ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Δίκτυα Επικοινωνιών

Ενότητα 2

Μοντέλα Συστημάτων Αναμονής σε Δίκτυα Επικοινωνιών

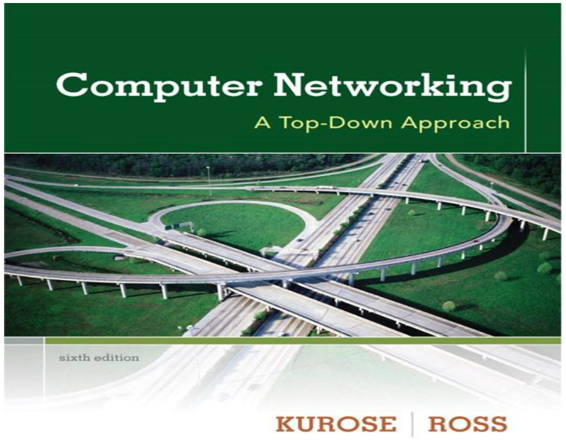
Άννα Τζανακάκη
Τμήμα Φυσικής
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Δίκτυα Επικοινωνιών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Εθνικό & Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Συνιστώμενο Βιβλίο:
Computer Networking: A Top-Down Approach, by Kurose & Ross, Addison-Wesley

Ελληνική Μετάφραση:
Εκδόσεις : Μ. Γκιούρδας



Θεματικές Ενότητες (ΘΕ) μαθήματος:

ΘΕ1: Εισαγωγή
(Κεφ. 1 του βιβλίου)

ΘΕ2: Συστήματα Αναμονής (M/M/1 και παραλλαγές, M/G/1, συστήματα με προτεραιότητες, δίκτυα ουρών)

ΘΕ3: Επίπεδο Μεταφοράς
(Κεφ. 3 του βιβλίου)

ΘΕ4: Επίπεδο Δικτύου
(Κεφ. 4 του βιβλίου)

ΘΕ5: Επίπεδο Ζεύξης: Ζεύξεις, Δίκτυα Πρόσβασης, Δίκτυα Τοπικής Περιοχής
(Κεφ. 5 του βιβλίου)

Οι περισσότερες από τις διαφάνειες αυτής της ενότητας αποτελούν προσαρμογή και απόδοση στα ελληνικά των διαφανειών που συνοδεύουν το βιβλίο Computer Networking : A Top-Down Approach, J.F Kurose and K.W. Ross, 6/E, Addison-Wesley.

Προσαρμογή και επιμέλεια της απόδοσης των πρωτότυπων διαφανειών στα ελληνικά : Λάζαρος Μεράκος

Περιεχόμενα

Τι περιμένουμε από τα Μοντέλα Αναμονής;

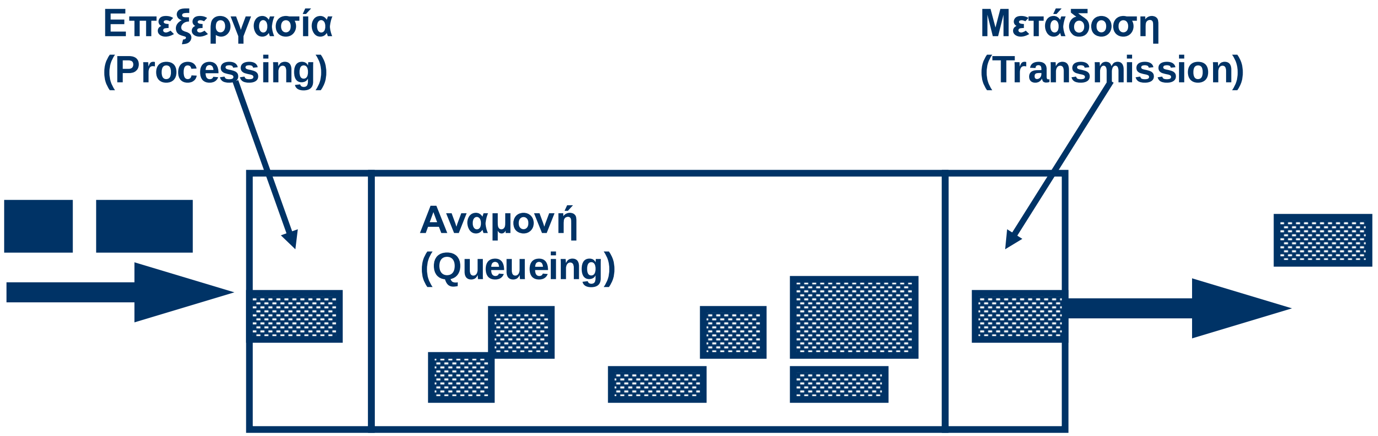
- **Χρήσιμα για ανάλυση απόδοσης, σχεδιασμό δικτύων και πρωτοκόλλων ελέγχου δικτύου (δρομολόγησης,…)**

- **Απαιτούν απλουστευτικές υποθέσεις**

- **Δίνουν ποιοτικά αποτελέσματα, βοηθούν στην κατανόηση των παραγόντων καθυστέρησης, και σε μερικές περιπτώσεις μπορούν να αποτιμήσουν την προβλεπόμενη καθυστέρηση**

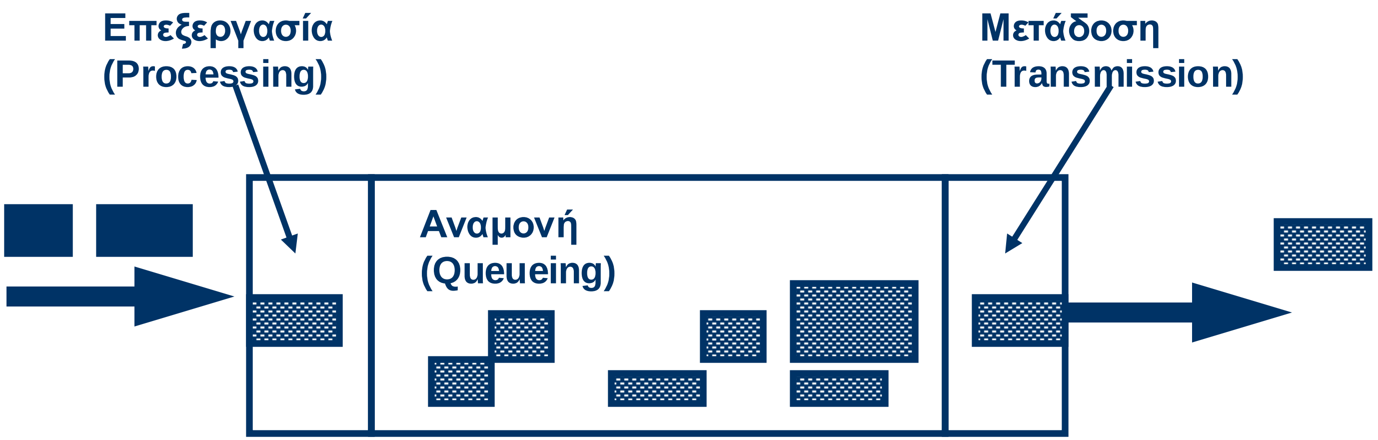
- **Τα αναλυτικά μοντέλα συμπληρώνουν τα μοντέλα προσομοίωσης, που συνήθως είναι πιο λεπτομερή**

ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΗΣ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ ΣΕ ΚΟΜΒΟ



- **<u>Καθυστέρηση Επεξεργασίας:</u>** Χρόνος από λήψη πακέτου μέχρι τοποθέτηση στην ουρά (σταθερή, εκτός αν η επεξεργαστική ισχύς είναι περιορίζων πόρος)
- **<u>Καθυστέρηση Αναμονής</u>:** Χρόνος στην ουρά μέχρι την εκκίνηση της μετάδοσης (συνήθως μεταβλητή)

ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΗΣ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ ΣΕ ΚΟΜΒΟ



- **<u>Καθυστέρηση Μετάδοσης :</u>** Χρόνος μετάδοσης του πακέτου (ανάλογος του μήκους του πακέτου)
- **<u>Καθυστέρηση Διάδοσης</u> :** Χρόνος που απαιτείται για να πάει το τελευταίο bit από πομπό σε δέκτη (ανάλογη της φυσικής απόστασης μεταξύ των κόμβων. Μεγάλη για δορυφορικές ζεύξεις)

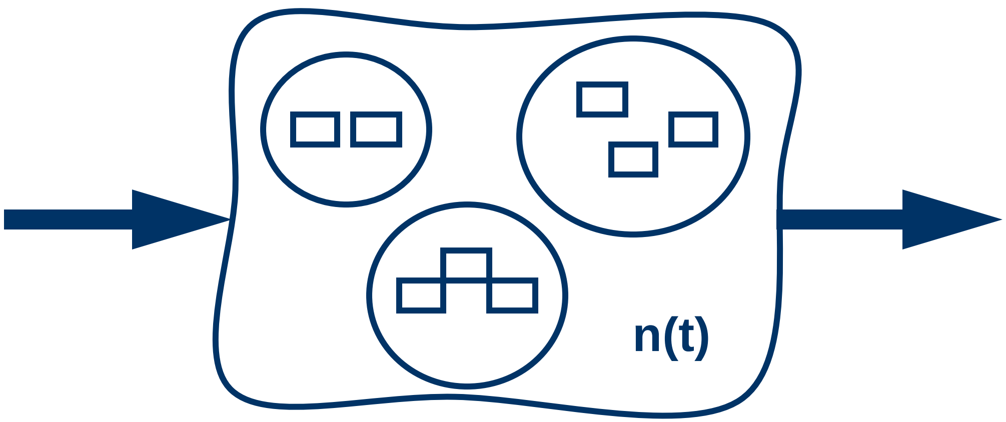
ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ LITTLE

- Δείχνει ότι για δοσμένο ρυθμό αφίξεων λ σε ένα οποιοδήποτε σύστημα αναμονής

  Μέσος Αριθμός Πελατών = λ x Μέση Καθυστέρηση

- Πολύ σημαντικό: ισχύει κάτω από ελάχιστες υποθέσεις

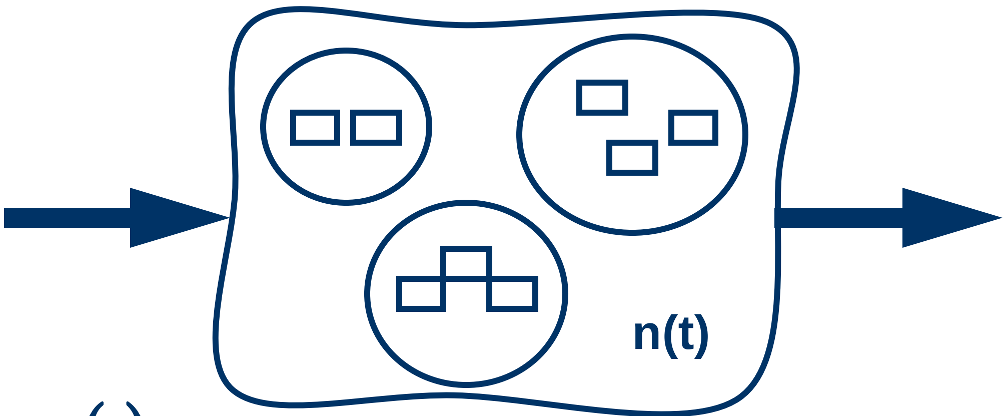
Κύριες Παράμετροι ενός Συστήματος Αναμονής



$\mathbf{p_n(t)}$ = πιθανότητα να υπάρχουν **n** πελάτες στο σύστημα τη χρονική στιγμή **t**

$\mathbf{p_n = \lim_{t \to \infty} p_n(t)}$ **:** Κατάσταση ισορροπίας (Steady state)

Κύριες Παράμετροι ενός Συστήματος Αναμονής



$$N(t) = \sum_{n=o}^{\infty} n p_n(t):$$ Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα στο χρόνο **t**

$$N = \lim_{t \to \infty} N(t):$$ Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

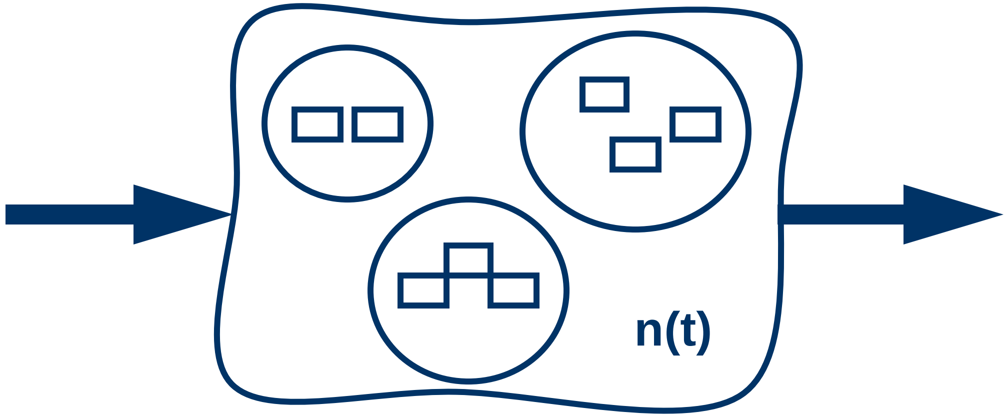
$$N_t =$$ Χρονικός μέσος αριθμός στο σύστημα από **0** μέχρι **t**

- ✓Υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι **εργοδικό** (χρονικός μέσος = πιθανοτικός μέσος)

$$N = \lim_{t \to \infty} N(t) = \lim_{t \to \infty} N_t$$

Εργοδικό είναι ένα dυναμικό σύστημα, το οποίο, σε γενικές γραμμές, έχει την ίδια συμπεριφορά με μέσο όρο το χρόνο, καθώς και κατά μέσο όρο στο χώρο των πιθανοτήτων.

Κύριες Παράμετροι ενός Συστήματος Αναμονής



- **T_k :** Μέση καθυστέρηση του k πελάτη (Average system time)
- $T = \lim_{k \to \infty} T_k$ (Μέση καθυστέρηση στο σύστημα)
- **T** μπορεί να εκφραστεί και σαν χρονικός μέσος

$$T = \lim_{k \to \infty} \frac{\text{Άθροισμα καθυστερήσεων πελατών μέχρι } t}{\text{Αριθμός πελατών μέχρι } t}$$

Θεώρημα του LITTLE : N= λT

Όπου:

- **N** = Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα
- λ = Ρυθμός αφίξεων (πελάτες / μονάδα χρόνου)
- **T** = Μέση καθυστέρηση στο σύστημα

- Το θεώρημα του Little εφαρμόζεται σε κάθε σύστημα αφίξεων-εξυπηρετήσεων με την κατάλληλη ερμηνεία των **N**, λ και **T**.

Θεώρημα του LITTLE : N= λT

Παραδείγματα:

- Εστιατόριο γρήγορου φαγητού (μικρή καθυστέρηση εξυπηρέτησης **T**) απαιτεί μικρό χώρο εστίασης (περιορισμένο πλήθος πελατών **N**) για το ίδιο λ
- Σε βροχερή μέρα υπάρχει μεγαλύτερο μποτιλιάρισμα σε ώρες αιχμής (μεγάλο **N**) και οι καθυστερήσεις είναι μεγαλύτερες (μεγάλο **T**)

Σημειώστε:

- Το θεώρημα του Little δεν μας δίνει τα **N** και **T**, μόνο τη μεταξύ τους σχέση.
- Επιπρόσθετες (στατιστικές) υποθέσεις απαιτούνται για να βρούμε τα **N** και **T**.

Θεώρημα του LITTLE : N= λT

- Σε σταθερή κατάσταση (steady state), ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι ίσος με το γινόμενο του μέσου ρυθμού αφίξεων και του μέσου χρόνου που περνάνε οι πελάτες στο σύστημα.

$$E[N] = \lambda E[T]$$

- Απόδειξη:

A(t)

D(t)

i^στος πελάτης καταφθάνει τη χρονική στιγμή S_i → **Queueing System** → **i^στος πελάτης αναχωρεί τη χρονική στιγμή D_i**

$$T_i = D_i - S_i$$

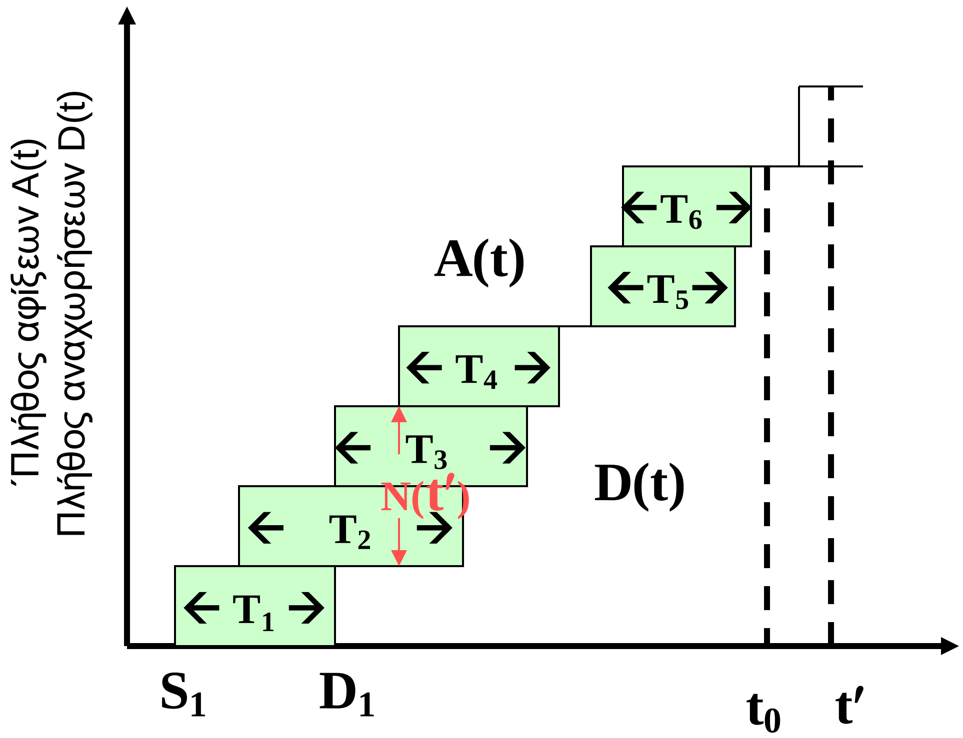
- Το σύστημα ξεκινά άδειο την t = 0
- A(t) = Πλήθος πελατών που έχουν φθάσει έως την t
- D(t) = Πλήθος πελατών που έχουν αναχωρήσει έως τη στιγμή t
- N(t) = Πλήθος πελατών στο σύστημα τη στιγμή t

- S_i = Στιγμή που ο i^στος πελάτης αφίχθη
- T_i = Χρόνος που ο i^στος πελάτης ξοδεύει στο σύστημα
- D_i = Στιγμή που ο i^στος πελάτης αναχωρεί = $S_i + T_i$

$$N(t)=A(t) - D(t) \qquad (1)$$

Little's Law: First Come First Served

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα N(t) τη χρονική περίοδο (0,t]



$$< N >_t = \frac{1}{t}\int_0^t N(t')dt' \qquad (2)$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t (A(t') - D(t'))dt'$$

= Εμβαδό γραμμοσκιασμένης περιοχής μέχρι τον χρόνο t
= Ο συνολικός χρόνος που πέρασαν στο σύστημα οι πελάτες μέχρι τον χρόνο t δια τον χρόνο αυτό

$$= \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{A(t)} T_i \qquad (3)$$

Little's Law: First Comes First Served

Ο μέσος ρυθμός αφίξεων μέχρι τον χρόνο t είναι

$$< \lambda >_t = \frac{\mathrm{A(t)}}{\mathrm{t}} \qquad (4)$$

Από τις (4) (3), έχουμε:

$$< \mathrm{N} >_t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{A(t)} T_i \; =< \lambda >_t \frac{1}{A(t)} \sum_{i=1}^{A(t)} T_i \quad (5)$$

Αν $< \mathrm{T} >_t$ είναι ο μέσος χρόνος που πέρασαν στο σύστημα οι πρώτοι $A(t)$ πελάτες τότε

$$< \mathrm{T} >_t = \frac{1}{\mathrm{A(t)}} \sum_{i=1}^{A(t)} \mathrm{T_i} \qquad (6)$$

Από τις (5) και (6) έχουμε:

$$< \mathrm{N} >_t = < \lambda >_t < \mathrm{T} >_\mathrm{t} \qquad (7)$$

Little's Law: First Comes First Served

Ας υποθέσουμε ότι $t \rightarrow \infty$, με πιθανότητα 1, οι χρονικές μέσες τιμές συμπίπτουν με τις στατιστικές μέσες τιμές (for mean ergodic random processes)

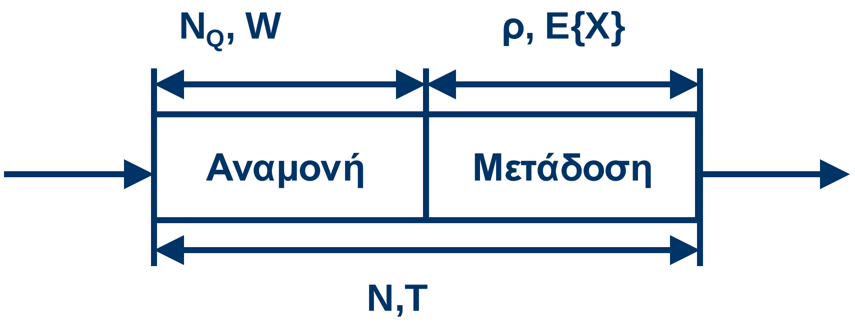
$$\begin{aligned} &< N >_t \rightarrow E[N] \\ &< \lambda >_t \rightarrow \lambda \\ &< T >_t \rightarrow E[T] \end{aligned} \qquad (8)$$

(7) και (8) Θεώρημα Little

$$E[N] = \lambda E[T] \qquad (9)$$

Θεώρημα του LITTLE

Παράδειγμα:



- Εφαρμογή του θεωρήματος στην αναμονή (ουρά)

$\mathbf{N_Q = \lambda W}$

όπου $\mathbf{N_Q}$ = μέσος αριθμός πακέτων που αναμένουν στην ουρά
$\mathbf{W}$ = μέση καθυστέρηση στην ουρά

- Εφαρμογή του θεωρήματος στο τμήμα μετάδοσης (εξυπηρέτης)

$\mathbf{\rho = \lambda E\{X\}}$

όπου $\mathbf{\rho}$ = μέσος αριθμός πακέτων υπό μετάδοση (ένταση κίνησης)
$\mathbf{E\{X\}}$ = μέσος χρόνος μετάδοσης

Θεώρημα του LITTLE

Δεύτερο παράδειγμα:

- Εφαρμογή στη ροή κίνησης i

  $N_i = \lambda_i T_i$

- Εφαρμογή σε όλες τις ροές μαζί

  $(N_1 + \ldots N_k) = (\lambda_1 + \ldots + \lambda_k) T$

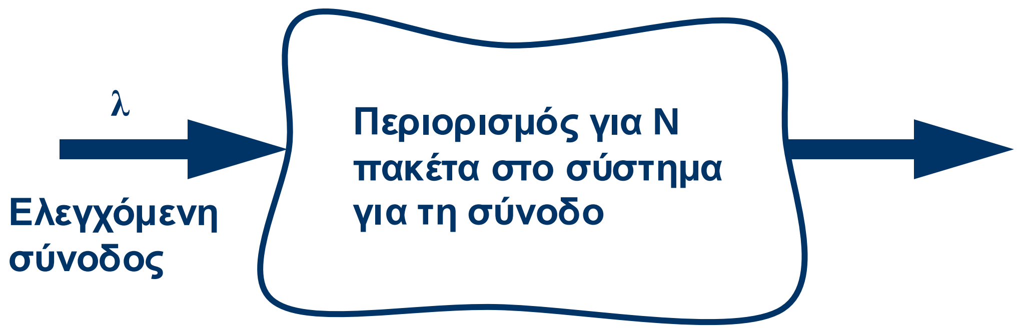
  όπου

  $$T = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i \right) / \left(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k \right)$$ *(μέσος από όλα τα i)*

Θεώρημα του LITTLE

<u>Άλλο ένα παράδειγμα</u>

Έλεγχος ροής συνόδου **w / window size N**



Υπόθεση: πακέτα είναι πάντα διαθέσιμα προς αποστολή

Ρυθμαπόδοση **λ = N/T**

- Όπως μεγαλώνει η συμφόρηση (**T** μεγαλώνει), το λ μικραίνει (ο έλεγχος ροής γίνεται πιο δραστικός)
- Αν το **N** μεγαλώνει, το **T** μεγαλώνει

Αριθμητική εφαρμογή

- A monitor on a disk server showed that the average time to satisfy an I/O request was 100 milliseconds. The I/O rate was about 100 requests per second. What was the mean number of requests at the disk server?

- Using Little's law:

Mean number in the disk server

= Arrival rate × Response time

= 100 (requests/second) ×(0.1 seconds)

= 10 requests

Βασική ορολογία συστημάτων αναμονής

- a/b/m/K
  - a → Τύπος αφίξεων
  - b → Κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης
  - m → Πλήθος εξυπηρετητών (servers), m=1,2…
  - K → Χωρητικότητα (K=1,2,…) (αν ∞ παραλείπεται)

- Το a συμβολίζεται συνήθως με τα γράμματα:
  - M = Memoryless = Poisson
- Το b συμβολίζεται συνήθως με τα γράμματα:
  - M = Memoryless = exponential service time distribution
  - D = Deterministic
  - E = Erlang
  - H = Hyper-exponential
  - G = General ⇒ Results valid for all distributions

Παράδειγμα: Σύστημα Ουράς M/M/1

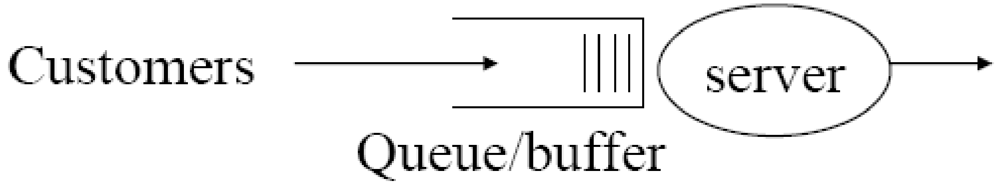
- Οι αφίξεις πελατών ακολουθούν την κατανομή Poisson με ρυθμό λ και οι χρόνοι μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων (interarrival time) είναι ανεξάρτητες ταυτόσημα κατανεμημένες (IID) τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή $1/\lambda$

- Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή $1/\mu$ και ανεξάρτητες του χρόνου μεταξύ των διαδοχικών αφίξεων

- Σύστημα με ένα εξυπηρετητή

- Άπειρο μέγεθος ουράς

Παράδειγμα: Σύστημα Ουράς M/M/1



- Μοντέλο κατάλληλο για
  - Πελάτες που περιμένουν σε μια σειρά
  - Γραμμή συναρμολόγησης/παραγωγής προϊόντων
  - Δίκτυα μεταγωγής πακέτων
  - Κυψελωτά δίκτυα
- Που θέλουν να γνωρίζουν
  - Το μέσο αριθμό πελατών/εργασιών στο σύστημα
  - Το μέσο χρόνο αναμονής
- Βασικές παράμετροι συστήματος
  - Μέσος ρυθμός αφίξεων χρηστών (πλήθος χρηστών ανά μονάδα χρόνου που καταφθάνουν)
  - Μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης (πλήθος χρηστών ανά μονάδα χρόνου που εξυπηρετούνται)

Το σύστημα M/M/1

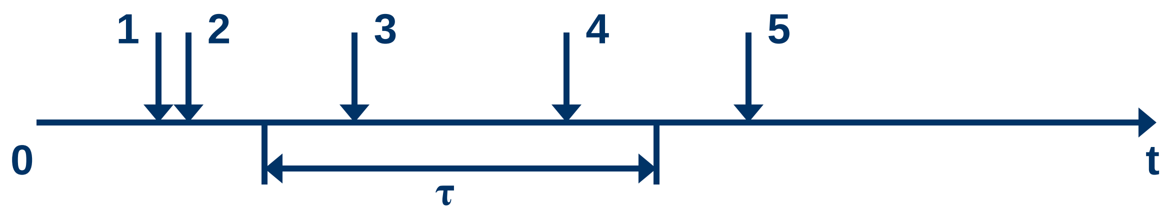
M/M/1

- Διαδικασία αφίξεων Poisson (1ο M)
- Εκθετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης (2ο M)
- Ένας εξυπηρετητής (1)
- Άπειροι πελάτες στο σύστημα

Στόχος

Ο προσδιορισμός της πιθανότητας $\mathbf{p_n}$ να υπάρχουν $\mathbf{n}$ πελάτες στο σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας

Διαδικασία αφίξεων: POISSON με ρυθμό λ



Στοχαστική διαδικασία αφίξεων $\{A(t) | t \geq 0\}$ που παίρνει τιμές 0,1,2,… έτσι ώστε

- **A(t)** = αριθμός αφίξεων από **0** έως **t**
- αριθμοί αφίξεων σε ξεχωριστά διαστήματα (intervals) είναι ανεξάρτητοι
- αριθμός αφίξεων σε διάστημα μήκους $\boldsymbol{\tau}$ ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\boldsymbol{\lambda\tau}$, δηλ.,

$$P\{A(t+\tau) - A(t) = n\} = e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^n}{n!}, n = 0,1,...$$

Ιδιότητες της διαδικασίας POISSON

- Χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων είναι ανεξάρτητοι και εκθετικά κατανεμημένοι με παράμετρο λ
- Συνεπώς, η πιθανότητα $\mathbf{P\{\tau_n \le s\}}$ το χρονικό διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων να είναι μικρότερο του s δίνεται από:

$$\mathbf{P\{\tau_n \le s\} = 1 - e^{-\lambda s}, \qquad s \ge 0}$$

όπου $\boldsymbol{\tau_n}$ = χρόνος μεταξύ άφιξης n και άφιξης (n+1)

- Επιπλέον, ισχύει $\mathbf{P\{A(t+\tau) - A(t) = n\} = e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^n}{n!}, n = 0, 1, \ldots}$, συνεπώς, για n=0, 1, 2… ισχύει

  - $\mathbf{P\{A(t+\delta)-A(t) = 0\} = e^{-\lambda\delta} = 1-\lambda\delta + o(\delta)}$ **(1)**

  $\mathbf{P\{A(t+\delta)-A(t) = 1\} = e^{-\lambda\delta}(\lambda\delta) = (1-\lambda\delta+o(\delta))(\lambda\delta) = \lambda\delta + o(\delta)}$ **(2)**

  $\mathbf{P\{A(t+\delta)-A(t) \ge 2\} = o(\delta)}$ **(3)**

  όπου $\mathbf{o(\delta)/\delta \to 0}$ όπως $\mathbf{\delta \to 0}$

Υπενθύμιση: Σειρά Taylor: $e^{-\lambda\delta} = 1-\lambda\delta+(\lambda\delta)^2/2-\ldots$

Ιδιότητες της διαδικασίας POISSON

- Αν $\mathbf{A_1, A_2, \ldots A_k}$ είναι ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k}$,τότε $\mathbf{A = A_1 + A_2 + \ldots + A_k}$ είναι Poisson με ρυθμό $\boldsymbol{\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k}$

- Η διαδικασία Poisson είναι τυπικά ένα καλό μοντέλο για τη συγκεντρωτική κίνηση από ένα μεγάλο αριθμό «μικρών» χρηστών.

Διαδικασία εξυπηρετήσεων σε M/M/1

- Ένας εξυπηρετητής
- Αφίξεις Poisson με παράμετρο **λ**
- Εκθετικά κατανεμημένοι χρόνοι εξυπηρέτησης με παράμετρο **μ**

$$P\{x \le s\} = 1 - e^{-\mu s}\ , \quad E\{x\} = \frac{1}{\mu}$$

- Ανεξάρτητοι χρόνοι αφίξεων και εξυπηρετήσεων
- Άπειροι πελάτες
- Άπειρη ουρά αναμονής
- Memoryless property: The additional time needed to complete a customer’s service in progress is independent of when the service started, similarly the time up to next arrival is independent of when the previous arrival occurred

Αλυσίδες Markov

- Στην ανάλυση του συστήματος μας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αλυσίδες Markov γιατί η “Memoryless Property” υπονοεί ότι:
  - όταν ξέρουμε ότι έχουμε N(t) πελάτες στο σύστημα τη χρ. στιγμή t, οι χρόνοι στους οποίους οι πελάτες φτάνουν στο σύστημα ή θα ολοκληρώσουν την εξυπηρέτηση τους στο μέλλον είναι ανεξάρτητοι από τους χρόνους άφιξης των πελατών που ήδη βρίσκονται στο σύστημα και από το πόση εξυπηρέτηση έχει δεχθεί ήδη ο πελάτης που εξυπηρετείτε από το σύστημα τη δεδομένη στιγμή.
  - **Άρα ο μελλοντικός αριθμός πελατών στο σύστημα εξαρτάται από τον παρελθοντικό αριθμό πελατών στο σύστημα μόνο μέσω του τρέχοντος αριθμού πελατών. {N(t)| ≥0}**
  - Οπότε μπορούμε να αναλύσουμε την διαδικασία N(t) σαν αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου
  - Θα χρησιμοποιήσουμε όμως την απλούστερη θεωρία των αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου

Αλυσίδες Markov

- Ας εστιάσουμε στους χρόνους

$$0, \delta, 2\delta, \ldots, k\delta, \ldots$$

όπου δ ένας μικρός θετικός αριθμός.

- $N_k = N(k\delta)$ και $N(t)$ είναι μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου τότε μπορούμε να δούμε ότι
- $\{N_k | k = 0,1\ldots\}$ είναι μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου
- με πιθανότητες το σύστημα να είναι κατειλημμένο όταν βρίσκεται σε σταθερή κατάσταση (steady state occupancy probabilities) ίσες με αυτές μιας αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου

- Αν P_{ij} είναι οι πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην j

$$P_{ij} = P\{N_{k+1} = j \mid N_k = i\}$$

Αλυσίδες Markov

P(n αφίξεις σε χρόνο δ) = $e^{-\lambda\delta}\frac{(\lambda\delta)^n}{n!}$

P(n αποχωρήσεις σε χρόνο δ) = $e^{-\mu\delta}\frac{(\mu\delta)^n}{n!}$

P(0 αποχωρήσεις σε χρόνο δ) = $e^{-\mu\delta}$

P(1 αποχώρηση σε χρόνο δ) = $\mu\delta e^{-\mu\delta}$

Παράδειγμα μετάβασης ενός βήματος (one step transition):

$P_{i,(i+1)}$ = P(1 άφιξη και 0 αποχωρήσεις) = P(1 άφιξη) x P(0 αποχωρήσεις)

Αλυσίδες Markov

- Από τις (1), (2), (3)
- **$P\{A(t+\delta)-A(t) = 0\} = e^{-\lambda\delta} = 1-\lambda\delta + o(\delta)$ (1)**

  $P\{A(t+\delta)-A(t) = 1\} = e^{-\lambda\delta}(\lambda\delta) = (1-\lambda\delta+o(\delta))(\lambda\delta) = \lambda\delta + o(\delta)$ (2)

  $P\{A(t+\delta)-A(t) \geq 2\} = o(\delta)$ (3)

  όπου $o(\delta)/\delta \to 0$ όπως $\delta \to 0$

$P_{00} = P(0 \text{ άφιξη}) = 1- \lambda\delta + o(\delta)$

$P_{ii} = P(0 \text{ άφιξη και } 0 \text{ αποχωρήσεις}) = 1- \lambda\delta - \mu\delta + o(\delta)$ $i \geq 1$

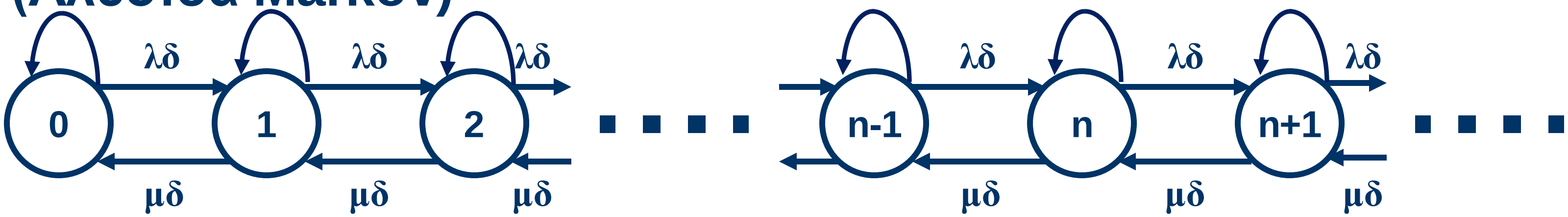
$P_{i,i+1} = P(1 \text{ άφιξη και } 0 \text{ αποχωρήσεις}) = \lambda\delta + o(\delta)$ $i \geq 0$

$P_{i,i-1} = P(0 \text{ άφιξη και } 1 \text{ αποχώρηση}) = \mu\delta + o(\delta)$ $i \geq 1$

$P_{i,j} = o(\delta)$ i και $j \neq i, i+1, i-1$

Κατανομή αριθμού πελατών στο σύστημα

Διάγραμμα μετάβασης κατάστασης (Αλυσίδα Markov)



Η πιθανότητα το σύστημα είναι στην κατάσταση **n** και να μεταβεί στην κατάσταση **n+1** στο επόμενο διάστημα μετάβασης είναι ίση με την πιθανότητα το σύστημα να μεταβεί από την κατάσταση **n+1** στην κατάσταση **n** στο επόμενο διάστημα μετάβασης

Ανάλυση ενδεχομένων σε ένα διάστημα **δ** sec

- Ρυθμός μετάβασης από **n** σε **n+1** $\approx p_n \lambda\delta$
- Ρυθμός μετάβασης από **n+1** σε **n** $\approx p_{n+1}\mu\delta$

Κατανομή αριθμού πελατών στο σύστημα

- **Εξισώσεις ισορροπίας:**

$$p_n \lambda \delta + o(\delta) = p_{n+1} \mu \delta + o(\delta)$$

- **Διαιρούμε με δ και παίρνουμε όριο όπως το $\delta \to 0$**

$$p_{n+1} = \rho p_n, \qquad n = 0,1,\ldots$$

όπου $\rho = \lambda/\mu$

$$p_{n+1} = \rho p_n = \rho(\rho p_{n-1}) = \rho^2 p_{n-1} = \rho^3 p_{n-2} \ldots = \rho^{n+1} p_0$$

- **Άμα βρούμε το p_0 τότε τα έχουμε όλα**

Κατανομή αριθμού πελατών στο σύστημα

Έχουμε

$$p_{n+1} = \rho^{n+1} p_0, \qquad n = 0, 1, \dots$$

Επιπλέον, το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των πιθανών καταστάσεων = 1

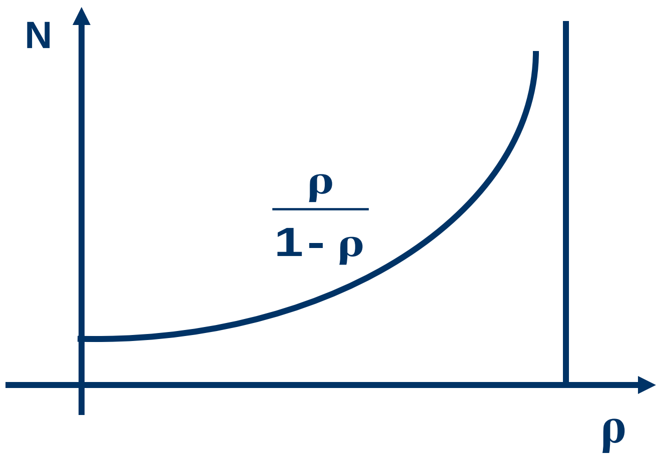
$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n p_0 = \frac{p_0}{1-\rho}$$

$$p_0 = 1-\rho$$

$$p_n = \rho^n (1-\rho), \qquad n = 0, 1, \dots$$

Έτσι το μέσο πλήθος χρηστών στο σύστημα ισούται με

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n (1-\rho) = \frac{\rho}{1-\rho}$$



Υπενθύμιση: ανάπτυγμα Taylor ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}$

- Απόδειξη σχέσης

$$\mathbf{N = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n (1-\rho) = \frac{\rho}{1-\rho}}$$

1. Γνωρίζουμε από ανάπτυγμα Taylor ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}$

2. Παραγωγίζουμε ως προς ρ και τους δύο όρους και έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\rho^{n-1} \rho' = \frac{-(1-\rho)'}{(1-\rho)^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\rho^{n-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

3. Πολλαπλασιάζουμε με ρ και τα δύο μέλη οπότε προκύπτει:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\rho^{n} = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

4. Αντικαθιστούμε

$$\mathrm{N} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathrm{p_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\rho^n(1-\rho) = \frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Κατανομή αριθμού πελατών στο σύστημα

- **Μέση καθυστέρηση (από το θεώρημα του Little)**

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\lambda/\mu}{\lambda(1-\lambda/\mu)}$$

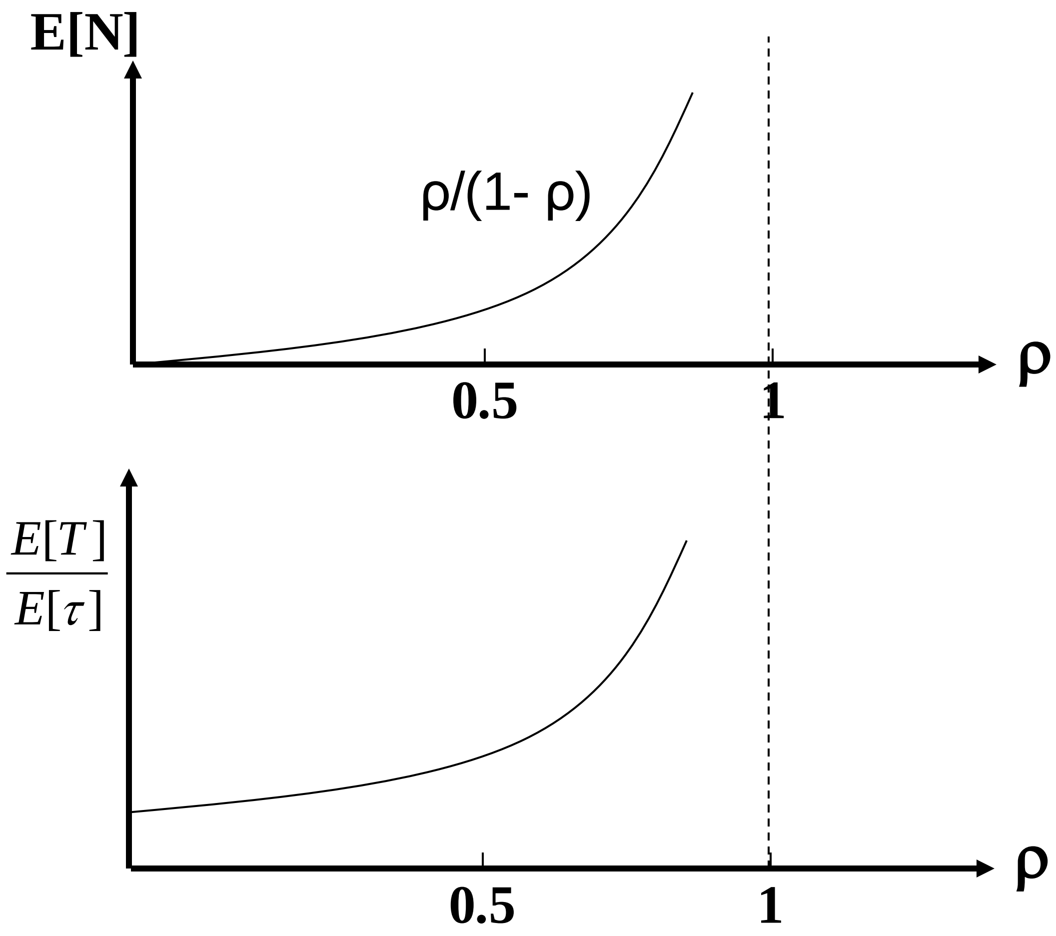
$$T = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

- **Μέση καθυστέρηση στην ουρά**

$$W = T - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu}$$

$$W = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$$

M/M/1: Μέτρα επίδοσης



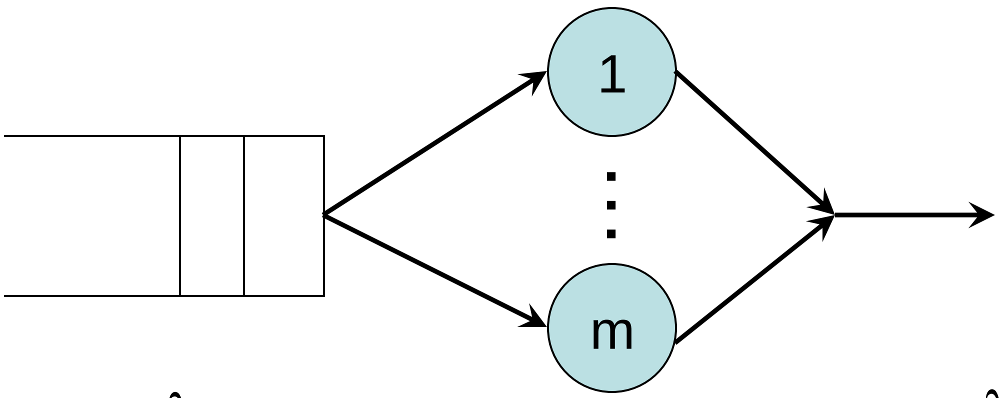
Συστήματα M/M/m, M/M/∞, and M/M/m/m

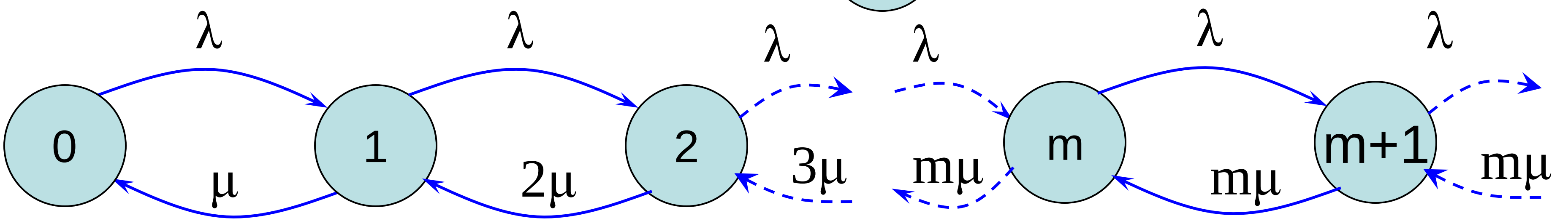
Ανάλυση παρόμοια με M/M/1

Χρησιμοποιούμε ένα μοντέλο αλυσίδας Markov για να βρούμε την κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα

Σύστημα M/M/m

Meaning: Poisson αφίξεις, exponentially distributed χρόνοι εξυπηρέτησης, m όμοιοι servers και άπειρη χωρητικότητα ουράς

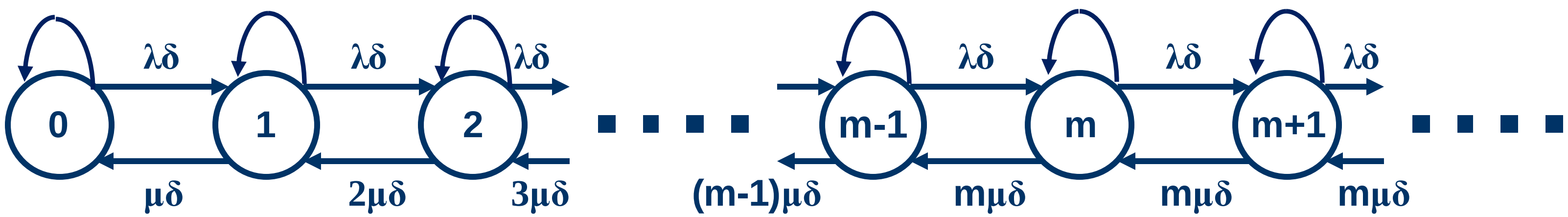




$$\lambda_j = \lambda \quad \text{and} \quad \mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{if } 0 \leq n \leq m \\ m\mu & \text{if } n > m \end{cases}$$

Σύστημα M/M/m

Poisson αφίξεις **(λ)**, εκθετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης **(μ)**, **m** εξυπηρετητές



Καταστάσεις ισορροπίας (**n≤m**):

- $\lambda p_0 = \mu p_1$
- $\lambda p_1 = 2\mu p_2$
- …
- $\lambda p_{m-1} = m\mu p_{m,}$

$\lambda p_{n-1} = n\mu p_n$

Καταστάσεις ισορροπίας **(n>m)** :

- $\lambda p_m = m\mu p_{m+1}$
- …
- $\lambda p_{n-1} = m\mu p_{n,}$

$\lambda p_{n-1} = m\mu p_n$

Χρησιμοποιούμε αυτές τις εξισώσεις για να εκφράσουμε τις πιθανότητες p_n ως συνάρτηση της πιθανότητας p_0 να είναι το σύστημα άδειο.

Καταστάσεις ισορροπίας (n≤m):

- Το σύστημα έχει στη διάθεση του m εξυπηρετητές :

$$\rho = \lambda/(m\mu)$$

- Δεδομένου ότι $\lambda p_{n-1} = n\mu p_n$ έχουμε

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{1}{n}p_{n-1}$$

- Με αναδρομή

$$p_n = \frac{\lambda}{\mu n}p_{n-1} = \frac{\lambda^2}{\mu^2 n(n-1)}p_{n-2}$$
$$= \frac{\lambda^3}{\mu^3 n(n-1)(n-2)}p_{n-3} = \cdots$$
$$= \frac{\lambda^n}{\mu^n n(n-1)(n-2)\cdots 1}p_0 = \frac{\lambda^n}{\mu^n n!}p_0 = \frac{(m\rho)^n}{n!}p_0$$

Το σύστημα M/M/m

$$p_n = \begin{cases} p_0 \dfrac{(m\rho)^n}{n!} & , \quad n \le m \\ p_0 \dfrac{m^m \rho^n}{m!} & , \quad n > m \end{cases}$$

where $\rho = \dfrac{\lambda}{m\mu} < 1$

Αντικαθιστώντας στη εξίσωση $\Sigma_n p_n = 1$ λαμβάνουμε

$$p_0 + \sum_{n=1}^{m-1} p_n + \sum_{n=m}^{+\infty} p_n = 1 \Rightarrow p_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{m^m \rho^n}{m!} \right] = 1 \Rightarrow$$

$$p_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^{+\infty} \rho^n \right] = 1$$

- Ισχύει ότι

$$\sum_{n=m}^{+\infty} \rho^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n - \sum_{n=0}^{m-1} \rho^n = \frac{1}{1-\rho} - \frac{1-\rho^m}{1-\rho} = \frac{\rho^m}{1-\rho}$$

- Συνεπώς

$$p_0 \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \frac{\rho^m}{1-\rho} \right] = 1 \Rightarrow$$

$$\mathbf{p_0} = \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{m!\,(1-\rho)} \right]^{-1}$$

Υπενθύμιση: Γεωμετρική πρόοδος

$$a + ar + ar^2 + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

Σύστημα M/M/m

Πιθανότητα αφικνούμενος πελάτης να χρειαστεί να αναμείνει στην ουρά (Erlang C formula)

$$P_Q = P\{\text{Queueing}\} = \sum_{n=m}^{\infty} p_n = \frac{p_0 (m\rho)^m}{m!\,(1-\rho)}$$

Απόδειξη:

$$P_q = \sum_{n=m}^{+\infty} p_n = \sum_{n=m}^{+\infty} p_0 \frac{m^m \rho^n}{m!}$$

$$= p_0 \frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^{+\infty} \rho^n = p_0 \frac{m^m}{m!} \frac{\rho^m}{(1-\rho)}$$

Σύστημα M/M/m

Πιθανότητα αφικνούμενος πελάτης να χρειαστεί να αναμείνει στην ουρά (Erlang C formula)

$$P_Q = P\{\text{Queueing}\} = \sum_{n=m}^{\infty} p_n = \frac{p_0 (m\rho)^m}{m!\,(1-\rho)}$$

$$N_q = \sum_{n=0}^{\infty} n P_{m+n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{p_0 m^m}{m!} \rho^{\,n+m} = \frac{p_0 (m\rho)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$$

$$N_q = P_q \frac{\rho}{1-\rho} \qquad \frac{N_q}{P_q} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

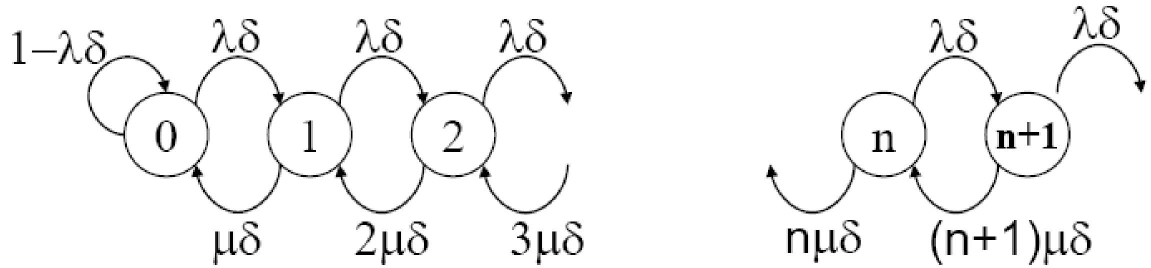
Υπενθύμιση: $$\sum_{n=0}^{+\infty} n\rho = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

Σύστημα M/M/m: Καθυστερήσεις

- $W = \dfrac{\rho P_Q}{\lambda(1-\rho)}$ (Μέσος χρόνος στην ουρά)
- $T = \dfrac{1}{\mu} + W$ (Μέσος χρόνος στο σύστημα)
- $N = \lambda T = m\rho + \dfrac{\rho P_Q}{1-\rho}$ (Μέσος αριθμός στο σύστημα)

Σύστημα M/M/∞

Poisson αφίξεις (λ), εκθετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης (μ), άπειροι εξυπηρετητές



- Θέτω m = ∞ στο σύστημα M/M/m

$\lambda p_{n-1} = n\mu p_n \qquad n=1, 2, \ldots$

$$p_n = \frac{p_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}$$

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}\right)^{-1} = e^{-\lambda/\mu}$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\, e^{-\lambda/\mu}$$

Poisson distribution

Σύστημα M/M/∞

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\, e^{-\lambda/\mu}$$

Poisson distribution

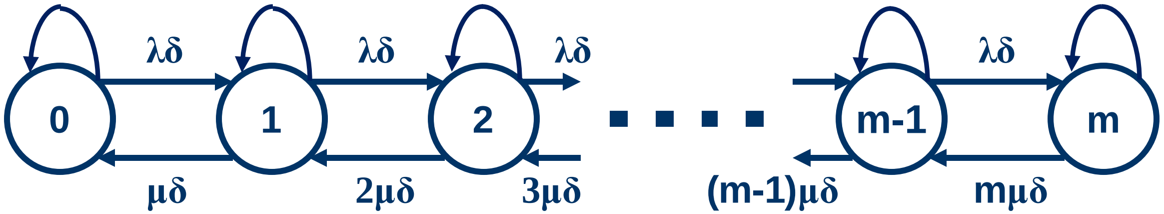
Η κατανομή του αριθμού είναι Poisson με παράμετρο λ/μ

- $N = \frac{\lambda}{\mu}$ (μέση τιμή της Poisson)
- $T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$ (από το θεώρημα τουLittle)

(= Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης, όπως περιμέναμε)

Σύστημα M/M/m/m

Poisson αφίξεις (λ), εκθετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης (μ), m εξυπηρετητές, το πολύ m πελάτες επιτρέπονται στο σύστημα



$$\lambda p_{n-1} = n\mu p_n, \qquad n = 1,\dots,m$$

$$p_n = p_0(\lambda/\mu)^n(1/n!), \quad n = 1,\dots,m$$

Σύστημα M/M/m/m

Λύνουμε ως προς $\mathbf{p_0}$ στην $\mathbf{\Sigma_n p_n = 1}$ και λαμβάνουμε

$$\mathbf{p_0 = \left[\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\right]^{-1}}$$

και

$$\mathbf{p_n = p_0\,(\lambda/\mu)^n(1/n!),\qquad n = 1,\ldots,m}$$

Η πιθανότητα με την οποία μια άφιξη θα βρει όλους τους m servers απασχολημένους και θα χαθεί είναι:

$$\mathbf{p_m = \frac{(\lambda/\mu)^m/m!}{\sum_{n=0}^{m}(\lambda/\mu)^n/n!}}$$

Erlang B Formula

Το σύστημα M/G/1

- Η μέση καθυστέρηση μπορεί να βρεθεί με απλές τεχνικές

- Η κατανομή του αριθμού των πελατών είναι δύσκολο να βρεθεί

Το σύστημα M/G/1

- Poisson αφίξεις (ρυθμός λ)
- Χρόνοι εξυπηρέτησης ανεξάρτητοι των χρόνων άφιξης
- Γενική κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης, με δοσμένα **E{X}**, και **E{X²}**
- Ένας εξυπηρετητής

Το σύστημα M/G/1

Pollaczek - Khinchine (P - K) formula

$$W = \frac{\lambda E\{X^2\}}{2(1-\rho)}$$ (Μέσος χρόνος στην ουρά)

$$T = E\{X\} + \frac{\lambda E\{X^2\}}{2(1-\rho)}$$ (Μέσος χρόνος στο σύστημα)

$N = \lambda\, T$ (Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα)

$\rho = \lambda / \mu$

Το σύστημα M/G/1

<u>*Παραδείγματα:*</u>

- **Σύστημα M/M/1**

$$E\{X\} = \frac{1}{\mu}, \qquad E\{X^2\} = \frac{2}{\mu^2},$$

$$W = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

- **Σύστημα M/D/1 (Deterministic Service Time – <u>όλοι έχουν σταθερό χρόνο εξυπηρέτησης 1/μ</u>)**

$$E\{X\} = \frac{1}{\mu}, \qquad E\{X^2\} = \frac{1}{\mu^2},$$

$$W = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}$$ (ελάχιστο για δοσμένα μ και ρ)

Το σύστημα M/G/1

Απόδειξη της φόρμουλας P - K

- Έστω

W_i = χρόνος αναμονής στην ουρά του πελάτη i

R_i = υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης όπως τον βλέπει ο πελάτης i

X_i = χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη i

N_i = αριθμός πελατών που βρίσκει ο πελάτης i να αναμένουν στην ουρά

- $W_i = R_i + \sum_{j=i-N_i}^{i-1} X_j$
- $E\{W_i\} = E\{R_i\} + E\{X\}E\{N_i\}$
- $W = R + \frac{1}{\mu} N_Q \qquad (\, i \to \infty)$
- $W = R + \rho W \qquad (N_Q = \lambda W,\ \text{θεώρημα Little})$

Το σύστημα M/G/1

Τελικά έχουμε

- $$W = \frac{R}{1-\rho}$$

Και χρησιμοποιώντας

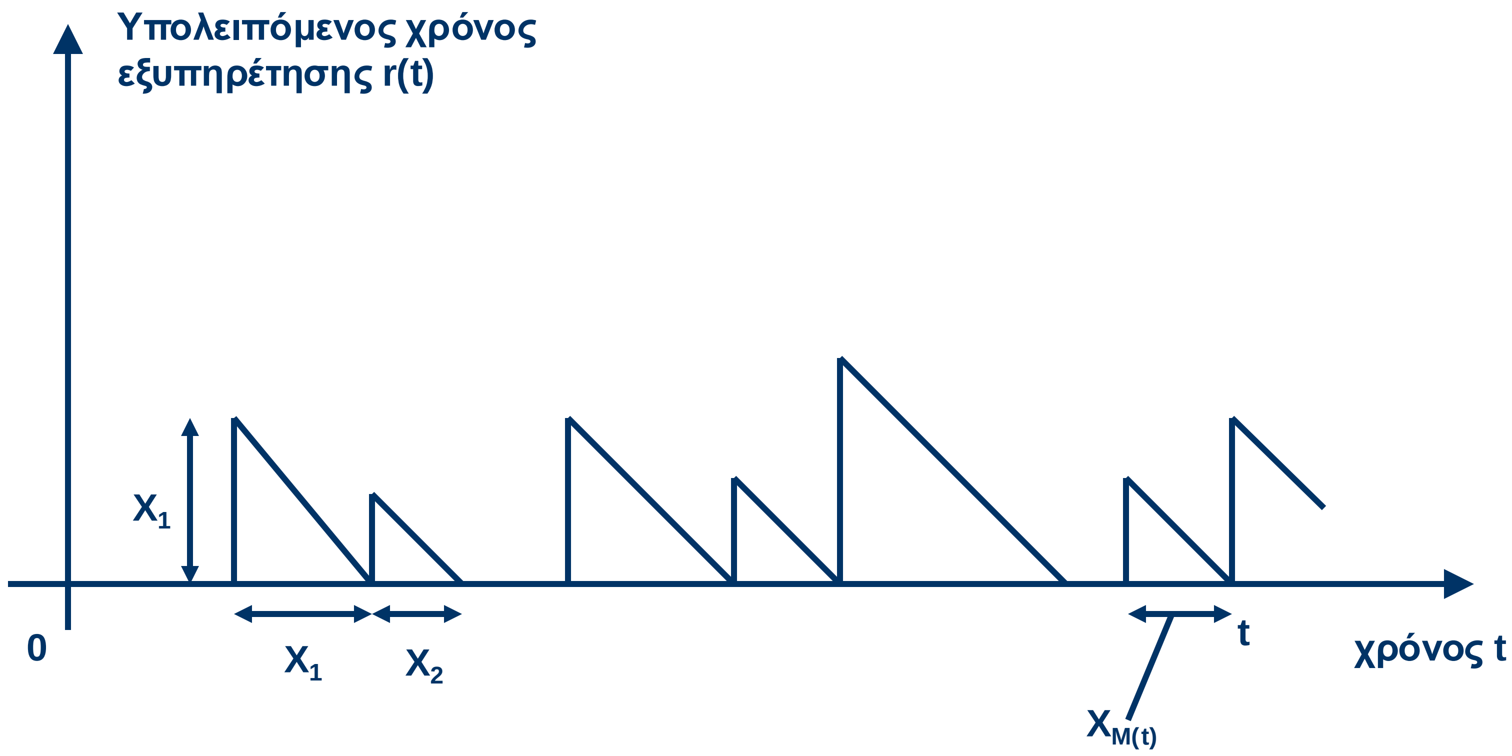
$$R = \frac{\lambda E\{X^2\}}{2}$$

Για το μέσο χρόνο αναμονής (δες επόμενο)

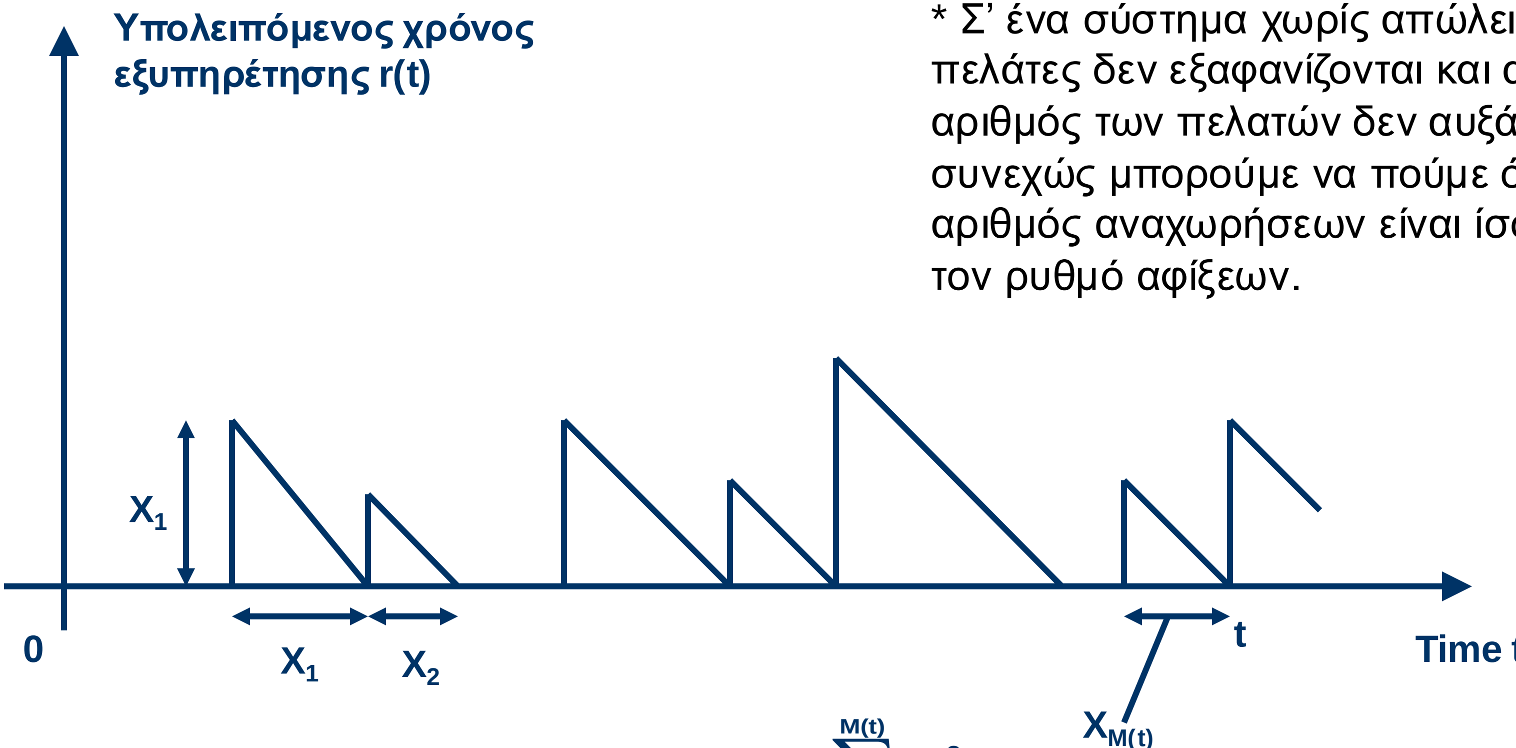
$$W = \frac{\lambda E\{X^2\}}{2(1-\rho)}$$

Το σύστημα M/G/1

Υπολογισμός του υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης



Το σύστημα M/G/1



* Σ' ένα σύστημα χωρίς απώλειες οι πελάτες δεν εξαφανίζονται και αν ο αριθμός των πελατών δεν αυξάνει συνεχώς μπορούμε να πούμε ότι ο αριθμός αναχωρήσεων είναι ίσος με τον ρυθμό αφίξεων.

$$\frac{1}{t}\int_0^t r(\tau)d\tau = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{M(t)}\frac{1}{2}X_i^2 = \frac{1}{2}\frac{M(t)}{t}\frac{\sum_{i=1}^{M(t)}X_i^2}{M(t)}$$

M(t): ο αριθμός των εξυπηρετήσεων στο διάστημα 0-t

Παίρνοντας το όριο όπως το $t \to \infty$ προκύπτει*

$$R = (1/2)\lambda E\{X^2\}$$

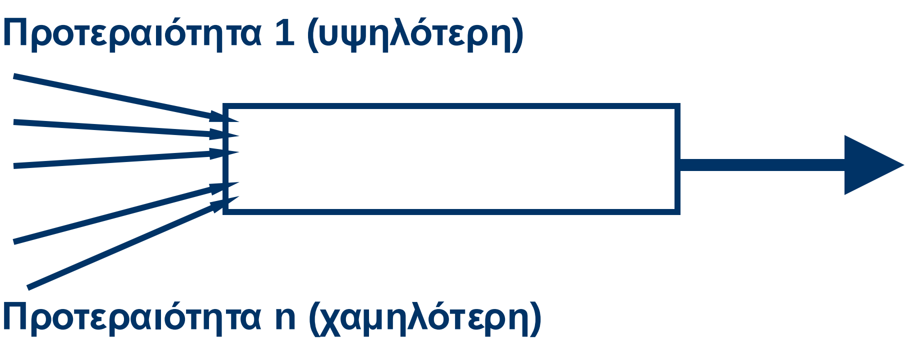
Αναμονή με Προτεραιότητες

- Οι προτεραιότητες εισάγουν πολυπλοκότητα

- Δύο σημαντικά μοντέλα επιδέχονται λύσεις κλειστής μορφής με βάση το μοντέλο M/G/1

Αναμονή με Προτεραιότητες

Μοντέλο 1: Nonpreemptive Priority Queueing



- Ο πελάτης υπό εξυπηρέτηση δεν διακόπτεται
- **n** κλάσεις προτεραιοτήτων(1 = υψηλότερη, …n = χαμηλότερη)
- λ_k, μ_k : ρυθμοί άφιξης και εξυπηρέτησης προτεραιότητας **k**
- W_k : μέσος χρόνος αναμονής για προτεραιότητα **k**
- $\rho_k = \lambda_k / \mu_k$: ένταση κίνησης για προτεραιότητα **k**
- **R** = μέσος υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης

Υποθέτοντας $\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n < 1$ έχουμε

Αναμονή με Προτεραιότητες

Όπως και στην περίπτωση της απόδειξης της P-K εξίσωσης για την υψηλότερη τάξη εξυπηρέτησης έχουμε:

$$W_1 = R + \frac{1}{\mu_1}\mathrm{N}_q^1$$

Από το θεώρημα του Little: $\mathrm{N}_q^1 = \lambda_1 W_1$ και γενικά $\mathrm{N}_q^k = \lambda_k W_k$

$$W_1 = R + \rho_1 W_1$$

$$W_1 = \frac{R}{1-\rho_1}$$

$$W_2 = R + \frac{1}{\mu_1}\mathrm{N}_q^1 + \frac{1}{\mu_2}\mathrm{N}_q^2 + \frac{1}{\mu_1}\lambda_1 W_2$$

Ο τελευταίος όρος στην εξίσωση περιγράφει την καθυστέρηση η οποία οφείλεται στους πελάτες υψηλότερης προτεραιότητας οι οποίοι θα φτάσουν στο σύστημα όσο ο πελάτης της προτεραιότητας 2 περιμένει στην ουρά.

Αναμονή με Προτεραιότητες

Από το θεώρημα του Little: $W_2 = R + \rho_1 W_1 + \rho_2 W_2 + \rho_1 W_2$

$$W_2 = \frac{R + \rho_1 W_1}{1 - \rho_1 - \rho_2}$$

$$W_2 = \frac{R}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}$$

Αναμονή με Προτεραιότητες

Γενικευμένα

$$W_k = \frac{R}{(1-\rho_1 - \ldots - \rho_{k-1})(1-\rho_1 - \ldots - \rho_k)}, \qquad k = 1,\ldots,n$$

$$R = \frac{1}{2}\overline{X^2}$$

$$\overline{X^2} = \lambda_1 E\{X_1^2\} + \ldots + \lambda_n E\{X_n^2\}$$

Σημειώστε την ανεξαρτησία του χρόνου αναμονής $\mathbf{W_k}$ της υψηλής προτεραιότητας από το ρυθμό άφιξης λ_i χαμηλής προτεραιότητας.

Αναμονή με Προτεραιότητες

Μοντέλο 2: Preemptive Resume Priority

- Ο υπό εξυπηρέτηση πελάτης διακόπτεται από αφικνούμενο πελάτη υψηλότερης προτεραιότητας
- Η εξυπηρέτηση του πελάτη που διεκόπη ξαναρχίζει από το σημείο της διακοπής
- Μέσος χρόνος στο σύστημα για προτεραιότητα **k**

1. Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη προτεραιότητας k: $1/\mu_\kappa$
2. Μέσος χρόνος υπολειπόμενης εξυπηρέτησης πελάτη με προτεραιότητα 1 ως k

$$\frac{R_k}{1-\rho_1-\cdots-\rho_k} \qquad \mathbf{R_k = \frac{\sum_{1}^{k} \lambda_i E\{X_i^2\}}{2}}$$

3. Ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης για πελάτες με προτεραιότητα 1 ως k που φτάνουν στο σύστημα όταν ο πελάτης k είναι στο σύστημα είναι:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\mu_k} \lambda_i \mathrm{T}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i \mathrm{T}_k$$

Αναμονή με Προτεραιότητες

Μοντέλο 2: Preemptive Resume Priority

$$\mathrm{T}_k = \frac{1}{\mu_k} + \frac{R_k}{1-\rho_1-\cdots-\rho_k} + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i \, \mathrm{T}_k$$

Για k=1

$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{\mu_1} + \frac{R_k}{1-\rho_1} + \rho_1 \mathrm{T}_1$$

$$\mathrm{T}_1 = \frac{\left(\frac{1}{\mu_1}\right)(1-\rho_1) + R_1}{(1-\rho_1)}$$

$$\mathrm{T}_k = \frac{\left(\frac{1}{\mu_k}\right)(1-\rho_1-\cdots-\rho_k) + R_k}{(1-\rho_1-\cdots-\rho_{k\,-\,1})(1-\rho_1-\cdots-\rho_k)}$$

όπου

$$\mathbf{R_k} = \frac{\sum_{1}^{k} \lambda_i E\{X_i^2\}}{2}$$

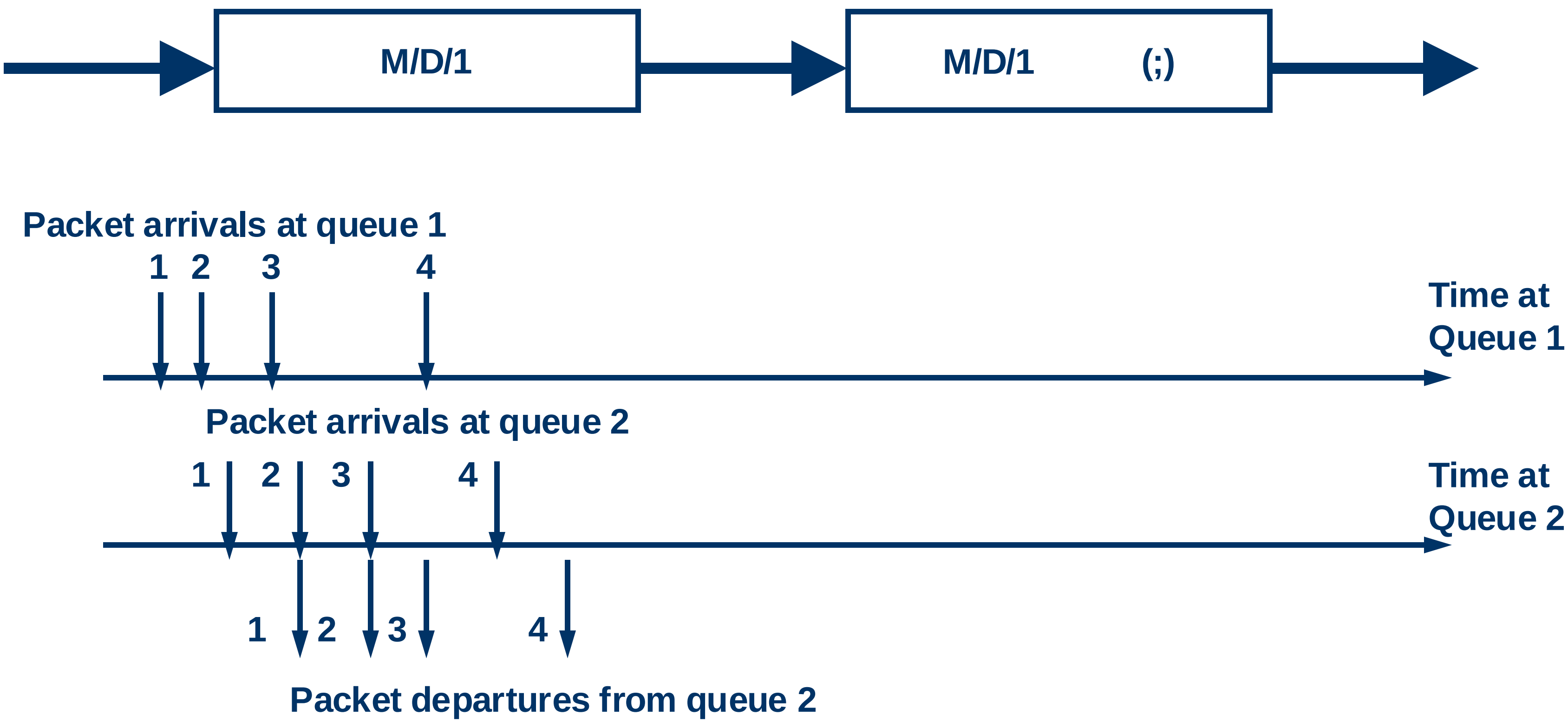
Δίκτυα Ουρών

- Δύσκολο να βρεθούν λύσεις κλειστής μορφής

- Χρειάζονται απλουστευτικές υποθέσεις

Δίκτυα Ουρών

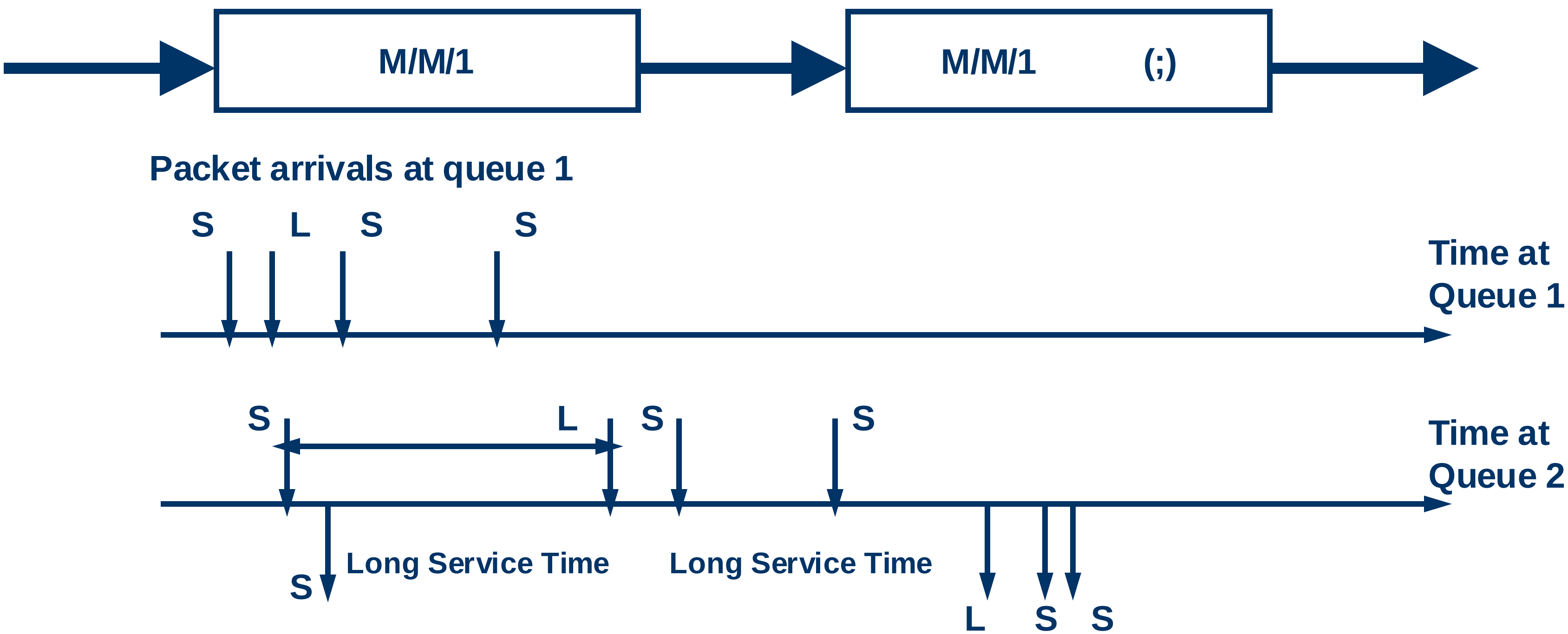
Ουρές στη σειρά: Παράδειγμα 1



- Δεν υπάρχει αναμονή στη δεύτερη ουρά
- Το μοντέλο M/D/1 δεν εφαρμόζεται στη δεύτερη ουρά

Δίκτυα Ουρών

Ουρές στη σειρά: Παράδειγμα 2



- Χρόνος «ενδοάφιξης» στη 2η ουρά είναι μεγάλος όταν λαμβάνεται μεγάλο πακέτο
- Οι χρόνοι αφίξεων εξαρτώνται από τα μήκος των πακέτων. (Interarrival times are dependent on the packet lengths…)
  - Η 2η ουρά δεν είναι M/M/1

Δίκτυα Ουρών

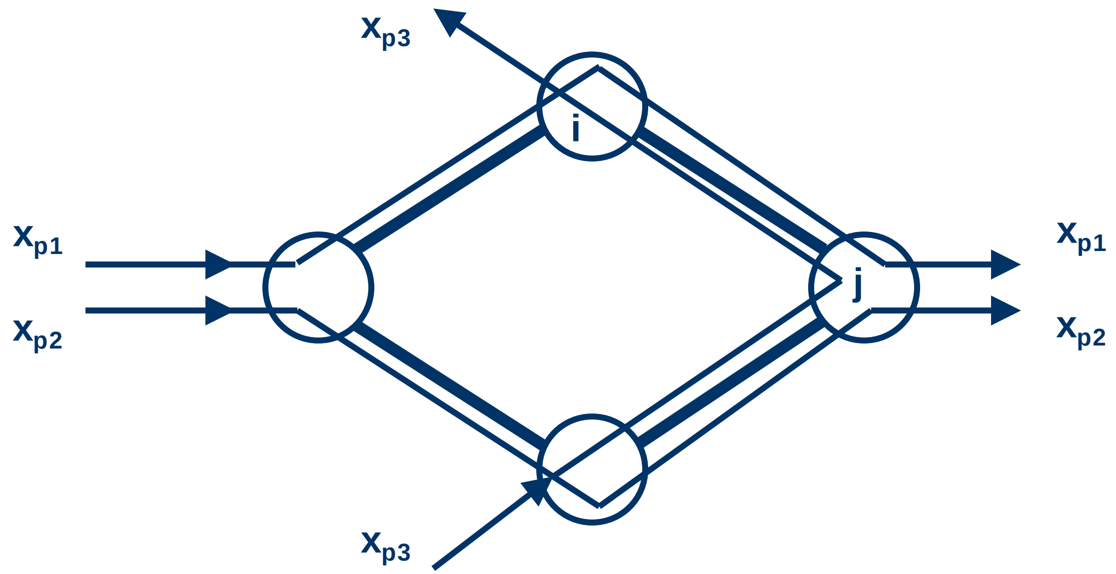
- Ενδιαφέρον αποτέλεσμα για το «εν σειρά» σύστημα M/M/1 :

  Η διαδικασία αναχωρήσεων από τη 1η ουρά είναι Poisson (Burke's Theorem). Επομένως, αν οι χρόνοι αφίξεων και εξυπηρετήσεων ήταν ανεξάρτητοι, η 2η ουρά θα ήταν M/M/1.

- Η συνήθης υπόθεση στα δίκτυα επικοινωνιών είναι να υποθέσουμε αυτή την ανεξαρτησία.

Δίκτυα Ουρών

Μοντέλο δικτύων ουρών



- Διάφορες ροές πακέτων. Η ροή στο μονοπάτι **p**, έχει ρυθμό $\mathbf{x_p}$ (packets / sec)
- Ολικός ρυθμός άφιξης στη ζεύξη (i,j)
- $\lambda_{ij} = \Sigma \mathbf{x_p}$ όλα τα μονοπάτια p που διέρχονται από τη ζεύξη (i,j)
- μ_{ij} = Ρυθμός εξυπηρέτησης στη ζεύξη (i,j)
- $\mathbf{N_{ij}}$ = Μέσος αριθμός πακέτων στη ζεύξη (i,j)

Δίκτυα Ουρών

Προσέγγιση Ανεξαρτησίας του Kleinrock

- Υποθέτει ότι όλες οι ουρές (i,j) συμπεριφέρονται όπως η M/M/1 με δοσμένο ρυθμό άφιξης λ_{ij}, ρυθμό εξυπηρέτησης μ_{ij}, και καθυστέρηση επεξεργασίας / διάδοσης d_{ij}.

- $N_{ij} = \dfrac{\lambda_{ij}}{\mu_{ij} - \lambda_{ij}} + \lambda_{ij} d_{ij}$

- Μέσος αριθμός πακέτων σε ολόκληρο το δίκτυο.

$$N = \sum_{(i,j)} N_{ij} = \sum_{(i,j)} \left(\frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ij} - \lambda_{ij}} + \lambda_{ij} d_{ij} \right)$$

Δίκτυα Ουρών

- Μέσος χρόνος στο σύστημα (θεώρημα Little)

$$\mathbf{T = \frac{1}{\lambda}\sum_{(i,j)}\left(\frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ij} - \lambda_{ij}} + \lambda_{ij}d_{ij}\right)}$$

όπου $\mathbf{\lambda = \Sigma_p x_p}$ είναι ο συνολικός ρυθμός άφιξης

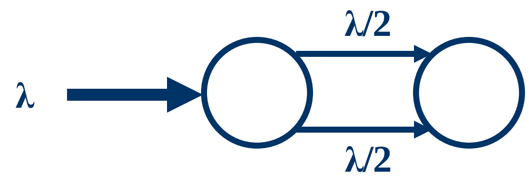
Δίκτυα Ουρών

Ποιότητα της «Προσέγγισης Ανεξαρτησίας»

- Αρκετά καλή για πυκνά διασυνδεδεμένα δίκτυα και μέτριο προς βαρύ φορτίο.
- Καλή για εφαρμογές που η ακρίβεια πρόβλεψης δεν είναι πολύ σημαντική.
- Χρήσιμη για υπολογισμούς τοπολογικού σχεδιασμού, ως συμπλήρωμα σε προσομοιώσεις κλπ.

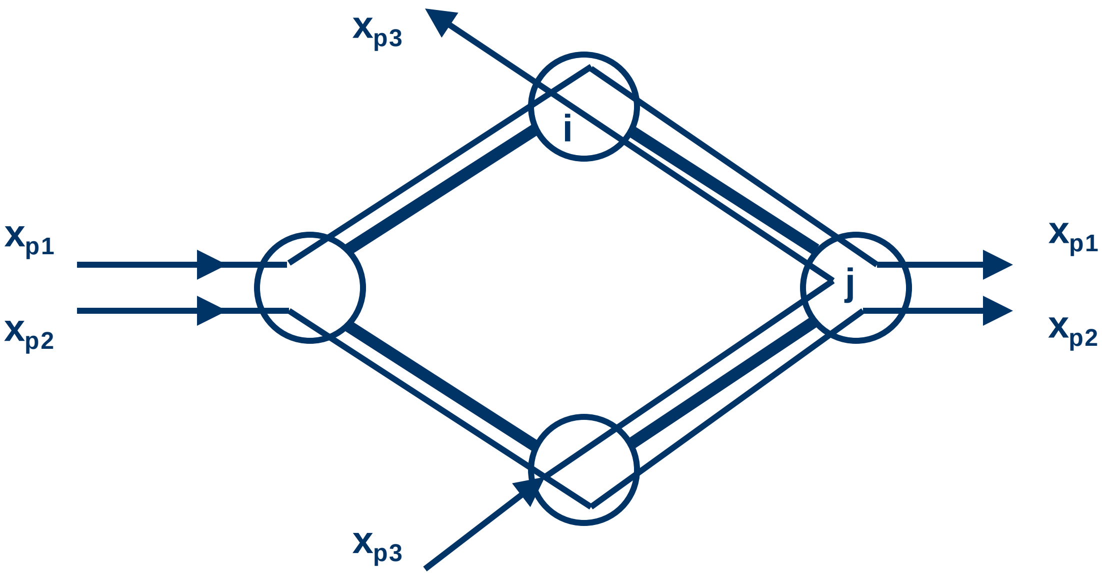
Δίκτυα Ουρών

<u>Παράδειγμα</u> όπου η Προσέγγιση του Kleinrock δεν είναι καλή



- Ροή πακέτων Poisson διαχωρίζεται σε δύο ίσης χωρητικότητας ζεύξεις.
- Εάν το αφικνούμενο πακέτο τοποθετείται στην μικρότερη ουρά, το σύστημα συμπεριφέρεται ως μία ουρά M/M/2 με ρυθμό λ.
- Η προσέγγιση ανεξαρτησίας λέει ότι κάθε ουρά συμπεριφέρεται ως M/M/1 με ρυθμό λ/2. Λάθος εκτίμηση.

Θεώρημα του JACKSON



Υποθέσεις:

- Αφίξεις από το εξωτερικό του δικτύου είναι Poisson.
- Σε κάθε ουρά, όλες οι ροές πακέτων έχουν την ίδια εκθετική κατανομή για τους χρόνους εξυπηρέτησης.
- Τα πακέτα μοιράζονται με τυχαίο τρόπο στις διαφορετικές διαδρομές.
- Χρόνοι αφίξεων και εξυπηρετήσεων είναι **ανεξάρτητοι**.

Θεώρημα του JACKSON

Τότε:

- Η πιθανοτική κατανομή σε κατάσταση ισορροπίας του αριθμού των πελατών σε κάθε ουρά είναι η ίδια με αυτή της μεμονωμένης ουράς M/M/1.
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της κατανομής και των μέσων καθυστερήσεων σε κατάσταση ισορροπίας.

Αξιοσημείωτο αποτέλεσμα επειδή η συνδυασμένη διαδικασία αφίξεων σε κάθε ουρά μπορεί να μην είναι Poisson.

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδεια Χρήσης

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών, Μεράκος Λάζαρος 2014. «Δίκτυα Επικοινωνιών ΙΙ. Ενότητα 2: Συστήματα Αναμονής». Έκδοση: 1.01. Αθήνα 2014.
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://opencourses.uoa.gr/courses/DI15

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης