Εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$, $n=1,2,3,\dots$

Αν $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ ορίζουμε το εσωτερικό τους γινόμενο $\vec{x}\cdot\vec{y}$ ως εξής:

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$$

(Θυμηθείτε ότι αυτός ο τύπος αποδείχθηκε ότι ισχύει στους $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, στους οποίους ο αρχικός ορισμός δόθηκε γεωμετρικά:

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cdot\cos\theta \;)$$

Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{x}\cdot\vec{y}$ συμβολίζεται και με $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$.

Παρατηρήστε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι μία απεικόνιση

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Βασικές ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

1) $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$ για κάθε $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ (αντιμεταθετικότητα)

2) $\vec{x}\cdot\vec{x}\geq 0$, για κάθε $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$
και $\vec{x}\cdot\vec{x}=0 \iff \vec{x}=\vec{0}$

Παρατηρήστε ότι $\vec{x}\cdot\vec{x}=x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=\|\vec{x}\|^2$

Για κάθε $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

3) $(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y})$

4) $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

(και $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$)

Οι ιδιότητες 3 και 4 λένε ότι η απεικόνιση εσωτερικό γινόμενο $\langle \, , \, \rangle$ είναι μία διγραμμική μορφή: Αν σταθεροποιήσουμε τη μία μεταβλητή παίρνουμε μία γραμμική (ως προς την άλλη μεταβλητή) απεικόνιση, δηλαδή, για κάθε $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$, η απεικόνιση

$\varphi_z : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\varphi_z(x) = \langle x, z \rangle$ είναι γραμμική.

Το ίδιο και η $\psi_z : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\psi_z(x) = \langle z, x \rangle$.

Τέλος, πολύ βασική είναι η ακόλουθη:

5) Ανισότητα Cauchy-Schwarz

Για κάθε $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$ ισχύει:

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|$$

δηλαδή

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \, \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$$

Απόδειξη

Αν $\vec{x}=\vec{0}$ ή $\vec{y}=\vec{0}$, είναι φανερό ότι η ζητούμενη σχέση ισχύει ως ισότητα.

Θεωρούμε τώρα $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{x}\neq\vec{0}$ και $\vec{y}\neq\vec{0}$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$$

Ισοδύναμα:

$$(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \leq \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$$

Ισοδύναμα:

$$(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 - \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \leq 0.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$\varphi(\lambda) = \|\lambda\vec{x}+\vec{y}\|^2, \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Προφανώς είναι $\varphi(\lambda)\geq 0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Από την άλλη μεριά είναι:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda\vec{x}+\vec{y})\cdot(\lambda\vec{x}+\vec{y}) = \lambda^2(\vec{x}\cdot\vec{x}) + \lambda\vec{y}\cdot\vec{x} + \lambda\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{y}$$

δηλαδή

(Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες 1-4)

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2\|\vec{x}\|^2 + 2\lambda(\vec{x}\cdot\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2$$

Επομένως, η συνάρτηση $\varphi(\lambda)$ είναι τριώνυμο (ως προς λ) το οποίο είναι μη αρνητικό για κάθε τιμή του λ.

Συμπεραίνουμε ότι για τη διακρίνουσα Δ του $\varphi(\lambda)$ ισχύει $\Delta\leq 0$.

Όμως $\Delta = 4(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 - 4\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$. Αφού $\Delta\leq 0$ έπεται ότι: $(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 - \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \leq 0$.

Ας εξετάσουμε τώρα σε ποιες περιπτώσεις η ανισότητα Cauchy-Schwarz ισχύει ως ισότητα.

Όπως ήδη παρατηρήσαμε μία περίπτωση που αυτό ισχύει είναι όταν $\vec{x}=\vec{0}$ ή $\vec{y}=\vec{0}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\vec{x}\neq\vec{0}$ και $\vec{y}\neq\vec{0}$ και ότι

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

Αυτό σημαίνει ότι $(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 - \|\vec{x}\|^2\cdot\|\vec{y}\|^2 = 0$,

δηλαδή ότι η διακρίνουσα

$$\Delta = 4(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 - 4\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$$

του τριωνύμου $\varphi(\lambda)$ είναι ίση με 0.

Άρα το τριώνυμο έχει μία ρίζα, δηλαδή υπάρχει $\lambda_0\in\mathbb{R}$ με $\varphi(\lambda_0)=0$,

δηλαδή $\|\lambda_0\vec{x}+\vec{y}\| = 0$, δηλαδή

$\boxed{\vec{y} = -\lambda_0\vec{x}}$ (το $\vec{y}$ είναι πολλαπλάσιο του $\vec{x}$).

Αντίστροφα, αν για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι $\vec{y}=\lambda\vec{x}$, τότε

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| = |\vec{x}\cdot(\lambda\vec{x})| = |\lambda|\,|\vec{x}\cdot\vec{x}| = |\lambda|\,\|\vec{x}\|^2 = |\lambda|\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{x}\|,$$

άρα

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| = \|\lambda\vec{x}\|\cdot\|\vec{x}\| = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|.$$

Συμπεραίνουμε ότι:

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \iff \vec{x}=\vec{0} \text{ ή } \vec{y}=\vec{0} \text{ ή υπάρχει } \lambda\in\mathbb{R} \text{ με } y=\lambda\vec{x}$$

Γωνία δύο διανυσμάτων

Το εσωτερικό γινόμενο μας επιτρέπει να μιλάμε για τη γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^n$.

Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$ και $\vec{y} \neq \vec{0}$ ορίζουμε ως γωνία των $\vec{x}, \vec{y}$ τη μοναδική γωνία θ με $0 \leq \theta \leq \pi$ για την οποία

$$\cos\theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|}$$

Παρατηρήστε ότι η ανισότητα Cauchy - Schwarz μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει τέτοια γωνία θ - αφού το δεξί μέλος είναι ένας αριθμός μεταξύ -1 και 1.

Παράδειγμα: Βρείτε το συνημίτονο της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{u} = (1, 0, 1, -1)$ $\vec{v} = (2, 3, 0, 1)$ στον $\mathbb{R}^4$.

Είναι $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{14}$ και $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 1 = 1$. Άρα $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}\,\sqrt{14}}$.

Ειδικότερα: Τα διανύσματα $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ είναι κάθετα (γράφουμε $\vec{x} \perp \vec{y}$) αν και μόνο αν $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$, δηλαδή $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n y_n = 0$.

Παρατηρήστε ότι τα διανύσματα της κανονικής βάσης $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι ανά δύο κάθετα

Ιδιότητες της Ευκλείδειας νόρμας

Εξ ορισμού , για κάθε $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, είναι

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2} = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$$

Ιδιότητες:

1) $\|\vec{x}\| \geq 0$ για κάθε $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ και
$\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x}=\vec{0}$

2) $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

3) Τριγωνική ανισότητα: Για κάθε $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$,
$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Οι (1) και (2) αποδεικνύονται άμεσα.

Η (3) είναι συνέπεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz:

Είναι

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \|\vec{y}\|^2$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

Ερώτηση: Σε ποιες περιπτώσεις ισχύει η ισότητα : $\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$;

Απάντηση: Όταν $\vec{x}\cdot\vec{y} = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$, δηλαδή όταν : $\vec{x}=\vec{0}$ ή $\vec{y}=0$ ή $\vec{y}=\lambda\vec{x}$ με $\lambda>0$ (τα $\vec{x},\vec{y}$) είναι ομόρροπα

Η ανισότητα Cauchy-Schwarz και η τριγωνική ανισότητα έχουν ενδιαφέρον και από αλγεβρική άποψη:

Για οποιεσδήποτε n-άδες πραγματικών αριθμών $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ισχύουν:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2}$$

και

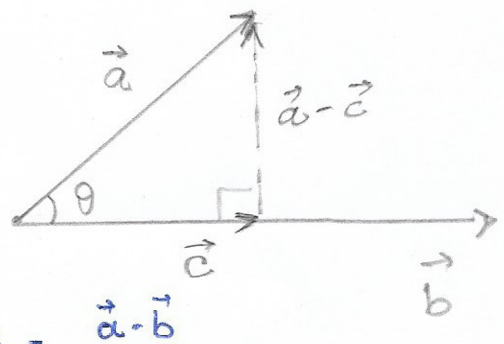
$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2}.$$

Εφαρμογές του εσωτερικού γινομένου - Ασκήσεις

1. Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα

Έστω $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ δύο μη μηδενικά διανύσματα.
Η (ορθογώνια) προβολή του $\vec{a}$ στο $\vec{b}$ είναι ένα διάνυσμα $\vec{c}$ το οποίο έχει τη διεύθυνση του $\vec{b}$ και είναι τέτοιο ώστε $\vec{a} - \vec{c} \perp \vec{b}$.

Άρα
$\vec{c} = t\vec{b}$ και $\vec{a} - \vec{c} \perp \vec{b}$,



δηλαδή

$(\vec{a} - t\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$, δηλαδή

$\vec{a} \cdot \vec{b} - t\|\vec{b}\|^2 = 0$, άρα $t = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$

και $\boxed{\vec{c} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}}$.

Παρατηρούμε ότι, γράφοντας $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta$, έχουμε $\vec{c} = \|\vec{a}\| \cdot \cos\theta \cdot \left(\dfrac{1}{\|\vec{b}\|} \vec{b} \right)$ και, αφού το $\dfrac{1}{\|\vec{b}\|} \vec{b}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα ομόρροπο με το $\vec{b}$, το αποτέλεσμα επιβεβαιώνεται και γεωμετρικά.

2. Εμβαδόν παραλληλογράμμου

Έστω $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ μη μηδενικά διανύσματα.

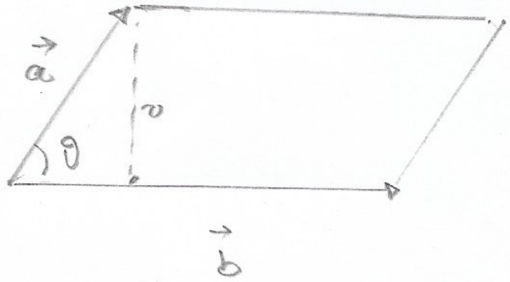
Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές $\vec{a}, \vec{b}$ δίνεται από τον τύπο

$$E = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

Απόδειξη

Έστω θ η γωνία των $\vec{a}, \vec{b}$.

Είναι



$$E = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin\theta$$

$$\Leftrightarrow E = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$\Leftrightarrow E = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sqrt{1 - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2}}$$

$$\Leftrightarrow E = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \frac{\sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

$$\Leftrightarrow E = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

3. Εστω $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Δείξτε ότι

$$\sup\{ a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \ : \ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 \} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

Απόδειξη

Με συμβολισμό διανυσμάτων θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\sup\{ \vec{a} \cdot \vec{x} \ : \ \|\vec{x}\| = 1 \} = \|\vec{a}\|$$

Παρατηρούμε ότι, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, για κάθε $\vec{x}$ με $\|\vec{x}\| = 1$ ισχύει

$$\vec{a} \cdot \vec{x} \leq |\vec{a} \cdot \vec{x}| \leq \|\vec{a}\| \, \|\vec{x}\| = \|\vec{a}\|$$

Άρα $\sup\{ \vec{a} \cdot \vec{x} : \|\vec{x}\| = 1 \} \leq \|\vec{a}\|$

Θα δείξουμε τώρα ότι υπάρχει $\vec{x}$ με $\|\vec{x}\| = 1$ και $\vec{a} \cdot \vec{x} = \|\vec{a}\|$.

Από τα προηγούμενα καταλαβαίνουμε ότι για να ισχύει αυτό θα πρέπει να έχουμε ισότητα στην ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Άρα το $\vec{x}$ θα έπρεπε να είναι πολλαπλάσιο του $\vec{a}$ και μάλιστα θετικό πολλαπλάσιο του $\vec{a}$. Αφού έπρεπε και $\|\vec{x}\| = 1$, θα είναι $\vec{x} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$. Πράγματι, για $\vec{x} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$,

έχουμε $\vec{a} \cdot \vec{x} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} \cdot \vec{a} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \|\vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\|$.

Συμπεραίνουμε ότι

$$\sup\{ \vec{a} \cdot \vec{x} : \|\vec{x}\| = 1 \} = \max\{ \vec{a} \cdot \vec{x} : \|\vec{x}\| = 1 \} = \|\vec{a}\|.$$