Μάθημα 5

Υπολογισμός απαλοίφουσας

Ο προσδιορισμός της απαλοίφουσας σε τυχόν πολυωνυμικό σύστημα είναι το πραγματικό ζητούμενο, αφού εκεί το σύνολο των λύσεων μας είναι γενικά άγνωστο. Σε γραμμικά συστήματα είδαμε ότι η απαλοίφουσα είναι ο πίνακας των συντελεστών. Στη γενική περίπτωση αρκούμαστε στον υπολογισμό πολλαπλασίων της, με τη μορφή οριζουσών πινάκων που γενικεύουν τον πίνακα συντελεστών γραμμικού συστήματος και τον πίνακα Sylvester. Έτσι σε αυτά τα πολλαπλάσια υπεισέρχεται ένας *παρασιτικός παράγοντας*.

Επιδιώκουμε συνεπώς να κατασκευάσουμε τετράγωνους πίνακες M για τους οποίους:

(i) η ορίζουσα $\det M$ δεν είναι γενικά μηδέν,

(ii) η ορίζουσα $\det M$ διαιρείται από την απαλοίφουσα, άρα αποτελεί μια αναγκαία συνθήκη ύπαρξης ριζών,

(iii) ο πίνακας M έχει το μικρότερο δυνατό μέγεθος και οι επιπλέον παρασιτικές ρίζες που μηδενίζουν την $\det M$ χωρίς να είναι ρίζες του συστήματος είναι σημειακές δηλ. διάστασης$= 0$ (ειδάλλως απαιτούνται ειδικές επιπρόσθετες πράξεις πινάκων).

Υπάρχουν οι εξής βασικοί τύποι πινάκων για την προσέγγιση της απαλοίφουσας:

Bézout ή Dixon [Dix08, EM00], όπου τα στοιχεία είναι πολυώνυμα ως προς τους συμβολικούς αρχικούς συντελεστές, επομένως έχουν μικρότερο μέγεθος και συχνά λιγότερες εξαιρέσεις.

Sylvester που στην γενική περίπτωση ερευνήθηκε από το [Mac02] για την κλασική απαλοίφουσα και τους [Stu93, Stu94, CLO05] για την αραιή(sparse).

Υβριδικός αποτελεί συνδυασμό των 2 παραπάνω, π.χ. [DD01].

Για τον πίνακα M που υπολογίζεται είναι $\det M = P \cdot R$, όπου $P \in \mathbb{Z}[c_{ij}]$ ο παρασιτικός παράγοντας. Εδώ θα ασχοληθούμε κυρίως με πίνακες τύπου Sylverster.

5.1 Πίνακες τύπου Sylvester

Οι πίνακες τύπου Sylvester κατασκευάζονται εισάγοντας γραμμές που περιέχουν τους συντελεστές των $\underset{\sim}{x}^{\alpha} f_i$ για κάποια μονώνυμα $\underset{\sim}{x}^{\alpha} \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$. Οι στήλες αντιστοιχούν στα μονώνυμα των αντίστοιχων συντελεστών. Έτσι πρόκειται για μια κατασκευή παρόμοια με αυτήν του πίνακα Sylvester με τη διαφορά ότι τώρα δεν έχουμε συγκεκριμένο τρόπο να επιλέξουμε τα μονώνυμα $\underset{\sim}{x}^{\alpha}$. Οι περιορισμοί όμως σε αυτήν την επιλογή(ώστε να έχουμε πίνακα απαλοίφουσας) είναι:

- Πρέπει να υπάρχει η αντίστοιχη στήλη για κάθε μονώνυμο που εμφανίζεται στα $\underset{\sim}{x}^{\alpha} f_i$, ώστε να τοποθετηθεί ο αντίστοιχος συντελεστής σε αυτήν.
- Ο πίνακας που θα προκύψει πρέπει να είναι τετράγωνος, με ορίζουσα όχι ταυτοτικά μηδέν.

Για κάθε επιλογή μονωνύμων που τηρεί τους περιορισμούς αυτούς παίρνουμε έναν πίνακα τύπου Sylvester. Άρα χρειαζόμαστε $n+1$ ομάδες γραμμών, μία ανά πολυώνυμο, και κατ' επέκταση $n+1$ σύνολα μονωνύμων $B_i,\ i = 0, \ldots, n$, όπου τα μονώνυμα του B_i πολλαπλασιάζονται με το f_i και δίνουν $|B_i|$ γραμμές στον πίνακα. Θα συμβολίζουμε την ομάδα γραμμών που περιέχει τους συντελεστές του f_i με $B_i * f_i$. Οι στήλες στον πίνακα αντιστοιχούν στα μονώνυμα C, έτσι ώστε

$$\sum_{i=0}^{n} |B_i| = |C|$$

Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει ότι ο πίνακας είναι τετράγωνος. Τελικά ένας πίνακας τύπου Sylvester έχει τη μορφή

$$M = \begin{bmatrix} B_0 * f_0 \\ \hdashline B_1 * f_1 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline B_n * f_n \end{bmatrix}$$

όπου οι στήλες αντιστοιχούν στα μονώνυμα του συνόλου

$$C = \{\underset{\sim}{x}^{\alpha} \ : \ \text{υπάρχει πολυώνυμο-γραμμή στην οποία εμφανίζεται συντελεστής του } \underset{\sim}{x}^{\alpha}\}$$

Ο πίνακας τύπου Sylvester έχει την γνωστή ιδιότητα πολλαπλασιασμού με διάνυσμα από δεξιά: έστω $\underset{\sim}{v}$ ένα διάνυσμα που περιέχει τις τιμές των μονωνύμων C σε κάποιο $n-$διάστατο σημείο $\underset{\sim}{\xi}$. Τότε $M\underset{\sim}{v}$ εκφράζει τις τιμές των πολυωνύμων των γραμμών στο $\underset{\sim}{\xi}$. Εάν το $\underset{\sim}{\xi}$ είναι κοινή ρίζα των $n+1$ πολυωνύμων, τότε $\underset{\sim}{v}$ ανήκει στον πυρήνα του M.

Λήμμα 5.1. *Έστω τετράγωνος πίνακας M τύπου Sylvester, δηλ. με γραμμές που αντιστοιχούν σε γινόμενα των $n+1$ πολυωνύμων επί μονώνυμα στις n μεταβλητές. Αν υπάρχει $\underset{\sim}{\xi} \in \mathbb{C}^n$ κοινή ρίζα του συστήματος $\{f_i = 0, \ i = 0, \dots, n\}$ τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $\underset{\sim}{v}$ στον πυρήνα $\ker M$. Ισοδύναμα $\det M = 0$.*

Απόδειξη. Κατασκευάζουμε το διάνυσμα $\underset{\sim}{v}$ που περιέχει τις τιμές των μονωνύμων των στηλών στο $\underset{\sim}{\xi}$. Αυτό είναι μη μηδενικό στη γενική περίπτωση. Το γινόμενο $M\underset{\sim}{v}$ περιέχει τις τιμές των πολυωνύμων $\underset{\sim}{x}^{\alpha_i} f_i$ (όπου τα $\underset{\sim}{x}^{\alpha_i}$ είναι τα μονώνυμα του B_i) στο $\underset{\sim}{\xi}$, άρα πρόκειται για το μηδενικό διάνυσμα:

$$M \cdot \underset{\sim}{v} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\xi}^{\alpha_0} f_0(\underset{\sim}{\xi}) \\ \hdashline \underset{\sim}{\xi}^{\alpha_1} f_1(\underset{\sim}{\xi}) \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \underset{\sim}{\xi}^{\alpha_n} f_n(\underset{\sim}{\xi}) \end{bmatrix} = \underset{\sim}{0}$$

τελικά $\underset{\sim}{v} \in \ker M$. □

Ομοίως από αριστερά θεωρούμε πως το $\underset{\sim}{v}^t$ περιέχει τους συντελεστές $n+1$ πολυωνύμων q_i σε αντιστοιχία με τα μονώνυμα B_i. Το $\underset{\sim}{v}^t M$ περιέχει τους συντελεστές του $\sum_{i=0}^{n} f_i q_i$ σε αντιστοιχία με τα μονώνυμα του C.

Αυτή η ιδιότητα φανερώνει μια γενικευμένη δομή Toeplitz. Ο πίνακας τύπου Sylvester περιέχει $n+1$ υποπίνακες με δομή μη-γραμμική Toeplitz, άρα είναι μη-γραμμικός Toeplitz κατά ομάδες γραμμών όπου κάθε ομάδα αντιστοιχεί σε ένα πολυώνυμο, και καλείται quasi-Toeplitz. Παρατηρούμε πως η αντιμετάθεση στηλών (και γραμμών εφόσον δεν παραβιάζεται η ομαδοποίηση) δίνει ένα νέο πίνακα quasi-Toeplitz, με τις ίδιες ιδιότητες.

Πόρισμα 5.1. *Η ορίζουσα $\det M$ διαιρείται από την απαλοίφουσα του συστήματος: $R \big| \det M$.*

Απόδειξη. Αν $R = 0$, υπάρχει κοινή ρίζα, άρα από το προηγούμενο λήμμα $\det M = 0 \Rightarrow R \big| \det M$. □

Παρατηρήστε ότι δε μπορούμε να ισχυριστούμε το αντίστροφο, όπως στην περίπτωση μιας μεταβλητής, λόγω του παρασιτικού παράγοντα.

Γνωρίζοντας ότι η $\det M$ είναι πολλαπλάσιο της απαλοίφουσας, μπορούμε να δώσουμε ένα κάτω φράγμα για τον αριθμό των στηλών που περιέχουν συντελεστές καθενός f_i:

Πόρισμα 5.2. *Είναι $|B_i| \geq \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \deg f_i, \quad i = 0, \dots, n.$*

Απόδειξη. Το $|B_i|$ είναι ο βαθμός της $\det M$ ως προς του συντελεστές του f_i. Άρα

$$|B_i| = \deg_{f_i}[\det M] \geq \deg_{f_i} R \geq \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \deg f_i$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το προηγούμενο πόρισμα και το θεώρημα Bézout (4.2). □

Βλέπουμε ότι η βέλτιστη (δηλ. ελάχιστη) διάσταση των πινάκων αυτών ισούται με τον συνολικό βαθμό της απαλοίφουσας. Σε αυτήν την περίπτωση η ορίζουσά τους δίνει την απαλοίφουσα ως πολυώνυμο στους αρχικούς συντελεστές. Έτσι, στις ειδικές περιπτώσεις που έχουμε δει, ο πίνακας των συντελεστών γραμμικού συστήματος και ο πίνακας Sylvester είναι οι μικρότεροι δυνατοί.

5.2 Η Μέθοδος Macaulay

Η μέθοδος που αναπτύχθηκε από τον Macaulay(1902) κατασκευάζει έναν αρκετά καλό πίνακα M τύπου Sylvester και επίσης ορίζει έναν υποπίνακα M', η ορίζουσα του οποίου είναι ο παρασιτικός παράγοντας, δηλαδή

$$R = \frac{\det M}{\det M'}$$

Αρχικά ορίζουμε την ομαλότητα(regularity) του M ως εξής

$$\rho := \left(\sum_{i=0}^{n} \deg f_i\right) - n$$

και λαμβάνουμε

$$C = \{\underset{\sim}{x}^{\alpha} \ : \ \deg \underset{\sim}{x}^{\alpha} \leq \rho\}$$

Γνωρίζουμε ότι $|C| = \binom{\rho + n}{n}$, άρα αυτή θα είναι και η διάσταση του M.

Θα ορίσουμε τώρα μια διαμέριση του C σε $n+1$ σύνολα:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{\underset{\sim}{x}^{\alpha} \in C \ : \ \alpha_1 \geq d_1\} \\
C_2 &= \{\underset{\sim}{x}^{\alpha} \in (C - C_1) \ : \ \alpha_2 \geq d_2\} \\
&\vdots \\
C_i &= \left\{\underset{\sim}{x}^{\alpha} \in \left(C - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j\right) \ : \ \alpha_i \geq d_i\right\} \\
&\vdots \\
C_n &= \left\{\underset{\sim}{x}^{\alpha} \in \left(C - \bigcup_{j=1}^{n-1} C_j\right) \ : \ \alpha_n \geq d_n\right\} \\
C_0 &= C - \bigcup_{j=1}^{n} C_j
\end{aligned}$$

όπου $d_i = \deg f_i$. Οι συνθήκες $\alpha_i \geq d_i$ θα μπορούσαν να γραφούν ισοδύναμα ως $x_i^{d_i} \big| \underset{\sim}{x}^{\alpha}$.

Τα μονώνυμα που θα πολλαπλασιάσουν τα f_i στις γραμμές του M είναι:

$$\begin{aligned}
B_i &:= \left\{\frac{\underset{\sim}{x}^{\alpha}}{x_i^{d_i}} \ : \ x^{\alpha} \in C_i\right\} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \\
B_0 &:= C_0
\end{aligned}$$

Σημειώνουμε πως αν είχαμε ομογενοποιήσει τα πολυώνυμα, το B_0 θα εντασσόταν στο γενικό τύπο, δηλαδή θα ήταν τα μονώνυμα του C_0 διαιρεμένα με την ομογενοποιητική μεταβλητή υψωμένη στον $\deg f_0$.

Παράδειγμα 5.1. Έστω $f_0, f_1 \in \mathbb{F}[x]$. Η ομαλότητα είναι $\rho = d_0 + d_1 - 1$, και $\dim M = \binom{\rho+1}{1} = \rho + 1 = d_0 + d_1$. Τελικά $\det R = \det S$, όπου S ο πίνακας Sylvester. Εκ κατασκευής του πίνακα Macaulay συμπεραίνουμε πως $M = S$.

Παράδειγμα 5.2. Έστω $f_i \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ γραμμικά πολυώνυμα. Είναι $\rho = (n+1) - n = 1$ άρα το C θα περιέχει τα γραμμικά μονώνυμα και τη μονάδα. Είναι $C_i = \{x_i\} \Rightarrow B_i = \{1\}$ και $C_0 = \{1\}$. Τελικά βλέπουμε πως ο πίνακας Macaulay συμπίπτει με τον πίνακα των συντελεστών.

Στα δυο παραπάνω παραδείγματα, η μέθοδος του Macaulay μας έδωσε το βέλτιστο ως προς διάσταση πίνακα και μάλιστα προσέγγισε ακριβώς την απαλοίφουσα, χωρίς παρασιτικό παράγοντα.

Ο πίνακας αυτός καλείται πίνακας Macaulay. Θα αποδείξουμε ότι πρόκειται για πίνακα τύπου Sylvester:

- Τα μονώνυμα των γραμμών $B_i * f_i$ εμφανίζονται στο C: Πράγματι τα μονώνυμα αυτά ανήκουν εκ κατασκευής στα C_i, τα οποία είναι διαμέριση του C.

  Συγκεκριμένα, αν $\underset{\sim}{x}^\alpha \in B_i,\ i = 1, \dots, n$, θα είναι $\deg \underset{\sim}{x}^\alpha \leq \rho - d_i$. Επειδή πολλαπλασιάζονται με το f_i ο μέγιστος βαθμός στο $B_i * f_i$ είναι ρ.

  Για το $B_0 = \{\underset{\sim}{x}^\alpha \ :\ 0 \leq \alpha_i \leq d_i - 1\}$ έχουμε (αθροίζοντας τις ανισότητες) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n} d_i - n$. Όταν πολλαπλασιάσουμε επί f_0 παίρνουμε πολυώνυμα βαθμού $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i - n = \rho$.

- Προφανώς ο M είναι τετράγωνος πίνακας. Θα δείξουμε πως η ορίζουσά του $\det M \in \mathbb{Z}[c_{ij}]$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν.

  Έστω V το σύνολο των λύσεων της $\det M = 0$, και D το πλήθος όλων των c_{ij}. Θα είναι $\det M \equiv 0$ ανν $V = \mathbb{C}^D$, ισοδύναμα ανν $\dim V = D$. Θα δείξουμε πως αυτό δε συμβαίνει, βρίσκοντας ένα ανοιχτό σύνολο στον $\mathbb{C}^D$ στο οποίο $\det M \neq 0$.

  Θέτουμε $f_0 = 1,\ f_i = x_i^{d_i}$ για $i = 1, \dots, n$. Η επιλογή αυτή δεν είναι παρά ένα σημείο $\underset{\sim}{c}$ στο χώρο των συντελεστών. Είναι $B_i = \{1\},\ i = 0, \dots, n$, άρα ο πίνακας Macaulay είναι $M = I_{n+1}$(μοναδιαίος διάστασης $n+1$). Έτσι $\det M = 1 \neq 0$. Μένει να βρούμε μια ανοικτή περιοχή του σημείου $\underset{\sim}{c} \in \mathbb{C}^D$ των συντελεστών όπου η ορίζουσα δεν είναι μηδενική. Διαταράσσουμε τους μηδενικούς συντελεστές των πολυωνύμων κατά αρκούντως μικρό $\varepsilon > 0$. Τότε παίρνουμε έναν πίνακα με μονάδες στη διαγώνιο και ε αλλού. Η ορίζουσα είναι $\det M = 1 + O(\varepsilon) \cong 1 \neq 0$. Άρα στην ανοικτή μπάλα με κέντρο $\underset{\sim}{c}$ και ακτίνα ε η ορίζουσα δεν είναι μηδενική.

Λήμμα 5.2. *Στη γενική περίπτωση, κάθε κύρια υπο-ορίζουσα του πίνακα M είναι μη μηδενική.*

Απόδειξη. Όμοια με πριν, λαμβάνοντας $f_0 = 1,\ f_i = x_i^{d_i}$ για $i = 1, \dots, n$. □

Στην κατασκευή Macaulay, βλέπουμε ότι $B_0 = \{\underset{\sim}{x}^\alpha \ :\ 0 \leq \alpha_i \leq d_i - 1\}$. Έτσι, $|B_0| = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} d_i = \deg_{f_0} R$. Η επιλογή αυτή είναι βέλτιστη, σύμφωνα με το *Πόρισμα (5.2)*. Ας συμβολίσουμε M_j τον πίνακα Macaulay που προκύπτει αν θελήσουμε να να επιλέξουμε με βέλτιστο τρόπο το σύνολο B_j, όπως έγινε παραπάνω με το B_0. Στην περίπτωση των γραμμικών πολυωνύμων παρατηρήστε ότι για κάθε j έχουμε $|B_j| = 1$, άρα οι M_j προκύπτουν από αντιμεταθέσεις γραμμών του M_0 και συμπίπτουν μέχρι προσήμου. Στη γενική περίπτωση αυτό δεν ισχύει.

Θεώρημα 5.1. *Ισχύει $R = \text{ΜΚΔ}(\det M_0, \det M_1, \dots, \det M_n)$.*

Απόδειξη. Είναι $|B_0| = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} d_i = \deg_{f_0} R$, άρα $\deg_{f_0}[\det M_0] = \deg_{f_0} R$.

Επίσης, $R \big| \det M_0 \Rightarrow \forall i,\ \deg_{f_i} R \leq \deg_{f_i}[\det M_0]$.

Γενικότερα, $R \big| \det M_j$ και $|B_j| = \displaystyle\prod_{i=0, i\neq j}^{n} d_i = \deg_{f_j} R$, δηλαδή είναι

$$\deg_{f_j} R = \deg_{f_j}[\det M_j] \quad \text{και} \quad \forall i,\ \deg_{f_i} R \leq \deg_{f_i}[\det M_j],\ j = 0, 1, \dots, n$$

Άρα $\deg_{f_i}[\text{ΜΚΔ}(\det M_0, \det M_1, \dots, \det M_n)] = \deg_{f_i} R$, όμως $R | \text{ΜΚΔ}(\det M_0, \det M_1, \dots, \det M_n)$ και η ισότητα έπεται. □