεία $(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T$ με δείκτης k να βρίσκονται στο εσωτερικό της ενδοτερής περιοχής $V_2^{\theta=0.25}$ ενώ τα επαναληπτικά σημεία $(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T$ με μονούς δείκτες να βρίσκονται στο σύνορο της εξωτερικής περιοχής $V_2^{\theta=0.5}$.

(iii). Ο ρόλος των διαδοχικών βημάτων αποσκοπεί στην μείωση του μέτρου δυκνότητας και στην βελτίωση της περιέντρωσης ως εξής:

- τα βήματα πρόβλεψης ($\sigma_k = 0$) ελαττώνουν το μ (κατά ένα πολλαπλάσιο του $(1-\alpha)$, όπου α είναι το μέγεθος του βήματος),
- τα βήματα διόρθωσης ($\sigma_k = 1$) βελτιώνουν την προ-κέντρωση (αφήνοντας αμετάβλητο το μ και κινούμενα και πάλι προς την εσωτερική περιοχή) έτσι ώστε να παύεται η δυνατότητα αποτελεσματικού ελιγμού κατά την νέα επανάληψη).

(iv). Ο όρος πρόβλεψη-διόρθωση προέρχεται από την ανάλογη συμπεριφορά των αντίστοιχων Αλγορίθμων κατά την αριθμητική επίλυση συνήθων Δ.Ε. Οι Αλγόριθμοι αυτοί ακολουθούν την τροχιά της λύσης ενός προβλήματος με αρχικές συνθήκες εναλλαγής τα βήματά τους μεταξύ βημάτων πρόβλεψης (που κινούνται κατά μήκος της εφαπτομένης της τροχιάς) και βημάτων διόρθωσης (που επαναφέρουν την αναζήτηση επί της τροχιάς).

Ανάλυση του Αλγορίθμου: Η πρώτη συνάρτη πρότα-ση περιγράφει την συμπεριφορά κάθε βήματος πρόβλεψης, δίνοντας ένα κάτω φράγμα του μήκους του βήματος κι έτσι μια εκτίμηση της ελάττωσης του μ . Η δεύτερη περιγράφει τα βήματα διόρθωσης, παρουσιάζον-τας την επαναφορά κάθε σημείου της $V_2^{\theta=0.25}$ στην $V_2^{\theta=0.5}$ χωρίς να θυγί η τιμή του μ .

ΛΗΜΜΑ 4. Ας υποθέσουμε ότι $(x, \lambda, s)^T \in V_2^{\theta=0.25}$ και ότι $(\Delta x, \Delta \lambda, \Delta s)^T$ είναι το αποτέλεσμα της (1.12) για $\sigma = 0$. Τότε $(x(\alpha), \lambda(\alpha), s(\alpha))^T \in V_2^{\theta=0.5}$ για κάθε $\alpha \in [0, \bar{\alpha}]$ με $\bar{\alpha} = \min\{\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{\mu}{8\|\Delta x \cdot \Delta s\|}}\}$.
Ετσι, το βήμα πρόβλεψης έχει μήκος τουλάχιστον $\bar{\alpha}$ και η νέα τιμή του μ είναι το πολύ $(1-\bar{\alpha}) \cdot \mu$.

(Το Λήμμα 3.18) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό κάτω φράγματος για το $\bar{\alpha}$: θέτοντας $\theta = 0.25$ και $\sigma = 0$ στο Λήμμα αυτό, έχουμε $\frac{\mu}{8\|\Delta x \cdot \Delta s\|} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2^2 [1-0.25]} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \geq \frac{0.16}{n} \Rightarrow \bar{\alpha} \geq \min\{\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{0.16}{n}}\} = \frac{0.4}{\sqrt{n}}$

Επειδή τα βήματα πρόβλεψης λαμβάνονται επί επαναλήψεων άρτιου δεί-κτη, το φράγμα αυτό συνεπάγεται ότι $\mu_{k+1} \leq (1 - \frac{0.4}{\sqrt{n}}) \cdot \mu_k, k=0, 2, 4, \dots$ (1.25)

ΛΗΜΜΑ 5. Ας υποθέσουμε ότι $(x, \lambda, s)^T \in V_2^{\theta=0.5}$ και ότι $(\Delta x, \Delta \lambda, \Delta s)^T$ είναι το αποτέλεσμα της (1.12) για $\sigma = 1$. Τότε $(x(1), \lambda(1), s(1))^T \in V_2^{\theta=0.25}$ και $\mu(1) = 1$.

Όσον αφορά στην πολυπλοκότητα του Αλγορίθμου, το Λήμ-μα 2 και η ανισότητα συνδυάζονται και δίνουν το:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. Δοθέντος $\varepsilon > 0$, ας υποθέσουμε ότι το σημείο εκκί-νησης $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T \in V_2^{\theta=0.25}$ είναι τέτοιο ώστε $\mu_0 \leq \frac{1}{\varepsilon}$ για κάποια θετική σταθερά c . Τότε, υπάρχει ένας δείκτης $K = O(\sqrt{n} \cdot \ln(\frac{1}{\varepsilon}))$ τέτοιος ώστε: $\mu_k \leq \varepsilon \quad \forall k \geq K$.

3.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (LRF)

Με δεδομένα τα μεγέθη $\gamma, \sigma_{min}, \sigma_{max}$ (με $\gamma \in]0, 1[$ και $0 < \sigma_{min} < \sigma_{max} < 1$) και $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T \in V_{-\infty}$,

για κάθε $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

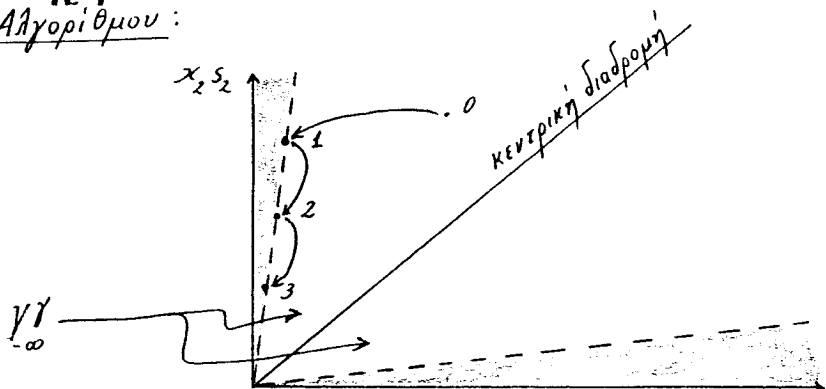
να επιλεγεί $\sigma_{\kappa} \in [\sigma_{min}, \sigma_{max}]$

να επιλυθεί ως προς $(\Delta x^{(\kappa)}, \Delta \lambda^{(\kappa)}, \Delta s^{(\kappa)})^T$ η (1.13)

να επιλεγεί το α_{κ} ως η μέγιστη μεταξύ των τιμών $\alpha \in [0, 1]$ οι οποίες είναι τέτοιες ώστε $(x^{(\kappa)}(\alpha), \lambda^{(\kappa)}(\alpha), s^{(\kappa)}(\alpha))^T \in V_{-\infty}$

να τεθεί $(x^{(\kappa+1)}, \lambda^{(\kappa+1)}, s^{(\kappa+1)})^T := (x^{(\kappa)}(\alpha_{\kappa}), \lambda^{(\kappa)}(\alpha_{\kappa}), s^{(\kappa)}(\alpha_{\kappa}))^T$
τέλος (του για κάθε).

Παρατηρήσεις. (i). Σχηματική αναπαράσταση της συμπεριφοράς των επαναλήψεων του Αλγορίθμου:



(ii). Για μικρές τιμές της παραμέτρου $\gamma \in]0, 1[$ (π.χ. για $\gamma = 10^{-3}$) η περιοχή $V_{-\infty}$ καταλαμβάνει μέγα μέρος της γνησίως εφικτής περιοχής F^0 .

(iii). Η μέθοδος ξεκινά από ένα σημείο $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T \in V_{-\infty}$ και σε κάθε επανάληψη ορίζει και χρησιμοποιεί νέες τιμές:

$$\alpha_{\kappa} \text{ και } \sigma_{\kappa}$$

έτσι ώστε η εκάστοτε παράμετρος επικέντρωσης σ_{κ} να ικανοποιεί την ανισότητα $0 < \sigma_{min} \leq \sigma_{\kappa} \leq \sigma_{max} < 1$ (για κάποιες ελ' αρχής δεδομένες σταθερές τιμές σ_{min} και σ_{max}), ενώ το μήκος α_{κ} του εκάστοτε βήματος να είναι το μεγαλύτερο δυνατόν (κάτω από την προϋπόθεση της παραμονής του αντίστοιχου επαναληπτικού σημείου $(x^{(\kappa)}, \lambda^{(\kappa)}, s^{(\kappa)})^T$ στο εσωτερικό της περιοχής $V_{-\infty}$). Ουστοσο, όπως θα δούμε σε λίγο, οι παράμετροι $\alpha_{\kappa}, \sigma_{\kappa}$ (και γ) πρέπει να συνδέονται με την σχέση:

$$\alpha_{\kappa} \geq 2^{\frac{3}{2}} \cdot \sigma_{\kappa} \cdot \frac{\eta}{\gamma} \cdot \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$$

(iv). Η θεώρηση του κάτω φράγματος σ_{κ} εξασφαλίζει ότι μικρά βήματα αναδίηξης βελτιώνουν την επικέντρωση.

(v). Μεγαλύτερες τιμές από τις θεωρηθίσεις για την παράμετρο α , θα οδηγούσαν στο εξωτερικό της περιοχής, αφού, τότε, το σφάλμα της προσέγγισης της λύσης του συστήματος (1.9) γίνεται μεγαλύτερο όσο το α αυξάνει.

(vi). Η σηματική αναπαράσταση των περιοχών V^0 και $V_{-\infty}$ στις αντίστοιχες αναπαραστάσεις των Αλγορίθμων (SPF), (PC) και (LRF) φαίνεται να ταυτίζει αυτά τα δύο είδη περιοχών. Τούτο είναι αληθές για την περίπτωση $n=2$. Όμως, γενικά, οι αναπαραστάσεις των δύο περιοχών διαφέρουν ριζικά όταν $n=3$.

Ανάλυση του Αλγορίθμου:

ΛΗΜΜΑ 6. Εάν $(x, \lambda, s) \in V_{-\infty}$, τότε έχουμε:

$$\|\Delta x \cdot \Delta s \cdot \mathbf{1}\| \leq 2^{-3/2} \cdot (1 + \frac{1}{\gamma}) \cdot \eta \cdot \mu \quad \blacksquare$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. Για δεδομένες τις τιμές των παραμέτρων γ, σ_{min} και σ_{max} ,

(α). ισχύει $(x^{(\kappa)}(\alpha), \lambda^{(\kappa)}(\alpha), s^{(\kappa)}(\alpha))^T \in V_{-\infty}$ για κάθε $\alpha \in [0, 2^{\frac{3}{2}} \cdot \sigma_{\kappa} \cdot \frac{\eta}{\gamma} \cdot \frac{1-\gamma}{1+\gamma}]$,

(β). $\alpha_{\kappa} \geq 2^{\frac{3}{2}} \cdot \sigma_{\kappa} \cdot \frac{\eta}{\gamma} \cdot \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$, $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

(γ). υπάρχει μια σταθερά δ , ανεξάρτητη του η , τέτοια ώστε:

$$\mu_{\kappa+1} \leq (1 - \frac{\delta}{\eta}) \cdot \mu_{\kappa}, \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

η σταθερά δ δίνεται από τον τύπο:

$$\delta = 2^{\frac{3}{2}} \cdot \gamma \cdot \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \cdot \min\{\sigma_{min}(1-\sigma_{min}), \sigma_{max}(1-\sigma_{max})\} \quad \blacksquare$$

Από το Θεώρημα 3 (γ) και από το Λήμμα 2, έπεται ομίσως το ακόλουθο αποτέλεσμα πολυπλοκότητας:

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $\gamma \in]0, 1[$. Αν υποθέσουμε ότι το αρχικό σημείο $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T$ έχει επιλεγεί έτσι ώστε να έχουμε:

$$\mu_0 \leq \frac{1}{\varepsilon^c}$$

για κάποια θετική σταθερά c . Τότε, υπάρχει ένας δείκτης $K = O(n \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon})$ τέτοιος ώστε:

$$\mu_{\kappa} \leq \varepsilon \quad \forall \kappa \geq K \quad \blacksquare$$

4. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ (PR)

Με δεδομένα το σημείο $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T \in F^0$ και τον αριθμό $\rho > n$,
για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$
να τεθεί $\sigma_k := \frac{n}{\rho}$ και να επιλυθεί ως προς $(\Delta x^{(k)}, \Delta \lambda^{(k)}, \Delta s^{(k)})^T$ η (1.13)*
να υπολογισθεί ο αριθμός:

$$a_{max}^{(k)} := \sup \{ a \in [0, 1] : (x^{(k)}, s^{(k)}) + a \cdot (\Delta x^{(k)}, \Delta s^{(k)}) \geq 0 \}$$
να επιλεγεί το μήκος a_k του βήματος σύμφωνα με τον τύπο:

$$a_k := \inf \{ \varphi_\rho(x^{(k)} + \alpha \cdot \Delta x^{(k)}, s^{(k)} + \alpha \cdot \Delta s^{(k)}) : \alpha \in]0, a_{max}^{(k)}[\}$$
να τεθεί $(x^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}, s^{(k+1)})^T := (x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)}) + a_k \cdot (\Delta x^{(k)}, \Delta \lambda^{(k)}, \Delta s^{(k)})$.
τέλος (του για κάθε).

Ανάλυση του Αλγορίθμου: Πρόκειται, σαφώς, για μία ειδική περίπτωση μεθόδου της οποίας η διαμόρφωση συμβαδίζει προς το Γενικό Πλαίσιο Εργασίας ενός Αρχικό-Δυϊκού Αλγορίθμου.

Ο συγκεκριμένος Αλγόριθμος επιλέγει (σε κάθε επανάληψή του) την σταθερή τιμή $\sigma_k = \frac{n}{\rho}$ ως τιμή της παραμέτρου εσικέντρωσης (με $\rho > n$). Το μήκος a_k του εκάστοτε επαναληπτικού βήματος επιλέγεται με σκοπό την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης:

$$\varphi_\rho(x, s) = \rho \cdot \ln(x^T s) - \sum_{i=1}^n x_i s_i = (\rho - n) \cdot \ln(x^T s) + \varphi_n(x, s) = (\rho - n) \cdot \ln(x^T s) - \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i s_i}{(x^T s / n)} + n \ln n \quad (1.26)$$

κατά μήκος της (ήδη) υπολογισθείσας διεύθυνσης αναζήτησης, έτσι ώστε η $(k+1)$ -επανάληψη του Αλγορίθμου να διατηρήσει το παραγόμενο σημείο της μέσα στην γνησίως εφικτή περιοχή.

Η Ανάλυση που θα ακολουθήσει αποσκοπεί στο να δείξει ότι οι επιλογές του Αλγορίθμου είναι τέτοιες που εξαναγκάζουν την συνάρτηση δυναμικού φ_ρ να ελαττώνεται κατά τουλάχιστον ένα σταθερό μέρος (συγκεκριμένα, κατά 0.15 μονάδες) σε κάθε επανάληψη του Αλγορίθμου. (Στην πραγματικότητα, οι προταθείσες επιλογές των παραμέτρων σ_k και a_k του Αλγορίθμου δεν είναι τόσο πρακτικές. Εν τούτοις, υπάρχει η δυνατότητα ελεύθερης επιλογής τους (π.χ. το σ_k να εκληφθεί πολύ κονιά στο 0 και το a_k να εκληφθεί πολύ κονιά στο $a_{max}^{(k)}$), αρκεί να παραμένει σε ισχύ η βασική λειτουργική αξίωση του Αλγορίθμου περί της ελάτωσης της συνάρτησης φ_ρ κατά τουλάχιστον ένα σταθερό μέρος της σε κάθε επανάληψή του.)

Η ανάπτυξη της Ανάλυσής μας διαρθρώνεται σε έξι Στάδια. Στο 1^ο Στάδιο, περιγράφεται το σκεπτικό της απόδειξης του ισχυρισμού ότι η συνθήκη $\varphi_\rho(x^{(k)}, s^{(k)}) \xrightarrow{k} -\infty$ εγγυάται την σύγκλιση $\mu_k \rightarrow 0$. Στο 2^ο Στάδιο, αναζητείται μία τριωνυμική εκτίμηση $q(a) = \frac{\rho_2}{2} a^2 + \rho_1 a + \varphi_\rho(x, s)$ της ποσότητας $\varphi_\rho(x + a \Delta x, s + a \Delta s)$, δηλαδή μία τριωνυμική έκφραση του μήκους a του βήματος, η οποία φράσσει εκ των άνω την φ_ρ κατά μήκος της διεύθυνσης αναζήτησης, υπό την έννοια ότι:

$$\varphi_\rho(x + a \Delta x, s + a \Delta s) \leq \frac{\rho_2}{2} a^2 + \rho_1 a + \varphi_\rho(x, s) = q(a),$$
ενώ στο 3^ο Στάδιο δίνονται κάποιες χρήσιμες εκτιμήσεις για τους συντελεστές ρ_2 και ρ_1 αυτής της τριωνυμικής συνάρτησης. Τα δεδομένα που προκύπτουν κατά τα δύο τελευταία Στάδια αξιοποιούνται στο 4^ο, όπου προσδιορίζεται μία τιμή της παραμέτρου a

για την οποία επιτυγχάνεται η ελάττωση κατά τουλάχιστον ένα σταθερό μέρος (συγκεκριμένα, κατά 0.15 μονάδες) του τριωνύμου $g(\alpha)$ και επομένως της συνάρτησης \mathcal{F}_ρ κατά τουλάχιστον το ίδιο μέρος. Συνεχίζοντας, στο Στάδιο 5, εξηγήουμε γιατί, παρά το γεγονός ότι (σε αντίθεση με τους Αλγορίθμους που ακολουθούν την διαδρομή) δεν αξιώνεται όπως τα επαναληπτικά σημεία βρίσκονται κοντά στην κεντρική διαδρομή, η επικέντρωσή τους γύρω και κοντά σ' αυτήν διαδραματίζει έναν πεπλεγμένο και ενδιαφέροντα ρόλο. Τέλος, στο Στάδιο 6, εξετάζουμε την δυνατότητα μιας καλύτερης επιλογής των τιμών των παραμέτρων ρ και α .

(i). Στάδιο 1^ο: "Η διαρκής ελάττωση της \mathcal{F}_ρ συνεπάγεται την σύγκλιση του Αλγορίθμου."

ΛΗΜΜΑ 7. Για κάθε $(x, s) > 0$, ισχύει η ανισότητα $\mathcal{F}_n(x, s) \geq n \cdot \ln n$. Η ισότητα ισχύει όταν $x \cdot s \cdot \mathbf{1} = \mu \cdot \mathbf{1}$.
 (Πράγματι, από τον συνδυασμό της (1.26) και του γεγονότος ότι $\ln(1+\nu) \leq \nu \quad \forall \nu > -1$, έπεται ότι $\mathcal{F}_n(x, s) - n \cdot \ln n = -\sum_{i=1}^n \ln \left[\frac{x_i s_i}{x^T s / n} \right] \geq -\sum_{i=1}^n \left[\frac{x_i s_i}{\mu} - 1 \right] = -(n-n) = 0$. Εξ άλλου, επειδή η παραπάνω ανισότητα $\ln(1+\nu) \leq \nu$ εκυλιδίζεται σε ισότητα μόνον όταν $\nu=0$, η προηγούμενη αλυσίδα σχέσεων εκυλιδίζεται σε αλυσίδα ισότητων μόνον όταν $\frac{x_i s_i}{\mu} = 1$ για κάθε $i=1, 2, \dots, n$.) ■

ΛΗΜΜΑ 8. Η συνάρτηση δυναμικού \mathcal{F}_ρ είναι μη γραμμική εκ των κάτω μέσα στο θετικό τεταρτημόριο $\{(x, s) \in \mathbb{R}^{2n} : x > 0, s > 0\}$.
 (Πράγματι, για κάθε $\mu > 0$, υπάρχει ένα γνήσιως εφικτό σημείο $(x_\mu, \lambda_\mu, s_\mu)^T$ τέτοιο ώστε $(x_\mu)_i (s_\mu)_i = \mu \quad (i=1, 2, \dots, n)$. Αντικαθιστώντας αυτό το σημείο μέσα στην (1.26), λαμβάνουμε $\mathcal{F}_\rho(x_\mu, s_\mu) = (\rho-n) \cdot \ln(x_\mu^T s_\mu) + \mathcal{F}_n(x_\mu, s_\mu) = (\rho-n) \cdot \ln(n\mu) + n \cdot \ln n$. Η τελευταία έκφραση τείνει προς το $-\infty$ όταν το $\mu \rightarrow 0$.) ■

ΛΗΜΜΑ 9. Για κάθε $(x, \lambda, s) \in \mathcal{F}$, ισχύει η ανισότητα $\mu \leq \exp[\mathcal{F}_\rho(x, s) / (\rho-n)]$.
 (Πράγματι, από τον συνδυασμό της (1.26) και του Λήμματος 7, έχουμε $\mathcal{F}_\rho(x, s) = (\rho-n) \cdot \ln(x^T s) + \mathcal{F}_n(x, s) \geq (\rho-n) \cdot \ln \mu + (\rho-n) \cdot \ln n + n \cdot \ln n \geq (\rho-n) \cdot \ln \mu$) ■

Από το τελευταίο Λήμμα έπεται ότι "εάν κατορθώσουμε να παράξουμε μία ακολουθία επαναληπτικών σημείων $(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)}) \in \mathcal{F}^0$ τέτοιων ώστε να ισχύει $\mathcal{F}_\rho(x^{(k)}, s^{(k)}) \rightarrow -\infty$, τότε τα αντίστοιχα μέτρα δικιότητας μ_k των σημείων αυτών θα τείνουν προς το 0."

Στην συνέχεια της Ανάλυσης μας, θα δείξουμε ότι η \mathcal{F}_ρ ελαττώνεται κατά τουλάχιστον ένα σταθερό μέρος $\delta > 0$, ανεξάρτητο του n , σε κάθε επανάληψη του Αλγορίθμου (PR). Με άλλα λόγια, θα δείξουμε ότι:

$$\mathcal{F}_\rho(x^{(k+1)}, s^{(k+1)}) \leq \mathcal{F}_\rho(x^{(k)}, s^{(k)}) - \delta \quad \text{για κάθε } k=0, 1, 2, \dots \quad (1.27)$$

Εν τω μεταξύ, ας δώσουμε το επόμενο γενικό αποτέλεσμα πολυπλοκότητας το οποίο ισχύει για όλους τους αλγορίθμους που επιτυγχάνουν την μείωση (1.27).

ΘΕΩΡΗΜΑ 4. Δοθέντος ενός σημείου εκκίνησης $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T \in \mathcal{F}^0$, ας υποθέσουμε ότι ένας αλγόριθμος παράγει μία ακολουθία σημείων $(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T \in \mathcal{F}^0$ που ικανοποιούν την (1.27) για κάποιο $\delta > 0$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας δείκτης $K = \left\lceil \frac{\mathcal{F}_\rho(x^{(0)}, s^{(0)}) + \rho - n}{\delta} + \frac{\rho - n}{\delta} \cdot |\ln \varepsilon| \right\rceil$ τέτοιος ώστε $\mu_k \leq \varepsilon$ για κάθε $k \geq K$.

(Πράγματι, λογαριθμίζοντας την ανισότητα του Λήμματος 9, βλέπουμε ότι η ανισότητα $\mu_k \leq \varepsilon$ ($k \geq K = \left\lceil \frac{\mathcal{F}_\rho(x^{(0)}, s^{(0)}) + \rho - n}{\delta} + \frac{\rho - n}{\delta} \cdot |\ln \varepsilon| \right\rceil$) είναι συνέπεια της ανισότητας $\mathcal{F}_\rho(x^{(k)}, s^{(k)}) \leq (\rho-n) \cdot \ln \varepsilon = -(\rho-n) \cdot |\ln \varepsilon|$. Η τελευταία αυτή ανισότητα ισχύει, αφού, λόγω της (1.27), έχουμε:

$$\mathcal{F}_\rho(x^{(k)}, s^{(k)}) \leq \mathcal{F}_\rho(x^{(0)}, s^{(0)}) - k \cdot \delta, \quad k=1, 2, \dots$$

και, αψ'ετέρου, από τον ορισμό του δείκτη $K = \left\lceil \frac{\mathcal{F}_\rho(x^{(0)}, s^{(0)}) + \rho - n}{\delta} + \frac{\rho - n}{\delta} \cdot |\ln \varepsilon| \right\rceil \geq 0$, είναι

$$\mathcal{F}_\rho(x^{(0)}, s^{(0)}) - k \delta \leq (\rho-n) \cdot |\ln \varepsilon|. \quad \blacksquare$$

(ii). Στάδιο 2^ο : "Μία τριωνυμική εκτίμηση της \mathcal{F}_0 (κατά μήκος μίας εφικτής διεύθυνσης)

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στο Στάδιο αυτό θα επιδιώξουμε να βρούμε μία τριωνυμική συνάρτηση $q(a)$ που δίνει ένα άνω γράμμα της \mathcal{F}_0 (σαν συνάρτηση του μήκους a του βήματος μίας επανάληψης), κατά μήκος της διεύθυνσης αναζήτησης. Αν και η εν λόγω προσέγγιση ισχύει μόνον μέσα σ' ένα υποσύνολο του διαστήματος $]0, a_{max}^{(k)}[$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδοση μίας ικανοποιητικής εκτίμησης της ελάττωσης που υφίσταται η \mathcal{F}_0 κατά την διάρκεια μίας επανάληψης.

Ενδιαφερόμαστε κυρίως για τις διευθύνσεις αναζήτησης του Αλγορίθμου (PR). Όμως, το σκεπτικό που αναπτύσσουμε επεκτείνεται σε οποιαδήποτε διεύθυνση αναζήτησης $(\Delta x, \Delta s)$ που εξετάζεται μέσα στο εφικτό σύνολο του αρχικο-δυναμικού προβλήματος ως προς τις ισότητες (1.5a) και (1.5b), υπό την έννοια ότι η διεύθυνση αναζήτησης σέβεται τις σχέσεις:

$$A \cdot \Delta x = 0 \quad \text{και} \quad A^T \cdot \Delta \lambda + \Delta s = 0. \quad (1.28)$$

Οι σχέσεις αυτές συνεπάγονται ότι:

$$\Delta s^T \cdot \Delta x = - \Delta x^T \cdot A^T \cdot \Delta \lambda = - (A \Delta x)^T \cdot \Delta \lambda = 0. \quad (1.29)$$

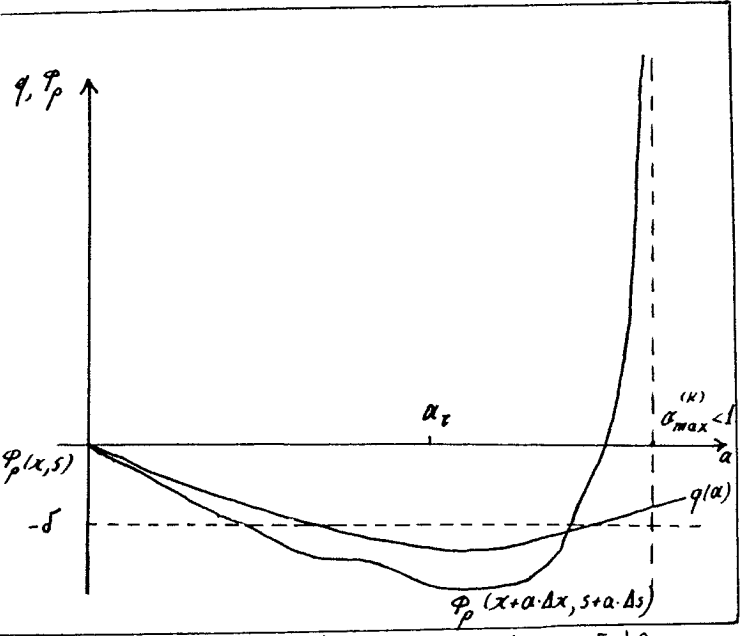
Επειδή $a \in]0, a_{max}^{(k)}[$ και $a_{max}^{(k)} = \sup \{ a \in]0, 1[: (x, s)^T + a \cdot (\Delta x, \Delta s)^T \geq 0 \}$, η γραμμή αναζήτησης παραμένει μέσα στην γνησίως εφικτή περιοχή. (Η τριωνυμική εκτίμηση που θα προσδιορίσουμε θα ισχύει μέσα στο μικρότερο διάστημα $]0, a_z[$, όπου:

$$a_z = \frac{1}{\max \{ \|x^{-1} \Delta x\|, \|s^{-1} \Delta s\| \}} \quad (1.30)$$

τ είναι μία σταθερά του διαστήματος $]0, 1[$ που θα δοθεί αργότερα.)

Ας δώσουμε τώρα την έκφραση του ζητούμενου τριωνύμου. Από την (1.29) και τον ορισμό της \mathcal{F}_0 , βλέπουμε ότι, για κάθε $a \in]0, a_z[$, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0(x+a \cdot \Delta x, s+a \cdot \Delta s) - \mathcal{F}_0(x, s) &= \rho \cdot \ln \left[\frac{(x+a \cdot \Delta x)^T \cdot (s+a \cdot \Delta s)}{x^T \cdot s} \right] - \sum_{i=1}^n \ln \left[\frac{x_i + a \cdot \Delta x_i}{x_i} \right] - \sum_{i=1}^n \ln \left[\frac{s_i + a \cdot \Delta s_i}{s_i} \right] \\ &= \rho \cdot \ln \left[1 + a \cdot \frac{s^T \Delta x + x^T \Delta s}{x^T \cdot s} \right] - \sum_{i=1}^n \ln \left[1 + a \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i} \right] - \sum_{i=1}^n \ln \left[1 + a \cdot \frac{\Delta s_i}{s_i} \right] \\ &\leq \rho \cdot a \cdot \frac{s^T \Delta x + x^T \Delta s}{x^T \cdot s} - a \cdot \mathbf{1}^T \cdot (X^{-1} \Delta x + S^{-1} \Delta s) + \frac{a^2}{2(1-\tau)} \cdot (\|X^{-1} \Delta x\|^2 + \|S^{-1} \Delta s\|^2) \\ &\quad \left(\text{γιατί } \ln(1+\theta) \leq \theta \quad \forall \theta > -1 \text{ και γιατί } -\sum_{i=1}^n \ln(1+t_i) \leq -\mathbf{1}^T \cdot t + \frac{\|t\|^2}{2(1-\tau)} \quad \forall t \in \mathbb{R}^n \text{ με } \|t\| \leq \tau \right) \\ &= a \cdot g_1 + \frac{a^2}{2} \cdot g_2, \quad \forall a \in]0, a_z[\quad (=]0, a_{max}^{(k)}[) \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mathcal{F}_0(x+a \cdot \Delta x, s+a \cdot \Delta s) &\leq \frac{g_2}{2} \cdot a^2 + g_1 \cdot a + \mathcal{F}_0(x, s) =: q(a) \quad \forall a \in]0, a_z[\\ \text{όπου } g_1 &:= \rho \cdot \frac{s^T \Delta x + x^T \Delta s}{x^T \cdot s} - \mathbf{1}^T \cdot (X^{-1} \Delta x + S^{-1} \Delta s) \\ g_2 &:= \frac{1}{1-\tau} \cdot (\|X^{-1} \Delta x\|^2 + \|S^{-1} \Delta s\|^2). \end{aligned} \right. \quad (1.31)$$

Η Ζητούμενη τριωνυμική συνάρτηση είναι η συνάρτηση $q(a)$ του τύπου (1.31). Η γραφική συσχέτιση μεταξύ των συναρτήσεων \mathcal{F}_0 και $q(a)$ φαίνεται στο παράπλευρο Σχήμα. Το τριώνυμο $q(a)$ είναι ένα άνω γράμμα της $\mathcal{F}_0(x+a \cdot \Delta x, s+a \cdot \Delta s)$ όταν $a \leq a_z$. Όταν $a_{max}^{(k)} < 1$, η γραμμή της διεύθυνσης αναζήτησης προσεγγίζει το σύνολο του εφικτού συνόλου F καθώς $a \nearrow a_{max}^{(k)}$, εξαναγκάζοντας την συνάρτηση δυναμικού \mathcal{F}_0 να προσεγγίσει το $+\infty$. Επιπλέον, οι συναρτήσεις $q(a)$ και \mathcal{F}_0 διασταυρώνονται σε κάποιο σημείο του διαστήματος $]a_z, a_{max}^{(k)}[$. Από την άλλη πλευρά, όταν $a_{max}^{(k)} = 1$, η γραμμή της διεύθυνσης αναζήτησης παραμένει μέσα στο γνησίως εφικτό σύνολο F^0 για κάθε $a \in]0, 1[$, με αποτέλεσμα το παράπλευρο Σχήμα να μην ανταποκρίνεται στην περίπτωση αυτή. (Παρατηρήστε, τέλος, πως, επειδή $g_2 > 0$, το γράφημα της $q(a)$ είναι μία κυρτή παραβολή, όπως δίνεται στο Σχήμα.)

* Επειδή $a \in]0, a_z[\subset]0, a_{max}^{(k)}[$ τα ορίσματα όλων των λογαριθμικών όρων είναι γνησίως θετικά.

(iii). Στάδιο 3: "Τράγματα των συντελεστών της τριωνυμικής εκτίμησης της \mathcal{F}_ρ "

Θα δώσουμε τώρα αναλυτικότερα τις εκφράσεις g_1 και g_2 των συντελεστών του τριωνύμου $g(\alpha)$, περιορισμένοι στην διεύθυνση αναζήτησης $(\Delta x, \Delta \lambda, \Delta s)^T$ που υιοθετείται από τον Αλγόριθμο (PR) και ικανοποιεί την εξίσωση:

$$S \cdot \Delta x + X \cdot \Delta s = -X \cdot S \cdot \mathbf{1} + \frac{\rho}{\rho} \cdot \mu \cdot \mathbf{1} \quad (1.32)$$

όπως επίσης και τις συνθήκες (1.28). Καθώς η διαχείριση των απαιτούμενων αποδεικτικών στοιχείων είναι καθαρά τεχνική, θα αποφύγουμε τις λεπτομέρειες, αρκούμενοι μόνον στην τελική παράθεση των βασικών αποτελεσμάτων που θα χρειασθούν στην συνέχεια.
Δοθέντος ενός οποιουδήποτε σημείου $(x, \lambda, s)^T \in \mathcal{F}^0$, ορίζουμε τα μεγέθη:

$$\left\{ \begin{aligned} V &:= (X \cdot S)^{1/2}, \quad v := V \cdot \mathbf{1} = \left((x_1 s_1)^{1/2}, \dots, (x_n s_n)^{1/2} \right), \\ v_{\min} &:= \min\{v_1, \dots, v_n\} \quad r := -v + \frac{\rho}{\rho} \cdot \mu \cdot V^{-1} \cdot \mathbf{1} \quad \text{και} \quad D = X^{1/2} \cdot S^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

Λόγω της (1.32), ισχύει $r = D^{-1} \cdot \Delta x + D \cdot \Delta s$. Επειδή, σύμφωνα με την (1.29), έχουμε $\Delta x^T \cdot \Delta s = 0$,

$$\|r\|^2 = \|D^{-1} \cdot \Delta x\|^2 + \|D \cdot \Delta s\|^2 \quad (1.34)$$

(και, ειδικότερα, ότι:

$$\|D^{-1} \cdot \Delta x\| \leq \|r\| \quad \text{και} \quad \|D \cdot \Delta s\| \leq \|r\|).$$

Ομως, καθώς $X = V \cdot D$ και $S = V \cdot D^{-1}$, από την (1.34) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \|X^{-1} \cdot \Delta x\|^2 + \|S^{-1} \cdot \Delta s\|^2 &= \|V^{-1} \cdot D^{-1} \cdot \Delta x\|^2 + \|V^{-1} \cdot D \cdot \Delta s\|^2 \\ &\leq \|V^{-1}\|^2 \cdot (\|D^{-1} \cdot \Delta x\|^2 + \|D \cdot \Delta s\|^2) \Rightarrow \\ \|X^{-1} \cdot \Delta x\|^2 + \|S^{-1} \cdot \Delta s\|^2 &\leq \frac{1}{v_{\min}^2} \cdot \|r\|^2 \end{aligned} \quad (1.35)$$

απ' όπου, λόγω του ορισμού (1.31) του συντελεστή g_2 , συνεπάγεται ότι:

$$\boxed{g_2 \leq \frac{1}{1-\tau} \cdot \frac{\|r\|^2}{v_{\min}^2}} \quad (1.36)$$

Εξ άλλου, όσον αφορά σε μία εκτίμηση του γραμμικού συντελεστή g_1 στην έκφραση (1.31) της τριωνυμικής εκτίμησης $g(\alpha)$ της συνάρτησης \mathcal{F}_ρ , παρατηρώντας ότι $S \cdot \Delta x + X \cdot \Delta s = V \cdot r$ καθώς και ότι $X^{-1} \cdot \Delta x + S^{-1} \cdot \Delta s = V^{-1} \cdot r$, έχουμε:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{\rho}{x^T s} \cdot \mathbf{1}^T \cdot (S \cdot \Delta x + X \cdot \Delta s) - \mathbf{1}^T \cdot (X^{-1} \cdot \Delta x + S^{-1} \cdot \Delta s) \\ &= \frac{\rho}{x^T s} \cdot \mathbf{1}^T \cdot V \cdot r - \mathbf{1}^T \cdot V^{-1} \cdot r \\ &= -\frac{\rho}{n \cdot \mu} \cdot \left[-v + \frac{\rho}{\rho} \cdot \mu \cdot V^{-1} \cdot \mathbf{1} \right]^T \cdot r \\ &= -\frac{\rho}{n \cdot \mu} \cdot r^T \cdot r \Rightarrow \\ &\boxed{g_1 = -\frac{\rho}{n \cdot \mu} \cdot \|r\|^2} \quad (1.37) \end{aligned}$$

Οι δύο τύποι (1.36) και (1.37) είναι οι ζητούμενοι και δίνουν δύο γράγματα των συντελεστών g_1 και g_2 συναρτήσει της ποσότητας $\|r\|^2$. (Παρατηρούμε πως όταν $r \neq 0$, τότε $g_1 < 0$. Όπως θα δούμε στο επόμενο Στάδιο, και συγκεκριμένα στο Λήμμα 10, όταν $\rho > n + \sqrt{n}$, τότε $r \neq 0$.)

(iv). Στάδιο 4^ο: "Μία τιμή της παραμέτρου α_z για την οποία επιτυγχάνεται η ελάττωση (1.27) της \mathcal{F}_ρ "

Είμαστε τώρα σε θέση να εγγυηθούμε μία αξιοσημείωτη ελάττωση της \mathcal{F}_ρ κατά μήκος της διεύθυνσης αναζήτησης, αποδεικνύοντας ότι η ελάχιστη τιμή του τριωνύμου $q(\alpha)$ μέσα σε ένα κατάλληλα επιλεγμένο διάστημα $]0, \alpha_z]$ είναι αξιοσημείωτα μικρότερη της τιμής $q(0)$.

Προς τούτο, στο αμέσως επόμενο Λήμμα θα δώσουμε ένα όχι εκφυλισμένο κάτω φράγμα της ποσότητας $\|r\|$. Ακολούθως, θα δούμε πώς το φράγμα αυτό είναι ικανό για να καταστήσει το συντελεστή σ_1 του $q(\alpha)$ αρκετά αρνητικό ούτως ώστε να εξασφαλισθεί η ελάττωση του $q(\alpha)$.

ΛΗΜΜΑ 10. Για κάθε σημείο $(x, \lambda, s)^T \in \mathcal{F}^0$ και για κάθε αριθμό $\rho > n + \sqrt{n}$, ισχύει η ανισότητα $\|r\| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{n \cdot \mu}{\rho}$.

(Πράγματι, έχουμε $\frac{\rho^2}{n^2 \mu^2} \cdot \|r\|^2 = \left\| \frac{\rho}{n \cdot \mu} \cdot v - V^{-1} \cdot \mathbf{1} \right\|^2 = (V^{-1} \cdot \mathbf{1})^T (V^{-1} \cdot \mathbf{1}) - 2 \cdot \frac{\rho}{n \cdot \mu} \cdot v^T \cdot V^{-1} \cdot \mathbf{1} + \frac{\rho^2}{n^2 \mu^2} \cdot v^T \cdot v = (V^{-1} \cdot \mathbf{1})^T (V^{-1} \cdot \mathbf{1}) - 2 \cdot \frac{\rho}{\mu} + \frac{\rho^2}{n \cdot \mu}$
 $= (V^{-1} \cdot \mathbf{1})^T (V^{-1} \cdot \mathbf{1}) + \frac{\rho^2 - 2n \cdot \mu + n^2 - n}{n \cdot \mu} + \frac{n^2 - n}{n \cdot \mu} = (V^{-1} \cdot \mathbf{1})^T (V^{-1} \cdot \mathbf{1}) + \frac{(\rho - n - \sqrt{n})^2 + 2 \cdot \sqrt{n} \cdot (\rho - n - \sqrt{n}) + \frac{n^2 - n}{n \cdot \mu}}{n \cdot \mu} \geq (V^{-1} \cdot \mathbf{1})^T (V^{-1} \cdot \mathbf{1}) - \frac{n^2 - n}{n \cdot \mu}$
 $= \left\| V^{-1} \cdot \mathbf{1} - \frac{n + \sqrt{n}}{n \cdot \mu} \cdot v \right\|^2 = \left\| V^{-1} \cdot \mathbf{1} - \frac{1}{\mu} \cdot v \right\|^2 + \left\| \frac{\sqrt{n}}{n \cdot \mu} \cdot v \right\|^2 \geq \left[\frac{1}{v_{\min}} - \frac{1}{\mu} \cdot v_{\min} \right]^2 + \frac{1}{n \cdot \mu^2} \cdot v^T \cdot v = \frac{1}{\mu^2} \cdot \left\{ \left[\frac{\mu}{v_{\min}} - v_{\min} \right]^2 + \mu \right\} = \frac{1}{\mu^2} \cdot \left\{ \left[\frac{\mu}{2v_{\min}} - v_{\min} \right]^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\mu^2}{v_{\min}^2} \right\}$
 $\geq \frac{3}{4 \cdot v_{\min}^2} \Rightarrow \frac{\rho^2}{n^2 \mu^2} \cdot \|r\|^2 \geq \frac{3}{4 \cdot v_{\min}^2} \Rightarrow \|r\| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{n \cdot \mu}{\rho}$) ■

Ας δούμε τώρα για ποιά τιμή της παραμέτρου α_z επιτυγχάνεται μία σταθερή μείωση της τιμής $q(\alpha_z)$ σε σχέση με την τιμή $q(0)$ (και, κατά συνέπεια, μία σταθερή μείωση της \mathcal{F}_ρ κατά μήκος της διεύθυνσης αναζήτησης μέσα στο διάστημα $]0, \alpha_z]$). Έχουμε το εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 5. Έστω $\tau = 0.5$ και $\bar{\alpha} := \frac{v_{\min}}{2 \cdot \|r\|}$. Τότε, $q(\bar{\alpha}) + 0.15 \leq q(0)$ και (άρα) $\mathcal{F}_\rho(x^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}, s^{(k+1)}) + 0.15 \leq \mathcal{F}_\rho(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})$.

(Πράγματι, έχουμε $\bar{\alpha} \leq \alpha_{0.5}$, γιατί $\bar{\alpha} \cdot \|x^{-1} \cdot \Delta x\| \leq \bar{\alpha} \cdot \|x^{-1} \cdot \Delta x\|_2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{v_{\min}}{\|r\|} \cdot \frac{\|r\|}{v_{\min}} = \frac{1}{2} = \tau$ και ομοίως $\bar{\alpha} \cdot \|s^{-1} \cdot \Delta s\| \leq \frac{1}{2} = \tau$. Από τις εκτιμήσεις (1.36) και (1.38), λαμβάνουμε $q(\bar{\alpha}) - q(0) = \bar{\alpha} \cdot \sigma_1 + \frac{1}{2} \cdot \bar{\alpha}^2 \cdot \sigma_2 \leq -\frac{\rho}{n \cdot \mu} \cdot \bar{\alpha} \cdot \|r\|^2 + \frac{1}{2} \cdot \bar{\alpha} \cdot \frac{1}{v_{\min}^2} \cdot \frac{1}{1 - \tau} \cdot \|r\|^2 = -\frac{\rho}{n \cdot \mu} \cdot \frac{v_{\min}}{2} \cdot \|r\| + \frac{1}{8 \cdot (1 - \tau)}$, οπότε, από το Λήμμα 10, προκύπτει $q(\bar{\alpha}) - q(0) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{8 \cdot (1 - \tau)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{8 \cdot (1 - 0.5)} = \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \leq 0.15$. Καί' ακολουθία, σύμφωνα με την (1.31), θα είναι $\min_{\alpha \in]0, \alpha_{\max}^{(k)}} \mathcal{F}_\rho(x + \alpha \cdot \Delta x, s + \alpha \cdot \Delta s) \leq \mathcal{F}_\rho(x + \bar{\alpha} \cdot \Delta x, s + \bar{\alpha} \cdot \Delta s) \leq q(\bar{\alpha}) \leq q(0) - 0.15 = \mathcal{F}_\rho(x^{(k)}, s^{(k)}) - 0.15$ και επομένως $\mathcal{F}_\rho(x^{(k+1)}, s^{(k+1)}) + 0.15 \leq \mathcal{F}_\rho(x^{(k)}, s^{(k)})$.) ■

Η σημασία του Θεωρήματος 5 έγκειται στην επιβεβαίωση της ανισότητας (1.27) για $\delta = 0.15$. Πρέπει να επισημανθεί, όμως, ότι η συγκεκριμένη τιμή του δ δεν είναι τόσο σημαντική, αφού στην πραγματικότητα οι επαναληπτικές τιμές της \mathcal{F}_ρ μειώνονται κατά πολύ περισσότερο. Επί πλέον, όμοια αποτελέσματα σαν αυτό του Θεωρήματος 5 μπορούν να αποδειχθούν και για άλλες τιμές του τ . Ολοκληρώνουμε την ανάλυση του Αλγορίθμου (PR) με μία εξελιγμένη διατύπωση του Θεωρήματος 4 σχετικά με την πολυπλοκότητα του Αλγορίθμου:

ΘΕΩΡΗΜΑ 6. Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $\rho \geq n + \sqrt{n}$. Δοθέντος ενός σημείου εκκίνησης $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)}) \in \mathcal{F}^0$, ας υποθέσουμε ότι: $\mathcal{F}_\rho(x^{(0)}, s^{(0)}) \leq c \cdot (\rho - n) \cdot |\ln \varepsilon|$,

για κάποια σταθερά c ανεξάρτητη του n . Τότε, ο δείκτης K που ορίζεται από:

$$K := \left\lceil \frac{c+1}{0.15} \cdot (\rho - n) \cdot |\ln \varepsilon| \right\rceil = O((\rho - n) \cdot |\ln \varepsilon|)$$

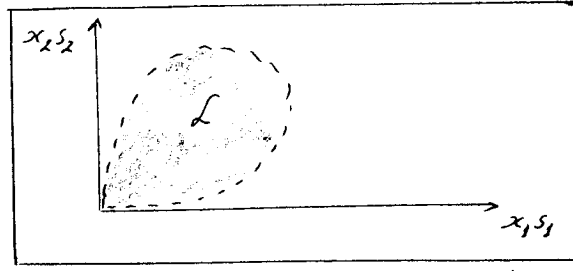
έχει τις δύο ακόλουθες ιδιότητες:

$$(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)}) \in \mathcal{F}^0 \text{ και } \mu_k \leq \varepsilon \text{ για κάθε } k \geq K. \quad \blacksquare$$

(v). Στάδιο 5°: "Περιγραφή της επικέντρωσης των παραγομένων σημείων"

Οι μέθοδοι περιορισμού του δυναμικού παράγουν όμοιες διευθύνσεις αναζήτησης (1.12) με αυτές που παράγονται από τις ακολουθούσες την διαδρομή μεθόδους, χωρίς όμως να αξιωνουν όπως οι επαναλήψεις παραμένουν μέσα σε μία περιοχή της κεντρικής διαδρομής. Παρόλα αυτά, η έννοια της επικέντρωσης εξακολουθεί να διαδραματίζει σημαντικό ρόλο. Έτσι, το μήκος \bar{a} του βήματος τείνει να γίνει μικρότερο όσο το σημείο $(x, \lambda, s)^T$ είναι ασθενέστερα επικεντρωμένο. (Πράγματι, επειδή $\bar{a} = \frac{v_{min}}{2 \cdot \|g\|} \leq \frac{1}{2} \cdot v_{min} \cdot \frac{2 v_{min}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\rho}{n \cdot \mu} = \frac{\rho}{\sqrt{3} n} \cdot \frac{v_{min}^2}{\mu}$, βλέπουμε πως όταν το σημείο $(x, \lambda, s)^T$ είναι τέλεια επικεντρωμένο και συνεπώς, θα ικανοποιεί τις συνθήκες $x_i, s_i = \mu$ για κάθε i ή, ισοδύναμα, την συνθήκη $v_{min}^2 = \mu$, θα έχουμε απλώς $\bar{a} \leq \frac{\rho}{\sqrt{3} n}$, ενώ όταν το σημείο $(x, \lambda, s)^T$ είναι ασθενώς επικεντρωμένο και, συνεπώς, θα ικανοποιεί την συνθήκη $v_{min}^2 \ll \mu$, θα έχουμε $\bar{a} \ll \frac{\rho}{\sqrt{3} n}$ και τότε, ιδιαίτερα, η βέλτιστη επιλογή $\rho = n + \sqrt{n}$ θα υποδηλώνει ότι $\bar{a} \ll 1$. Αλλά, σ' αυτήν την δεύτερη περίπτωση (δηλαδή όταν το $(x, \lambda, s)^T$ είναι ασθενώς επικεντρωμένο), ούτε και οι μεγαλύτερες τιμές του ρ μπορούν να αποτρέψουν το κακό περιπόρευτο του αναγκαστικού σσηματισμού ενός μικρού βήματος. Έτσι, για παράδειγμα, εάν $\rho > 4n$, τότε θα είναι $\frac{\rho^2}{n^2 \mu^2} = (V^{-1} \cdot 1)^T \cdot (V^{-1} \cdot 1) - 2 \cdot \frac{\rho}{\mu} + \frac{\rho^2}{n \mu} \geq \frac{1}{v_{min}^2} + \frac{\rho^2}{2n\mu} \geq \frac{\rho^2}{2n\mu} \Rightarrow \bar{a} = \frac{v_{min}}{2 \cdot \|g\|} \leq \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot \frac{v_{min}}{\sqrt{\mu}}$ και, καθώς η ασθενής επικέντρωση συνεπάγεται ότι $v_{min} \ll \sqrt{\mu}$, θα έχουμε και πάλι $\bar{a} \ll 1$.)

Στην προκειμένη περίπτωση, δεδομένου ότι ο Αλγόριθμος (PR) υποχρεώνει την \mathcal{F}_0 να ελαττώνεται μονότονα προς το $-\infty$, ο αθροιστικός όρος $-\sum \ln(x_i, s_i / \mu)$ στον ώπο της \mathcal{F}_0 αποτρέπει το εδωχόμενο όπως τα επαναληπτικά σημεία καταστούν ασθενώς επικεντρωμένα τουλάχιστον έως ότου το μ γίνει αρκετά μικρό. Εάν $x_j, s_j \ll \mu$ για κάποιο j , τότε ο j -οσός όρος του παραπάνω αθροίσματος συνεισφέρει μία μεγάλη θετική ποσότητα στην τιμή της $\mathcal{F}_0(x, s)$, η οποία μπορεί να εξισορροπισθεί μόνον όταν ο πρώτος όρος $(\rho - n) \cdot \ln(x^T, s)$ στον ώπο της \mathcal{F}_0 είναι αρκετά μεγάλος. Αν γίνουμε λίγο σαφέστεροι επί της τελευταίας αυτής παρατήρησης. Δοθέντος ενός οποιουδήποτε μικρού θετικού αριθμού ϵ , οι επαναλήψεις του Αλγορίθμου (PR) κάποτε εισέρχονται στο σύνολο $\mathcal{L} = \{(x, \lambda, s)^T \in \mathcal{F}^0 : \mathcal{F}_0(x, s) \leq \ln \epsilon + (n-1) \cdot \ln n - 1 - \ln \frac{x_j, s_j}{(x^T, s)^{\rho-n+1}}\}$. Έτσι, για τα σημεία $(x, \lambda, s)^T$ του \mathcal{L}



θα έχουμε: $-\ln \frac{x_j, s_j}{(x^T, s)^{\rho-n+1}} \leq \ln \epsilon \Rightarrow x_j, s_j \geq \frac{(x^T, s)^{\rho-n}}{\epsilon} \cdot x^T, s$, με αποτέλεσμα κάθε κατ' αντιστοιχία γινόμενο x_j, s_j να φράσσεται εκ των κάτω από ένα πολλαπλασιασμό κάποιας θετικής δύναμης του μ . (Στο παράδειγμα Σχήμα, απεικονίζουμε την περιοχή \mathcal{L} στην περίπτωση που $n=2$: σημεία που βρίσκονται κοντά σ' έναν από τους δύο κάθετους άξονες είναι ασθενώς επικεντρωμένα, επειδή τα x_1, s_1 και x_2, s_2 είναι πολύ διαφορετικά μεταξύ τους.)

(vi). Στάδιο 6°: "Περί της αριθμητικά κατάλληλης επιλογής των παραμέτρων ρ και α ."

Το αποτέλεσμα πολυπλοκότητας, που δόθηκε στο Θεώρημα 10, ισχύει για κάθε $\rho \geq n + \sqrt{n}$. Στην πρώτη πλήρη ανάλυση του Αλγορίθμου (PR) των Kojima-Mizuno-Yoshise (το 1991) το ρ ελέγχετο ίσο με $n + \sqrt{n}$. Αυτή η επιλογή αποδίδει την βέλτιστη εκτίμηση πολυπλοκότητας ($O(\sqrt{n} \cdot |\ln \epsilon|)$), όμως, από την άλλη πλευρά δεσμεύει μία χαμηλή επιλογή της παραμέτρου επικέντρωσης $\sigma : \sigma = \frac{n}{\rho} = \frac{n}{n + \sqrt{n}} \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ (για υψηλές τιμές του n). Μικρότερες τιμές του σ επιτυγχάνονται εφ' όσον το ρ επιλεγεί μεγαλύτερο, για παράδειγμα εφ' όσον $\rho = 10n$ ή $\rho = n + n^{1.5}$. Αυτές οι τιμές του ρ επιβαρύνουν την εκτίμηση της πολυπλοκότητας ($O(n \cdot |\ln \epsilon|)$ και $O(n^{1.5} \cdot |\ln \epsilon|)$ αντίστοιχα), όμως προτιμώνται στην πράξη γιατί εξασφαλίζουν καλύτερη αριθμητική επίδοση.

Εξ άλλου, η ελάχιστη τιμή του μήκους α του βήματος είναι δοκιμη κατά την ανάλυση του Αλγορίθμου (PR), αλλά δεν είναι πρακτικά λειτουργική για δύο κυρίως λόγους. Πρώτον, επειδή η \mathcal{F}_0 είναι μη γραμμική, είναι αρκετή η επιλογή μιας κατά προσέγγιση ελάχιστης τιμής, προκειμένου να στοιχειωθεθεί στη πλήρως μία σωστή ανάλυση. Δεύτερον (και κυριώτερο), η ελάχιστη τιμή του α δεν μπορεί (συνήθως) να επιτύχει υψηλή υπολογιστική επίδοση. Έτσι, στην πράξη, προτιμώνται τιμές όπως $0.999 \alpha_{max}^{(k)}$, $0.99 \alpha_{max}^{(k)}$ ή $0.95 \alpha_{max}^{(k)}$ (διατηρώντας όμως την επιψύλαξη της μη επιτυχούς ελάττωσης της \mathcal{F}_0).

Με δεδομένα τα μεγέθη $\gamma, \beta, \sigma_{\min}, \sigma_{\max}$ (με $\gamma \in]0, 1[$, $\beta \geq 1$ και $0 < \sigma_{\min} < \sigma_{\max} < 0.5$),
να επιλεγεί σημείο $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $(x^{(0)}, s^{(0)})^T > 0$.

για κάθε $k=0, 1, 2, \dots$

να επιλεγεί $\sigma_k \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$.

να επιλυθεί ως προς $(\Delta x^{(k)}, \Delta \lambda^{(k)}, \Delta s^{(k)})^T$ η εξίσωση

$$\begin{pmatrix} 0_{n \times n} & A^T & I_{n \times n} \\ A & 0_{m \times m} & 0_{m \times n} \\ s^{(k)} & 0_{n \times n} & x^{(k)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x^{(k)} \\ \Delta \lambda^{(k)} \\ \Delta s^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_b^{(k)} \\ -r_c^{(k)} \\ -x^{(k)} \cdot s^{(k)} \cdot \mathbf{1} + \sigma_k \cdot \mu_k \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

να επιλεγεί το α_k ως η μέγιστη μεταξύ των τιμών $a \in [0, 1]$ οι οποίες είναι τέτοιες ώστε :

$$(x^{(k)}(a), \lambda^{(k)}(a), s^{(k)}(a))^T \in V_{-\infty}^{\gamma, \beta} \quad (1.39)$$

και η ακόλουθη συνθήκη (Armijo) να ικανοποιείται

$$\mu_k(a) \leq (1 - 0.01 a) \cdot \mu_k. \quad (1.40)$$

να τεθεί $(x^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}, s^{(k+1)})^T := (x^{(k)}(\alpha_k), \lambda^{(k)}(\alpha_k), s^{(k)}(\alpha_k))^T$.

τέλος (του για κάθε).

Παρατηρήσεις. (i). Επεξηγηματική απόδοση των νέων συμβολισμών που χρησιμοποιήθηκαν :

(a). Στις σχέσεις (1.22) εισηγάγαμε τα υπόλοιπα:

$$r_b := A \cdot x - b \quad \text{και} \quad r_c := A^T \cdot \lambda + s - c.$$

Όταν τα δύο αυτά διανύσματα (του \mathbb{R}^m και του \mathbb{R}^n , αντιστοίχως) υπολογίζονται στο σημείο $(x, \lambda, s)^T = (x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T$, τότε υιοθετούμε γι'αυτά τους συμβολισμούς $r_b^{(k)}$ και $r_c^{(k)}$, αντιστοίχως.

(b). Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο Αλγόριθμος (IPF) εκτελεί την εργασία του μέσα σε μία ευρύτερη περιοχή $V_{-\infty}^{\gamma, \beta}$ της κεντρικής διαδρομής, η οποία επεκτείνει την περιοχή V^1 και περιλαμβάνει στα εσωτερικά της πολλά μη ερπικά σημεία. Αυτή η περιοχή ορίζεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$V_{-\infty}^{\gamma, \beta} := \left\{ (x, \lambda, s)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : \|(r_b, r_c)^T\| \leq \frac{\beta \cdot \mu}{\mu_0} \cdot \|(r_b^{(0)}, r_c^{(0)})^T\|, (x, s)^T > 0, x_i, s_i \geq \gamma \cdot \mu \ (i=1, 2, \dots, n) \right\}, \quad (1.41)$$

όπου $\gamma \in]0, 1[$ και $\beta \geq 1$ είναι δοθείσες παράμετροι και όπου $r_b^{(0)} = A \cdot x^{(0)} - b$, $r_c^{(0)} = A^T \cdot \lambda^{(0)} + s^{(0)} - c$, $\mu_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{(0)} \cdot s_i^{(0)}}{n}$. (Ας σημειωθεί ότι πρέπει $\beta \geq 1$ προκειμένου να εδασφαλισθεί ότι το σημείο εκκίνησης $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T$ ανήκει στην περιοχή $V_{-\infty}^{\gamma, \beta}$.) Καθώς, για όλα τα σημεία της περιοχής $V_{-\infty}^{\gamma, \beta}$, η ανεπικτικότητα $(r_b, r_c)^T$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη από ένα σταθερό πολλαπλάσιο του μέτρου δικωμάτας μ , είναι σαφές πως, εξαναγκάζοντας τις ποσότητες μ_k να ελαττώνονται απερίορστα και μονότονα προς το μηδέν και περιορίζοντας όλες τις επαναλήψεις $(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T$ μέσα στην περιοχή $V_{-\infty}^{\gamma, \beta}$, ο Αλγόριθμος (IPF) εγγυάται ότι $r_b^{(k)} \rightarrow 0$ και $r_c^{(k)} \rightarrow 0$. Η άλλη συνθήκη $(x_i, s_i \geq \gamma \cdot \mu)$ του ορισμού (1.41) χρησιμοποιείται για την διατήρηση των αντιστοιχών x_i, s_i σε ισορροπία και για την αποφυγή της σπρέλωσης των διευθύνσεων αναζήτησης από τις συνιστώσες του $(x, s)^T$ που πλησιάζουν προς το μηδέν.

(γ). Στην εφικτή περίπτωση (κατά την οποία $(r_b^{(0)}, r_c^{(0)})^T = 0$), όλα τα επαναληπτικά σημεία $(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T$ είναι γνησίως εφικτά. Τότε, ο Αλγόριθμος (IPF) περαιορίζεται απλά σε μία παραλλαγή του Αλγορίθμου (LPF).
 (δ). Όπως στην Ανάλυση του Αλγορίθμου (SPF) (σελ. 17), θέσαμε $(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T := (x, \lambda, s)^T \cdot \alpha \cdot (\Delta x, \Delta \lambda, \Delta s)$ και $\mu^{(k)} := \frac{x^{(k)} \cdot s^{(k)}}{n}$.

Σύγκλιση, Πολυπλοκότητα και Οριακά Σημεία της Παραγόμενης Επαναληπτικής Ακολουθίας

Η σύγκλιση του Αλγορίθμου (IPF) αποδεικνύεται με τον προσδιορισμό μιας σταθεράς $\bar{\alpha}$ τέτοιας ώστε $\alpha_k \geq \bar{\alpha}$ για κάθε k . Επειδή, σύμφωνα με τον Αλγόριθμο, $\mu_{k+1} \leq (1 - 0.01\alpha_k)\mu_k$, θα έχουμε:

$$\mu_{k+1} \leq (1 - 0.01\alpha_k)\mu_k \leq (1 - 0.01\bar{\alpha})\mu_k \quad \text{για κάθε } k \geq 0 \quad (1.42)$$

και επομένως η ακολουθία $(\mu_k : k=0, 1, \dots)$ των δυνάμεων γραμμών θα συγκλίνει Q-γραμμικά προς το μηδέν (υπό την έννοια ότι: $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0$ και $\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} \leq \rho$ για κάποια σταθερά $\rho \in]0, 1[$ και για κάθε $k \geq 0$).

Ακόμη, επειδή $(r_b^{(k)}, r_c^{(k)})^T = (1 - \alpha_{k-1}) \cdot (r_b^{(k-1)}, r_c^{(k-1)})^T = \dots = (1 - \alpha_{k-1}) \dots (1 - \alpha_0) \cdot (r_b^{(0)}, r_c^{(0)})^T = \nu_k \cdot (r_b^{(0)}, r_c^{(0)})^T$, όπου $\nu_k := \prod_{j=0}^{k-1} (1 - \alpha_j)$ και $\nu_0 = 1$, θα έχουμε:

$$\|(r_b^{(k+1)}, r_c^{(k+1)})^T\| \leq \nu_k \cdot \|(r_b^{(0)}, r_c^{(0)})^T\| \leq (1 - \bar{\alpha})^k \cdot \|(r_b^{(0)}, r_c^{(0)})^T\| \quad \text{για κάθε } k \quad (1.43)$$

και επομένως η ακολουθία $(\|(r_b^{(k)}, r_c^{(k)})^T\| : k=0, 1, \dots)$ των μέτρων των υπολοίπων θα συγκλίνει, επίσης προς το μηδέν.

Το ζήτημα του προσδιορισμού μιας σταθεράς $\bar{\alpha}$ τέτοιας ώστε $\alpha_k \geq \bar{\alpha}$ για κάθε k είναι πολύ τεχνικό. Χωρίς να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες, αναφέρουμε μόνον πως, εάν το σημείο εκκίνησης $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T$ έχει επιλεγεί έτσι ώστε:

$$(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T = (\gamma \cdot \mathbf{1}, 0, \gamma \cdot \mathbf{1})^T \quad (1.44)$$

όπου γ είναι μια αριθμητική σταθερά για την οποία ισχύει:

$$\|(x^*, s^*)^T\|_{\infty} \leq \gamma \quad (1) \quad (1.45)$$

για κάποια αρχικο-δουική λύση $(x^*, \lambda^*, s^*)^T$, τότε:

$$\bar{\alpha} = \min \left\{ \frac{n \cdot \sigma_{\min}}{c_2}, \frac{(1-\gamma) \cdot \sigma_{\min}}{c_2}, \frac{0.49n}{c_2}, 1 \right\}, \quad (1.46)$$

$$\text{με } \begin{cases} c_2 = \left[2 \cdot \gamma^{-\frac{1}{2}} \cdot c_1 \cdot \max \{ \|x^0 - x^*\|, \|s^0 - s^*\| \} + n \cdot \gamma^{-\frac{1}{2}} \right]^2 \\ \text{και} \\ c_1 = \frac{1}{\min_{i=1,2,\dots,n} \{ \min \{ x_i^{(0)}, s_i^{(0)} \} \}} \cdot \left[\delta n + n \cdot \frac{b}{\mu_0} \cdot \|(x^{(0)}, s^{(0)})\|_{\infty} \cdot \|(x^*, s^*)\|_1 \right] \end{cases} \quad (2), (3) \quad (1.47)$$

Φυσικά, δεν είναι συνήθως δυνατόν να γνωρίζουμε τρία ποσότητα $\|(x^*, s^*)^T\|_{\infty}$ γιατί δεν μπορούμε αργότερα να γνωρίζουμε τις βέλτιστες λύσεις. Όμως, από υπολογιστικής πλευράς, οι συνθήκες (1.44) και (1.45) δείχνουν επαρκείς, αφού καλά επικεντρωμένα σημεία εκκίνησης, για τα οποία ο λόγος:

$$\frac{\|(r_b^{(0)}, r_c^{(0)})^T\|}{\mu_0} \quad (1.48)$$

είναι μικρός, οδηγούν σε ταχύτερη σύγκλιση, σε σχέση με ασθενώς επικεντρωμένα σημεία που βρίσκονται κοντά στο σύνολο λύσεων. Στην προκειμένη περίπτωση, το σημείο (1.44) ικανοποιεί τα κριτήρια αυτά, επειδή είναι τελείως επικεντρωμένο και ο αντίστοιχος λόγος (1.48) συμπεριφέρεται όπως το $\frac{1}{\gamma}$.

- (1) Ο συμβολισμός $\|\cdot\|_{\infty}$ δηλώνει την ∞ -νόρμα: για $u \in \mathbb{R}^n$, είναι $\|u\|_{\infty} := \max_{i=1,2,\dots,n} |u_i|$.
- (2) Ο συμβολισμός $\|\cdot\|_1$ δηλώνει την 1-νόρμα: για $u \in \mathbb{R}^n$, είναι $\|u\|_1 := \sum_{i=1}^n |u_i|$.
- (3) Ισχύει $\|u\|_{\infty} \leq \|u\| \leq \|u\|_1$, για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$ ($\|\cdot\|$ δηλώνει την Ευκλείδεια νόρμα).

Συναφώς με τα όσα προηγήθηκαν, έχουμε το ακόλουθο συγκεντρωτικό αποτέλεσμα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 7. Εάν το σημείο εκκίνησης $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T$ του Αλγορίθμου (IPF) είναι ένα σημείο της μορφής $(\beta \cdot \mathbf{1}, 0, \beta \cdot \mathbf{1})^T$ με

$\beta \geq \| (x^*, \lambda^*, s^*)^T \|$ για κάποια αρχικοδομική λύση $(x^*, \lambda^*, s^*)^T$, τότε:

- (α) η ακολουθία $(\mu_k : k=0, 1, 2, \dots)$ των δυικών μέτρων που παράγεται από τον Αλγόριθμο συγκλίνει Q-γραμμικά προς το μηδέν,
- (β) η ακολουθία $(\|(\gamma_b^{(k)}, \gamma_c^{(k)})^T\| : k=0, 1, 2, \dots)$ των μέτρων των υπολοίπων συγκλίνει R-γραμμικά⁽¹⁾ προς το μηδέν.

(Η απόδειξη περί της Q-γραμμικής σύγκλισης της ακολουθίας $(\mu_k : k=0, 1, 2, \dots)$ είναι άμεση συνέπεια του συνδυασμού της ανισότητας (1.42) και του γεγονότος ότι ο αριθμός $\bar{\alpha}$ του τύπου (1.46) ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\bar{\alpha} \geq \frac{\beta}{n^2} \tag{1.49}$$

για κάποιον θετικό αριθμό β ανεξάρτητο του n .⁽²⁾ Όταν αφορά στην απόδειξη της R-γραμμικής σύγκλισης της ακολουθίας $(\|(\gamma_b^{(k)}, \gamma_c^{(k)})^T\| : k=0, 1, 2, \dots)$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, σύμφωνα με την (1.41), έχουμε:

$$\|(\gamma_b^{(k)}, \gamma_c^{(k)})^T\| \leq \frac{\beta \mu_k}{\mu_0} \cdot \|(\gamma_b^{(0)}, \gamma_c^{(0)})^T\|$$

και συνεπώς ότι η ακολουθία των μέτρων των υπολοίπων είναι γραμμένη εκ των άνω (: κυριαρχείται) από μία άλλη ακολουθία η οποία είναι Q-γραμμικά συγκλίνουσα. ■

Η πολυωνυμική πολυλοκότητα του Αλγορίθμου (IPF) έπεται από το γεγονός ότι, βάσει της (1.49), το κάτω φράγμα $\bar{\alpha}$ του μήκους των βημάτων είναι μία αντίστροφη πολυωνυμική συνάρτηση του n . Η ακριβής διατύπωση του συναφούς αποτελέσματος έχει ως εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 8. Εστω $\varepsilon > 0$. Ας υποθέσουμε ότι το σημείο εκκίνησης $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, s^{(0)})^T$ του Αλγορίθμου (IPF) είναι ένα σημείο της μορφής $(\beta \cdot \mathbf{1}, 0, \beta \cdot \mathbf{1})^T$ με $\beta \geq \| (x^*, \lambda^*, s^*)^T \|$ για κάποια αρχικοδομική λύση $(x^*, \lambda^*, s^*)^T$. Εάν η τιμή του β είναι τέτοια ώστε:

$$\beta^2 \leq \frac{\sigma}{\varepsilon^2}$$

για κάποιες θετικές σταθερές σ και ε , τότε υπάρχει ένας δείκτης $K = O(n^2 \cdot |\ln \varepsilon|)$ τέτοιος ώστε οι παραγόμενες υπό του Αλγορίθμου (IPF) επαναλήψεις $(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, s^{(k)})^T$ να ικανοποιούν την ανισότητα:

$$\mu_k \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } k \geq K.$$

(1) Λέμε ότι μία ακολουθία $(\beta_k : k=0, 1, 2, \dots)$ συγκλίνει R-γραμμικά προς το μηδέν, εάν κυριαρχείται από μία Q-γραμμικά συγκλίνουσα ακολουθία $(\hat{\beta}_k : k=0, 1, 2, \dots)$ (υπό την έννοια ότι υπάρχει μία ακολουθία $(\delta_k : k=0, 1, 2, \dots)$ τέτοια ώστε: $0 \leq \beta_k \leq \delta_k \cdot \hat{\beta}_k \quad \forall k$ και η $(\delta_k : k=0, 1, \dots)$ συγκλίνει Q-γραμμικά προς το μηδέν).

(2) Η απόδειξη της (1.49) είναι σύνθετη και καθαρά τεχνική.