Ανάλυση ΙΙ - 1ο μάθημα

Σκοπός:

- Επεκτείνουμε τις έννοιες της Ανάλυσης που είδαμε στην πραγματική ευθεία (όριο, παράγωγο, ολοκλήρωμα...) σε χώρους μεγαλύτερης διάστασης
- Αναπτύσσουμε εργαλεία για τη μελέτη συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Βιβλία - Σημειώσεις:

1) Marsden και Tromba: Διανυσματικός Λογισμός (Π.Ε.Κ.)
2) Finney - Weir - Giordano: Απειροστικός Λογισμός του Thomas (2ος Τόμος) (Π.Ε.Κ.)
3) Σημειώσεις Απειροστικού Λογισμού ΙΙΙ του Σ. Μερκουράκη (e-class)

Οι Διανυσματικοί χώροι $\mathbb{R}^n$

Έχουμε δύο αναπαραστάσεις για καθένα από τα σύνολα $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

Αλγεβρική — **Γεωμετρική**

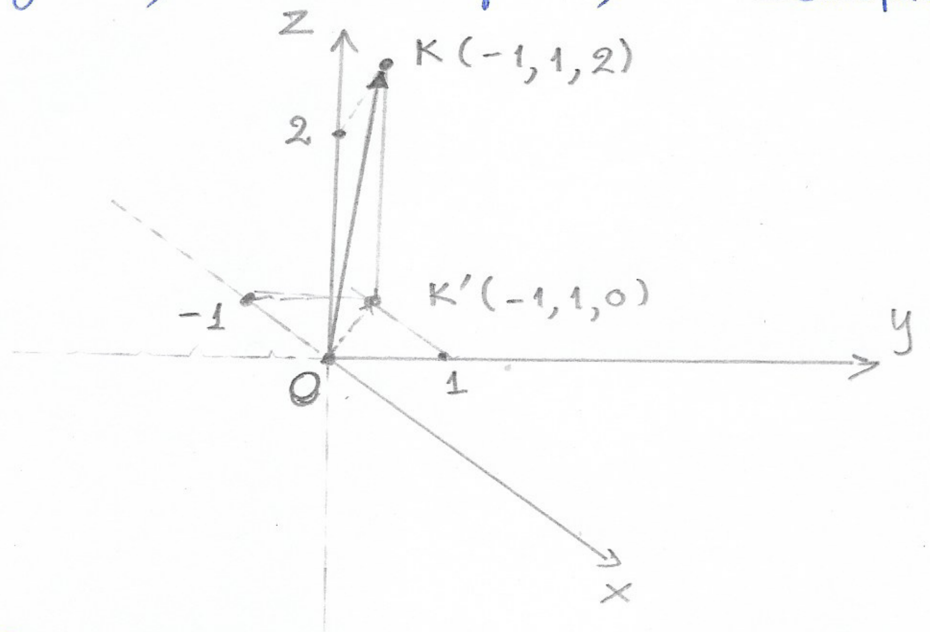
$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$ — Διανύσματα (ή σημεία) στο επίπεδο

$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}\}$ — Διανύσματα (ή σημεία) στον χώρο.

Η αντιστοιχία μεταξύ των δύο αυτών αναπαραστάσεων γίνεται μέσω ενός Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

Στον χώρο:

Τρεις άξονες, με κοινή αρχή O, ανά δύο ορθογώνιοι, κατευθυνόμενοι, διαβαθμισμένοι:



Η διατεταγμένη τριάδα $(-1,1,2)$ αντιστοιχίζεται στο σημείο K και στο διάνυσμα $\overrightarrow{OK}$. Γράφουμε $\overrightarrow{OK} = (-1,1,2)$

Πράξεις

Υπενθυμίζουμε ότι τα σύνολα $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ γίνονται διανυσματικοί χώροι με πράξεις την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, οι οποίες αλγεβρικά ορίζονται κατά συντεταγμένη, δηλαδή, στον $\mathbb{R}^3$:

Αν $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

- $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
- $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$

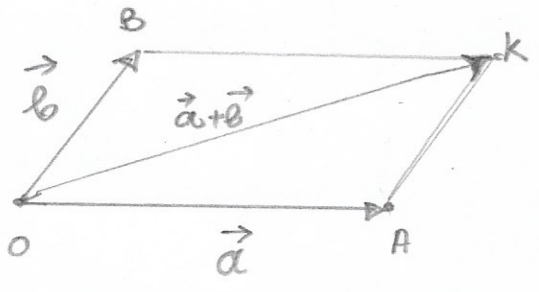
Θεωρούμε τις ιδιότητες των πράξεων γνωστές από τη Γραμμική Άλγεβρα.

Γεωμετρικά

Στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$ (δύο διανύσματα με κοινή αρχή βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο)

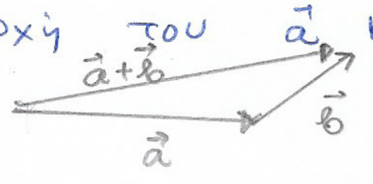
Πρόσθεση:

- Αν τα $\vec{a}, \vec{b}$ έχουν κοινή αρχή O,* τότε το $\vec{a} + \vec{b}$ είναι η διαγώνιος του παρ/μμου που ορίζουν, με αρχή το O



(* και δεν είναι συγγραμμικά)

- Αν τοποθετήσουμε τα $\vec{a}, \vec{b}$ διαδοχικά, ώστε το $\vec{b}$ να ξεκινάει από το πέρας του $\vec{a}$, τότε το $\vec{a}+\vec{b}$ είναι το διάνυσμα με αρχή την αρχή του $\vec{a}$ και πέρας το πέρας του $\vec{b}$.



Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

Το διάνυσμα $\lambda\vec{a}$ έχει μήκος:

$|\lambda|\cdot$ (μήκος του $\vec{a}$),

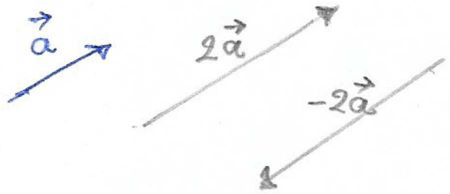
διεύθυνση ίδια με του $\vec{a}$

και φορά

ίδια με το $\vec{a}$ αν $\lambda > 0$

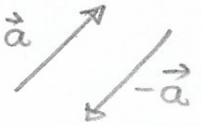
αντίθετη του $\vec{a}$ αν $\lambda < 0$

(Αν $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$, τότε $\lambda\vec{a} = \vec{0}$).



Το αντίθετο του $\vec{a}$

Αν $\vec{a} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, τότε

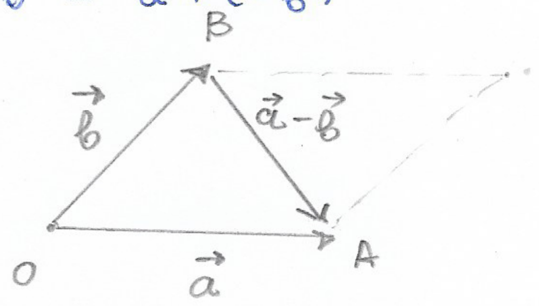


$$-\vec{a} = (-1)\cdot\vec{a} = (-x, -y, -z)$$

(ίδιο μέτρο με το $\vec{a}$ και αντίθετη φορά)

Διαφορά δύο διανυσμάτων

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



$$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$$

Αν $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, τότε

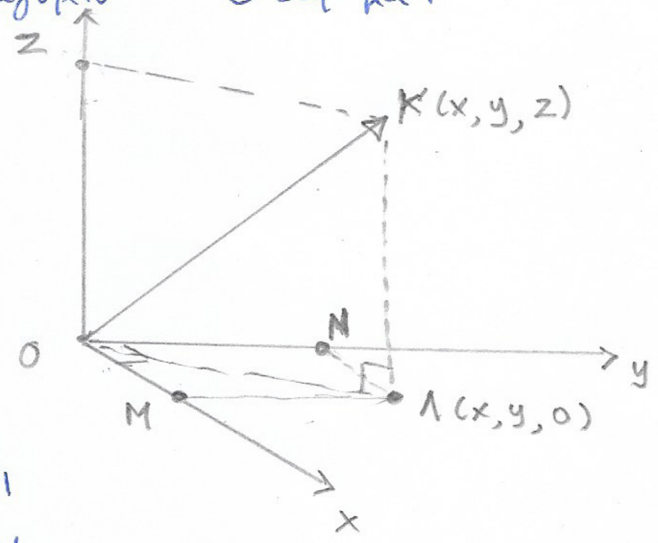
$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2)$$

Μήκος ή μέτρο ή νόρμα διανύσματος

Στον $\mathbb{R}^3$, αν $\vec{a} = (x, y, z)$, τότε

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(Απόδειξη: Εφαρμόζουμε δύο φορές το Πυθαγόρειο Θεώρημα)

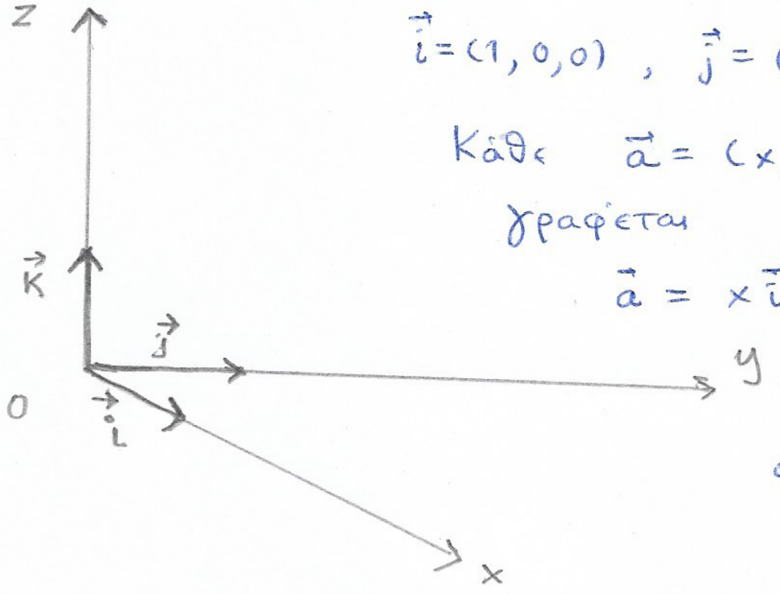


$(OM) = |x|$

$(ON) = |y|$

$(OΛ) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad (OK) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$



$\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$

Κάθε $\vec{a} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ γράφεται ως

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\cdot\vec{k}$$

(γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)

Μεταφορά στον $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

Α. Γίνεται διανυσματικός χώρος με πράξεις

Πρόσθεση: Αν $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

τότε

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

και βαθμωτό πολλαπλασιασμό:

Αν $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$,

τότε

$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Β. Μέτρο ή νόρμα διανύσματος

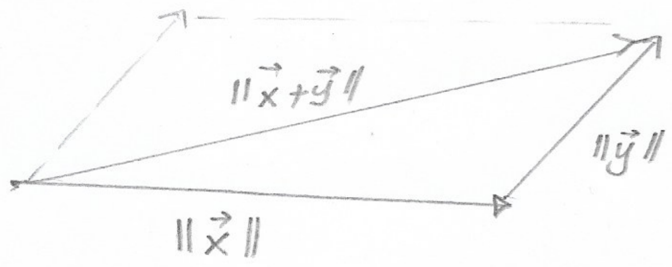
Αν $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, τότε

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Η νόρμα ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα!

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

Γεωμετρικά:



(Θα δούμε αλγεβρική απόδειξη σε λίγο).

Πότε η τριγωνική ανισότητα ισχύει ως ισότητα; Δηλαδή σε ποια περίπτωση ισχύει

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \;;$$

Όταν και μόνο όταν τα $\vec{x}, \vec{y}$ είναι ομόρροπα - δηλαδή $\vec{x} = \lambda\vec{y}$, για κάποιο $\lambda \geq 0$ ή $\vec{y} = \vec{0}$.

(Αλγεβρική απόδειξη θα δούμε σε λίγο).

γ. Απόσταση δύο σημείων στον $\mathbb{R}^n$

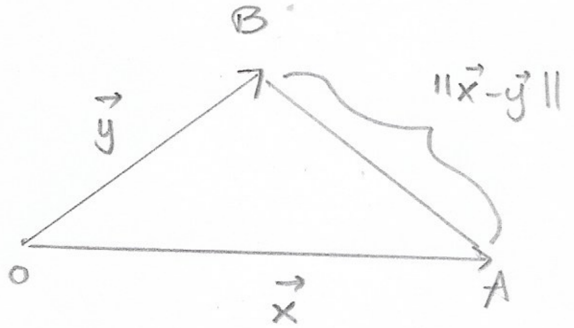
Αν $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, η <u>(Ευκλείδεια) απόστασή</u> τους είναι:

$$\|\vec{x}-\vec{y}\| = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + \ldots + (y_n-x_n)^2}$$

Γεωμετρικά, αν

$\vec{x} = \vec{OA}$ και $\vec{y} = \vec{OB}$,

τότε $\|\vec{x}-\vec{y}\| = (AB)$

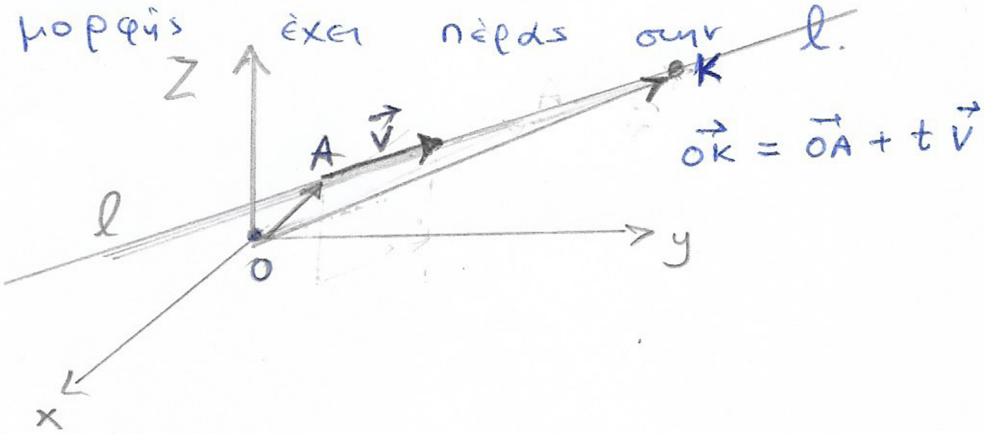


Εφαρμογή:
Παραμετρική εξίσωση ευθείας στον χώρο

Μία ευθεία l στον τριδιάστατο χώρο προσδιορίζεται από ένα σημείο της A και ένα διάνυσμα $\vec{v}$ που καθορίζει τη διεύθυνσή της.

Αν $\vec{a} = \vec{OA}$, τότε:

Κάθε διάνυσμα $\vec{w}$ με αρχή το O και πέρας πάνω στην ευθεία l θα γράφεται στη μορφή $\vec{w} = \vec{a} + t\vec{v}$, για κάποιο $t \in \mathbb{R}$, και, αντίστροφα, κάθε διάνυσμα αυτής της μορφής έχει πέρας στην l.



Η εξίσωση

$$\vec{l}(t) = \vec{a} + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

λέγεται <u>παραμετρική εξίσωση</u> της ευθείας l.

Φυσικά, αλλάζοντας το αρχικό σημείο A, παίρνουμε μία διαφορετική παραμετρικοποίηση της ίδιας ευθείας.

Παράδειγμα 1.

α) Βρείτε την παραμετρική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,0,0)$ και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{v} = (-1,2,3)$.

Απ. Είναι $\vec{l}(t) = (1-t,\ 2t,\ 3t)$, $t \in \mathbb{R}$

β) Εξετάστε αν αυτή η ευθεία διέρχεται από το σημείο $\Gamma(2,-2,-3)$.

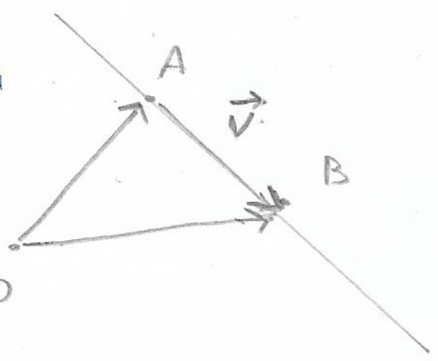
Απ. Θα πρέπει να υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ με $1-t=2$, $2t=-2$, $3t=-3$.
Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων έχει λύση το $t=-1$. Άρα η ευθεία διέρχεται από το Γ.

Παράδειγμα 2.

Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1,2,3)$ και $B(2,5,0)$.

Απ. Η ευθεία έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (2-1,\ 5-2,\ 0-3)$, δηλαδή του: $\vec{v} = (1,3,-3)$.

Αφού διέρχεται από το σημείο $A(1,2,3)$ έχει εξίσωση
$\vec{l}(t) = \vec{OA} + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$,
δηλαδή
$\vec{l}(t) = (1+t,\ 2+3t,\ 3-3t)$, $t \in \mathbb{R}$



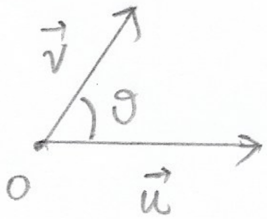
Εσωτερικό γινόμενο - γωνία δύο διανυσμάτων

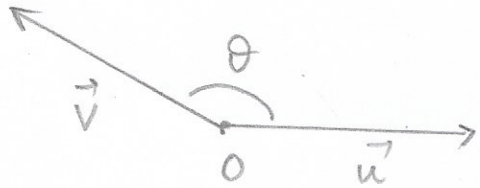
Στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται μία ακόμα πράξη:
Το <u>εσωτερικό γινόμενο.</u>

Με αυτή την πράξη, ένα ζευγάρι διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ απεικονίζεται σε έναν αριθμό $\vec{x} \cdot \vec{y} \in \mathbb{R}$.

Ξεκινάμε πάλι από τους $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$:

Αν $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ (ή $\mathbb{R}^2$) με $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$,
η γωνία $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ των δύο διανυσμάτων είναι η κυρτή γωνία που σχηματίζουν αν τα τοποθετήσουμε με κοινή αρχή.





Γενικά ισχύει: $0 \leq \theta \leq \pi$.

Στον $\mathbb{R}^3$ (ή $\mathbb{R}^2$), το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ορίζεται ως εξής:
(γεωμετρικά)

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, αν $\vec{u} = \vec{0}$ ή $\vec{v} = \vec{0}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$, αν $\vec{u} \neq \vec{0}$ και $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Παρατηρούμε ότι ισχύει:

(1) $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

Αν $\vec{u} \neq \vec{0}$ και $\vec{v} \neq \vec{0}$, τότε το «=» ισχύει αν και μόνο αν $|\cos\theta| = 1$, δηλαδή αν και μόνο αν $\theta = 0$ ή π.

Ειδικότερα, για $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ έχουμε:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \iff \theta = 0 \iff \vec{u}, \vec{v} \text{ ομόρροπα}$$

και

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \iff \theta = \pi \iff \vec{u}, \vec{v} \text{ αντίρροπα.}$$

Η (1) είναι ειδική περίπτωση της Ανισότητας Cauchy - Schwarz, η οποία, όπως θα δούμε σε λίγο, ισχύει σε κάθε χώρο $\mathbb{R}^n$.

(2) $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, για κάθε $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$

(3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$

(εδώ θεωρούμε ότι το $\vec{0}$ είναι κάθετο σε οποιοδήποτε διάνυσμα)

Αλγεβρική έκφραση εσωτερικού γινομένου

Αν $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)\in\mathbb{R}^3$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$,

τότε

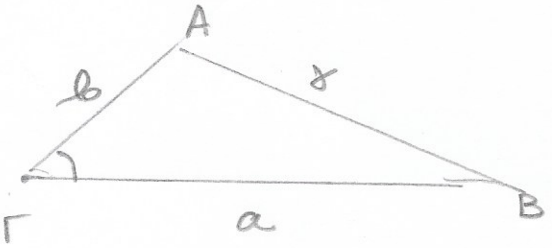
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$$

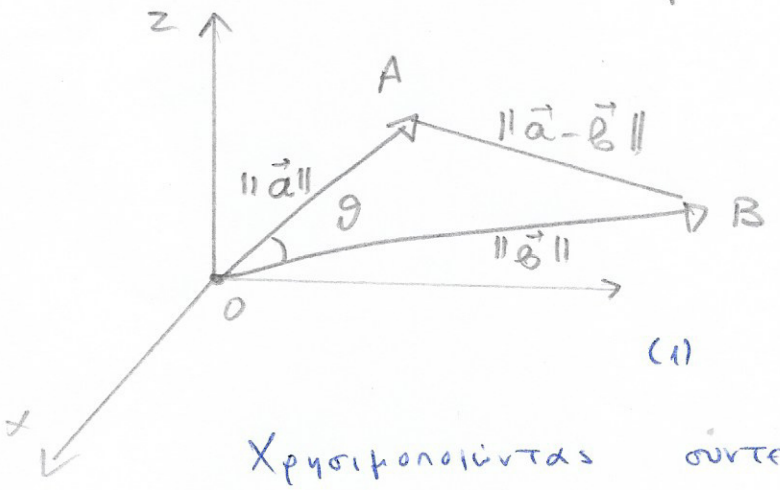
Απόδειξη

Με τον νόμο των συνημιτόνων:

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ:

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\cdot\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$$





Είναι:

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$

δηλαδή

$$(1)\quad \|\vec{a}-\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Χρησιμοποιώντας συντεταγμένες είναι:

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2,$$ δηλαδή

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)$$

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)$$

Συγκρίνοντας τις (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο.