Στοιχεία τοπολογίας του $\mathbb{R}^n$ - Όριο συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ έχουμε ορίσει την Ευκλείδεια νόρμα: Αν $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

και μέσω αυτής την απόσταση δύο σημείων*: Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}.$$

Έστω τώρα $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία συνάρτηση, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $\vec{l} \in \mathbb{R}^m$.

Εντελώς διαισθητικά μπορούμε να πούμε ότι:

«Θα λέμε ότι το όριο της συνάρτησης f όταν το $\vec{x}$ τείνει στο $\vec{x}_0$ είναι $\vec{l}$, αν οι τιμές $f(\vec{x})$ πλησιάζουν απεριόριστα κοντά στο $\vec{l}$ καθώς τα $\vec{x}$ πλησιάζουν το $\vec{x}_0$.»

Προφανώς αυτός ο «ορισμός» είναι εντελώς ασαφής.

---

* Στο πλαίσιο αυτής και των επόμενων παραγράφων είναι πιο βολικό να σκεφτόμαστε τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ ως σημεία και όχι ως διανύσματα.

Προκειμένου να μπορούμε να μιλήσουμε με ακρίβεια για έννοιες όπως το «όριο», τη «συνέχεια», την «παράγωγο» συνάρτησης, θα χρειαστεί να αναπτύξουμε μια νέα γλώσσα:

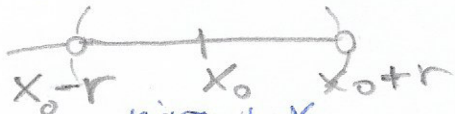
1) Ανοικτές μπάλες στον $\mathbb{R}^n$.
(και κλειστές)

Ορισμός A) Έστω $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $r>0$. Η ανοικτή μπάλα κέντρου $\vec{x}_0$ και ακτίνας r είναι το σύνολο

$$B(\vec{x}_0, r) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \| \vec{x} - \vec{x}_0 \| < r \}$$

- Για $n=1$, δηλαδή στην πραγματική ευθεία,

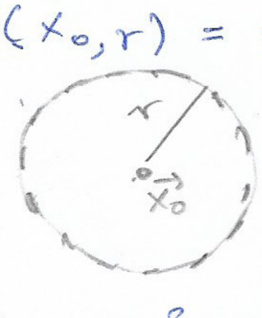
$B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$



το ανοικτό διάστημα κέντρου x_0 και ακτίνας r

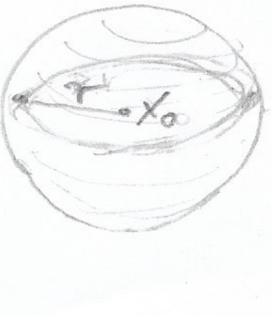
- Για $n=2$, δηλαδή στο επίπεδο,

$B(\vec{x}_0, r)$ = το εσωτερικό του δίσκου με κέντρο $\vec{x}_0$ και ακτίνα r



- Για $n=3$, στον τριδιάστατο χώρο,

$B(\vec{x}_0, r)$ = το εσωτερικό της μπάλας με κέντρο $\vec{x}_0$ και ακτίνα r



β) Η <u>κλειστή μπάλα</u> με κέντρο $\vec{x}_0$ και ακτίνα r είναι το σύνολο

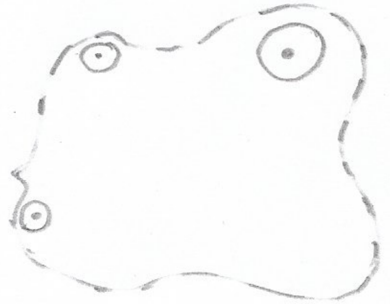
$$\hat{B}(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - x_0\| \leq r\}$$

- Για $n=1$ παίρνουμε το κλειστό διάστημα $[x_0 - r, x_0 + r]$
- Για $n=2$ είναι ο δίσκος κέντρου x_0 και ακτίνας r μαζί με την περιφέρειά του
- Για $n=3$ είναι η μπάλα μαζί με την επιφάνεια της σφαίρας.

2) <u>Ανοικτά σύνολα στον $\mathbb{R}^n$</u>

<u>Ορισμός</u> Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι το U είναι ανοικτό σύνολο, αν, για κάθε $\vec{x}_0 \in U$, υπάρχει κάποιο $r>0$, ώστε η ανοικτή μπάλα $B(\vec{x}_0, r)$ να περιέχεται στο U, δηλαδή $B(\vec{x}_0, r) \subseteq U$.

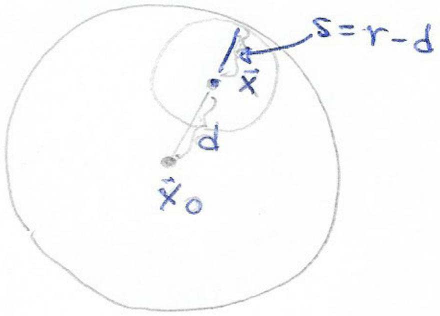
Μιλώντας διαισθητικά, ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό αν δεν περιλαμβάνει τα «συνοριακά» του σημεία.



Αποδεικνύουμε τώρα ότι οι ανοικτές μπάλες είναι ανοικτά σύνολα.

Θεώρημα 1 Για κάθε $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $r>0$, η ανοικτή μπάλα $B(\vec{x}_0, r)$ είναι ανοικτό σύνολο.

Απόδειξη



Έστω $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, r)$

Έστω $d = \|\vec{x}-\vec{x}_0\|$, οπότε $d < r$.

Θέτουμε $s = r-d > 0$ και θα δείξουμε ότι η ανοικτή μπάλα κέντρου $\vec{x}$ και ακτίνας s, η $B(\vec{x}, s)$, περιέχεται στην $B(x_0, r)$.

Έστω $\vec{y} \in B(\vec{x}, s)$. Με βάση την τριγωνική ανισότητα, έχουμε:

$$\|\vec{y}-\vec{x}_0\| = \|(\vec{y}-\vec{x}) + (\vec{x}-\vec{x}_0)\| \le \|\vec{y}-\vec{x}\| + \|\vec{x}-\vec{x}_0\|$$
$$< s + d = r$$

Άρα $\|\vec{y}-\vec{x}_0\| < r$, δηλαδή $\vec{y} \in B(\vec{x}_0, r)$.

Αφού το $\vec{y} \in B(\vec{x}, s)$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $B(\vec{x}, s) \subseteq B(\vec{x}_0, r)$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι το «ανοικτό ημιεπίπεδο» $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ είναι ανοικτό σύνολο.

Παρατηρήστε ότι ο $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό σύνολο - κατά τετριμμένο τρόπο.

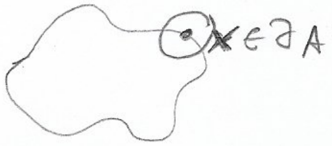
Δεχόμαστε επίσης ότι το κενό σύνολο είναι ανοικτό.

· Ένα ανοικτό σύνολο που περιλαμβάνει το σημείο $\vec{x}_0$ ονομάζεται και (ανοικτή) περιοχή του $\vec{x}_0$. Για παράδειγμα, η $B(\vec{x}_0, r)$ είναι μία περιοχή του $\vec{x}_0$.

3) Συνοριακά σημεία ενός συνόλου

<u>Ορισμός</u>. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>συνοριακό σημείο</u> του A, αν κάθε ανοικτή μπάλα $B(\vec{x}, r)$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A και τουλάχιστον ένα σημείο εκτός του A.

Το σύνολο των συνοριακών σημείων του A ονομάζεται <u>σύνορο</u> του A και συμβολίζεται με ∂A.

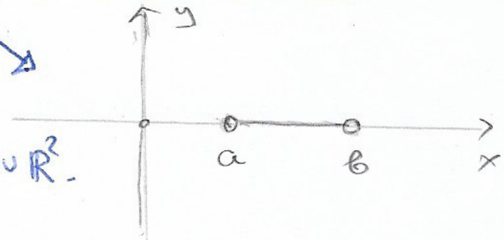


<u>Άσκηση 2</u>

Βρείτε το ∂A στις παρακάτω περιπτώσεις:

1) $A = (a, b)$ ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$

2) $A =$ το διάστημα (a, b) ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$



3) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0 \}$ ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

4) $A = B(\vec{x}_0, r) \setminus \{\vec{x}_0\} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 < \| \vec{x} - \vec{x}_0 \| < r \}$ στο $\mathbb{R}^2$

5) $A = [1, 2] \cup \{3\}$ στο $\mathbb{R}$

4) Σημεία συσσώρευσης ενός συνόλου

Ορισμός. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του συνόλου A, αν κάθε ανοικτή μπάλα $B(\vec{x}_0, r)$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A διαφορετικό από το $\vec{x}_0$.

Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του συνόλου A ονομάζεται παράγωγο σύνολο του A και συμβολίζεται με A'.

Άσκηση 3

Βρείτε το παράγωγο σύνολο A' για καθένα από τα σύνολα A της Άσκησης 2.

Άσκηση 4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Αν το $\vec{x}_0$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A, αποδείξτε ότι κάθε ανοικτή μπάλα $B(x_0, r)$ περιέχει άπειρα σημεία του A.

Άσκηση 5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε τα εξής:

(a) $A' \subseteq A \cup \partial A$

(b) Αν το A είναι ανοικτό, τότε:

(i) $\partial A \cap A = \emptyset$ (το A δεν περιλαμβάνει κανένα συνοριακό του σημείο)

(ii) $A \subseteq A'$ (κάθε σημείο του A είναι σημείο συσσώρευσης του A)

(iii) $A' = A \cup \partial A$

5) Όριο συνάρτησης σε σημείο $\vec{x}_0$.

Ορισμός Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ συνάρτηση, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του A και $\vec{\ell} \in \mathbb{R}^m$.

Λέμε ότι το όριο της συνάρτησης f στο σημείο $\vec{x}_0$ είναι $\vec{\ell}$ (ή ότι το $f(\vec{x})$ τείνει στο $\vec{\ell}$ όταν το $\vec{x}$ τείνει στο $\vec{x}_0$), αν:

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $x \in A$ με $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ να ισχύει $\|f(\vec{x}) - \vec{\ell}\| < \varepsilon$.

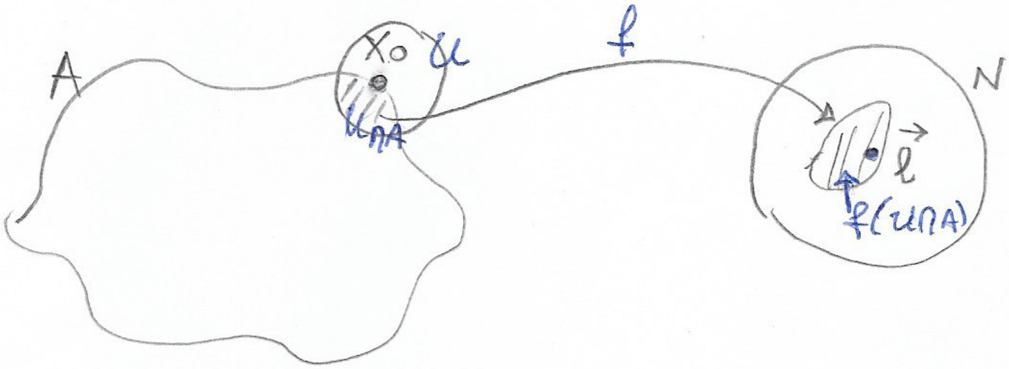
Γράφουμε τότε

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{\ell} \quad \text{ή} \quad f(\vec{x}) \to \vec{\ell} \text{ όταν } \vec{x} \to \vec{x}_0.$$

Μπορούμε να δώσουμε και έναν εναλλακτικό ορισμό που ίσως δίνει καλύτερη εποπτεία:

Λέμε ότι το όριο της συνάρτησης f στο σημείο $\vec{x}_0$ είναι $\vec{\ell}$, αν:

Για κάθε περιοχή N του $\vec{\ell}$ υπάρχει περιοχή $\mathcal{U}$ του $\vec{x}_0$ ώστε, για κάθε $x \neq x_0$ με $\vec{x} \in \mathcal{U} \cap A$ να ισχύει $f(\vec{x}) \in N$.



Παρατηρήστε ότι, σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου, το σημείο $\vec{x}_0$ στο οποίο θεωρούμε το όριο της f δεν απαιτείται να ανήκει στο πεδίο ορισμού A της f - μπορεί να είναι συνοριακό σημείο του A.

Αλλά ακόμα και αν $\vec{x}_0 \in A$, δηλαδή αν η f ορίζεται στο $\vec{x}_0$, η τιμή $f(\vec{x}_0)$ μπορεί να είναι διαφορετική από το $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x})$, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί:

<u>Παράδειγμα 1</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 1$$

Δίνουμε τώρα και ένα παράδειγμα συνάρτησης η οποία δεν έχει όριο σε κάποιο σημείο.

<u>Παράδειγμα 2</u>

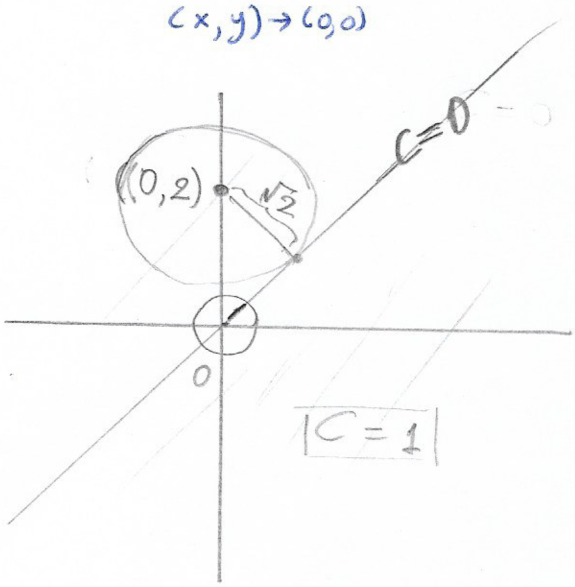
Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \neq y \\ 0, & \text{αν } x = y \end{cases}$$

(α) Δείξτε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = 1$.

(β) Δείξτε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(Παρατηρήστε ότι η ευθεία $y=x$ είναι η καμπύλη στάθμης που αντιστοιχεί στην τιμή $c=0$, ενώ το υπόλοιπο επίπεδο είναι το σύνολο στάθμης που αντιστοιχεί στην τιμή $c=1$).



Λύση (α) Αφού η απόσταση του σημείου $(0,2)$ από την ευθεία $y=x$ είναι ίση με $\sqrt{2}$, έχουμε ότι η ανοικτή μπάλα (δίσκος) $B((0,2),\sqrt{2})$ δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y=x$. Αυτό σημαίνει ότι για οποιοδήποτε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ με $(x,y)\in B((0,2),\sqrt{2})$ είναι $f((x,y))=1$ (ειδικότερα το $f(x,y)$ θα ανήκει σε οποιαδήποτε περιοχή του 1). Αυτό αποδεικνύει ότι $\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = 1$.

(β) Παρατηρούμε ότι:

(1) Καθώς το (x,y) τείνει προς το $(0,0)$ κινούμενο κατά μήκος του άξονα των y $(x=0)$, το $f(x,y)$ έχει την τιμή 1.

Ενώ

(2) Καθώς το (x,y) τείνει προς το $(0,0)$ κινούμενο κατά μήκος της ευθείας $y=x$, είναι $f(x,y)=0$.

Αφού κάθε δίσκος με κέντρο το $(0,0)$ περιέχει τόσο σημεία του άξονα των y όσο και σημεία της ευθείας $y=x$, βλέπουμε ότι το όριο της f στο $(0,0)$ δεν υπάρχει.

Το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στο τελευταίο παράδειγμα για να δείξουμε ότι το όριο της f στο $(0,0)$ δεν υπάρχει, εφαρμόζεται σε πολλές περιπτώσεις που θέλουμε να δείξουμε ότι ένα όριο $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$ δεν υπάρχει: Αρκεί να δείξουμε ότι όταν το $\vec{x}$ τείνει στο $\vec{x}_0$ ακολουθώντας μία διαδρομή α, τότε το $f(\vec{x})$ τείνει σε κάποιο $\vec{l}_1$, ενώ όταν το $\vec{x}$ τείνει στο $\vec{x}_0$ ακολουθώντας μία διαδρομή β, τότε το $f(\vec{x})$ τείνει σε κάποιο $\vec{l}_2 \neq \vec{l}_1$.

Αυτό που σιωπηρά έχουμε δεχθεί είναι η ακόλουθη – διαισθητικά φανερή – πρόταση:

<u>Πρόταση 2</u> (Μοναδικότητα του ορίου)
Αν $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{l}_1$ και $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{l}_2$, τότε $\vec{l}_1 = \vec{l}_2$.

(Η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν της αντίστοιχης πρότασης για συναρτήσεις μιας μεταβλητής και αφήνεται ως άσκηση.)