Διαφορικό

Η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν είναι αρκετή για να μας εξασφαλίσει ότι το γράφημα της συνάρτησης είναι λείο.
Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι μια συνάρτηση που έχει μερικές παραγώγους μπορεί να μην είναι ούτε καν συνεχής.

Παράδειγμα 1 (Άσκηση 5 Φυλλαδίου 3)
Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{ αν } (x,y) \neq (0,0) \text{ και } f(0,0)=0.$$

Θα δείξουμε ότι:
(a) Υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0,0)$ - και σε κάθε άλλο σημείο, αλλά
(β) Η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Για το (α) έχουμε

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

και

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

δηλαδή οι μερικές παράγωγοι στο $(0,0)$ είναι 0, αφού η συνάρτηση είναι σταθερά ίση με 0 πάνω στους άξονες $x'x$ και $y'y$.

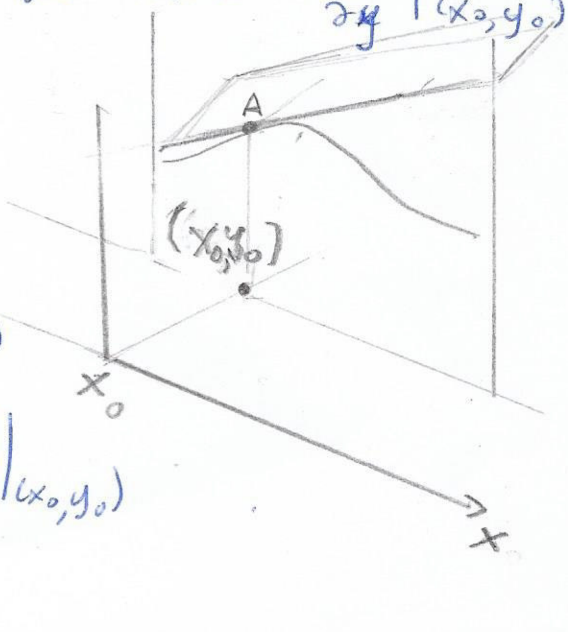
Σε σημεία $(x,y) \neq (0,0)$, έχουμε:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{και} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

(β) Έχουμε δει σε προηγούμενο μάθημα ότι το όριο της f στο $(0,0)$ δεν υπάρχει. Πράγματι· είναι $\forall x: f(x,0)=0$, άρα $\lim_{x\to 0} f(x,0)=0$, ενώ $f(x,x)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$ $(x\neq 0)$, άρα $\lim_{x\to 0} f(x,x)=\frac{1}{2}$. Αφού κατά μήκος δύο διαφορετικών διαδρομών βρίσκουμε διαφορετικά όρια, συμπεραίνουμε ότι το όριο της f στο $(0,0)$ δεν υπάρχει. Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Από την άλλη μεριά, η ύπαρξη των μερικών παραγώγων $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ είναι προϋπόθεση για να ορίζεται <u>εφαπτόμενο επίπεδο</u> στο γράφημα G_f της f στο σημείο $A(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$: Η κλίση αυτού του επιπέδου στη διεύθυνση του $x'x$ θα είναι $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$, ενώ η κλίση του στη διεύθυνση του $y'y$ θα είναι $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$.

Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο A θα έχει εξίσωση



$$z = a(x-x_0)+b(y-y_0)+f(x_0,y_0)$$

όπου $a=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ και $b=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$

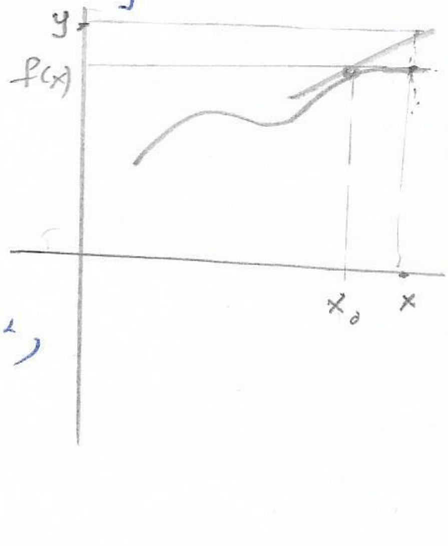
Επιπλέον ζητάμε το εφαπτόμενο επίπεδο να «προσεγγίζει καλά» το γράφημα της f κοντά στο σημείο (x_0, y_0).

Για να δούμε τι σημαίνει «προσεγγίζει καλά», ας δούμε με ποιον τρόπο προσεγγίζει η εφαπτομένη ευθεία του γραφήματος μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής, το γράφημα της συνάρτησης:

Αν $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I ανοικτό διάστημα, $x_0 \in I$ και υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0 \iff$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right] = 0$$



Δηλαδή η διαφορά του $f(x)$ από την τιμή του y πάνω στην εφαπτομένη ευθεία, $(y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$ διαιρεμένη με $x - x_0$, τείνει στο 0.

Οδηγούμαστε έτσι στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 0.

Α. Έστω $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη (ή παραγωγίσιμη) στο (x_0, y_0) αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ και ισχύει:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

Στην περίπτωση αυτή, ο πίνακας-γραμμή $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]$ λέγεται το διαφορικό ή η παράγωγος της f στο (x_0,y_0) και συμβολίζεται με $Df(x_0,y_0)$.

Β. Αν ισχύουν τα παραπάνω, τότε το επίπεδο με εξίσωση

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

λέγεται εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

Παράδειγμα 2. (Άσκηση 6 Φυλλαδίου 3)

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$f(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, αν $(x,y) \neq (0,0)$ και $f(0,0) = 0$.

Να δείξετε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Είναι

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$ και όμοια $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0$

Αφού και $f(0,0) = 0$, αυτό που ζητάμε είναι να ισχύει:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$$, δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Όμως $0 \le \dfrac{|xy^2|}{x^2+y^2} \le \dfrac{|x|y^2}{y^2} = |x|$
για $y \neq 0$

και, για $y=0$, $(x\neq 0)$ $\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$,

από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε ότι πράγματι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$. Συμπεραίνουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ με διαφορικό $Df(0,0) = [\,0 \quad 0\,]$ και εφαπτόμενο επίπεδο το $z=0$ (το xy - επίπεδο).

Γενικεύουμε τον προηγούμενο ορισμό σε $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

<u>Ορισμός 1.</u>
A. Έστω $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ και $\vec{a} \in \mathcal{U}$. Λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη (ή παραγωγίσιμη) στο $\vec{a}$, αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1,2,\dots,n$ και ισχύει:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{\left| f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})(x_1-a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a})(x_2-a_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})(x_n-a_n)\right]\right|}{\|\vec{x}-\vec{a}\|} = 0 \qquad (*)$$

Στην περίπτωση αυτή, ο πίνακας-γραμμή

$$D_f(\vec{a}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\right]$$

λέγεται το διαφορικό (ή η παράγωγος) της f στο $\vec{a}$.

Η (*) μπορεί να γραφεί και ως

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{|f(\vec{x})-f(\vec{a}) - Df(\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a})|}{\|\vec{x}-\vec{a}\|} = 0$$

ή και

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{|f(\vec{a}+h)-f(\vec{a}) - Df(\vec{a})\cdot\vec{h}|}{\|\vec{x}-\vec{a}\|}$$

Β. Στην περίπτωση αυτή, το n-διάστατο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$ που ορίζεται από την εξίσωση

$$x_{n+1} = f(\vec{a}) + Df(\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a})$$

ονομάζεται <u>εφαπτόμενο υπερεπίπεδο</u> του γραφήματος G_f της f στο σημείο $(a_1, \dots, a_n, f(\vec{a})) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Αποδεικνύεται το εξής Βασικό Θεώρημα:

<u>Θεώρημα 1</u>

Αν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1,\dots,n$ υπάρχουν σε μια περιοχή του σημείου $\vec{a}$ και είναι συνεχείς στο $\vec{a}$, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$.

Μια συνάρτηση f με συνεχείς μερικές παραγώγους λέγεται <u>συνάρτηση της κλάσης</u> C^1.

Έστω τώρα $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, όπου το $\mathcal{U}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $\vec{a} \in \mathcal{U}$.
Αν $f_1, f_2, \ldots, f_m$ είναι οι συνιστώσες συναρτήσεις της f, δηλαδή, για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{U}$,

$$f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x})).$$

Τότε ο $m \times n$ πίνακας

$$\Delta = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}$$

ονομάζεται πίνακας των μερικών παραγώγων της f στο $(\vec{a})$

<u>Ορισμός 2</u>

Έστω $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ και $\vec{a} \in \mathcal{U}$. Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f στο $\vec{a}$ (δηλαδή οι μερικές παράγωγοι όλων των συνιστωσών συναρτήσεων της f) και ισχύει

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{\| f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \Delta \cdot (\vec{x} - \vec{a}) \|}{\| \vec{x} - \vec{a} \|} = 0,$$

όπου Δ ο πίνακας των μερικών παραγώγων της f, τότε λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη (ή παραγωγίσιμη) στο $\vec{a}$. Στην περίπτωση αυτή συμβολίζουμε τον πίνακα των μερικών παραγώγων Δ με $Df(\vec{a})$ και ο πίνακας αυτός ονομάζεται διαφορικό ή παράγωγος της f στο $\vec{a}$.

Αφινικές (ή συσχετισμένες γραμμικές) συναρτήσεις: Μία συνάρτηση $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται αφινική αν υπάρχει μία γραμμική συνάρτηση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και ένα διάνυσμα $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$ ώστε:

$$L(\vec{x}) = T(\vec{x}) + \vec{c}, \quad \text{για κάθε } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$, τότε η συνάρτηση

$$L(\vec{x}) = f(\vec{a}) + Df(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$$

είναι αφινική και αποδεικνύεται ότι είναι η μοναδική αφινική συνάρτηση που «προσεγγίζει καλά» την f κοντά στο $\vec{a}$, δηλαδή που έχει την ιδιότητα:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{\| f(\vec{x}) - L(\vec{x}) \|}{\| \vec{x} - \vec{a} \|} = 0.$$

Τέλος, αποδεικνύεται ότι αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$, τότε είναι και συνεχής στο $\vec{a}$ και μάλιστα Lipschitz συνεχής.

Κλίση και κατευθυνόμενες παράγωγοι

Εστω $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ και $\vec{a} \in \mathcal{U}$.
Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$, τότε το διάνυσμα των μερικών παραγώγων της στο $\vec{a}$ ονομάζεται και κλίση (ή ανάδελτα) της f στο $\vec{a}$, συμβολίζεται με $\nabla f(\vec{a})$ ή $\operatorname{grad} f(\vec{a})$, δηλαδή $\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$ και, όπως θα δούμε, έχει κάποιες ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

Κατευθυνόμενες παράγωγοι

Αν $\vec{u}$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Το όριο των λόγων μεταβολής της f στην κατεύθυνση του $\vec{u}$

$$\frac{f(\vec{a}+t\vec{u})-f(\vec{a})}{t}$$

καθώς το t τείνει στο 0, δηλαδή το

$$D_{\vec{u}}f(\vec{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{a}+t\vec{u})-f(\vec{a})}{t},$$

αν υπάρχει, ονομάζεται κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $\vec{a}$ στην κατεύθυνση του $\vec{u}$.

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$, τότε, για κάθε $\vec{u} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$, ισχύει

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f(\vec{a}+t\vec{u}) - f(\vec{a}) - Df(\vec{a})\cdot(t\vec{u})|}{|t|\,\|\vec{u}\|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a}+t\vec{u}) - f(\vec{a}) - t\,Df(\vec{a})\cdot\vec{u}}{t} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a}+t\vec{u}) - f(\vec{a})}{t} = Df(\vec{a})\cdot\vec{u}$$

$$\Rightarrow D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{u}$$

Συνήθως, όταν παίρνουμε κατευθυνόμενες παραγώγους, απαιτούμε το διάνυσμα $\vec{u}$ να έχει νόρμα 1.
Με αυτή τη σύμβαση έχουμε ότι, πρώτον, η κατευθυνόμενη παράγωγος $D_{\vec{u}} f(\vec{a})$ εξαρτάται μόνο από την κατεύθυνση (και όχι από το μέτρο) του διανύσματος και, δεύτερον, ότι η $D_{\vec{u}} f(\vec{a})$ εκφράζει το <u>ρυθμό μεταβολής</u> της f στην κατεύθυνση του $\vec{u}$.

Ειδικότερα, οι $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ είναι οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι στις κατευθύνσεις των βασικών διανυσμάτων $\vec{e}_i$, $i=1,\dots,n$.

Παρατηρούμε τώρα ότι, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε:

Για κάθε $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\vec{u}\| = 1$,

$$|D_{\vec{u}} f(\vec{a})| = |\nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u}| \leq \|\nabla f(\vec{a})\|,$$

ενώ η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το $\vec{u}$ έχει την κατεύθυνση του $\nabla f(\vec{a})$.

Συμπεραίνουμε ότι:

<u>Θεώρημα 2</u>

Έστω ότι $\nabla f(\vec{a}) \neq \vec{0}$. Τότε το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f(\vec{a})$ δείχνει προς την κατεύθυνση κατά μήκος της οποίας η f αυξάνει γρηγορότερα.

Δείτε τις Ασκήσεις 10 και 11 του Φυλλαδίου 3.