Κανόνες παραγώγισης - Ο κανόνας της αλυσίδας

Οι κανόνες που συνδέουν την παραγώγιση με τις πράξεις συναρτήσεων είναι ανάλογοι με αυτούς που ισχύουν για συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Θυμηθείτε ότι, στη γενική περίπτωση, η παράγωγος (διαφορικό) $Df(\vec{a})$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας.

Θεώρημα 1

(i) (Κανόνας του σταθερού πολλαπλασίου)
Έστω $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($\mathcal{U}$ ανοικτό), παραγωγίσιμη στο $\vec{a} \in \mathcal{U}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε η $h = \lambda f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{a}$ και ισχύει

$$D(\lambda f)(\vec{a}) = \lambda Df(\vec{a})$$

(ii) (Κανόνας του αθροίσματος)
Έστω $f, g : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($\mathcal{U}$ ανοικτό) παραγωγίσιμες στο $\vec{a} \in \mathcal{U}$. Τότε η $h = f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{a}$ και ισχύει:

$$D(f+g)(\vec{a}) = Df(\vec{a}) + Dg(\vec{a})$$ (άθροισμα πινάκων)

(iii) (Κανόνας του γινομένου για πραγματικές συναρτήσεις)
Έστω $f, g : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{U}$ ανοικτό) παραγωγίσιμες στο $\vec{a} \in \mathcal{U}$. Τότε η $h = f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{a}$ και ισχύει:

$$D(f \cdot g)(\vec{a}) = g(\vec{a}) \, Df(\vec{a}) + f(\vec{a}) \, Dg(\vec{a})$$

(iv) (Κανόνας του πηλίκου για πραγματικές συναρτήσεις)
Έστω $f, g : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{U}$ ανοικτό) παραγωγίσιμες στο $\vec{a} \in \mathcal{U}$ και έστω ότι $g(\vec{x}) \neq 0$ για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{U}$. Τότε η $h = \frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{a}$ και ισχύει

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{a}) = \frac{g(\vec{a})Df(\vec{a}) - f(\vec{a})Dg(\vec{a})}{(g(\vec{a}))^2}$$

Ειδικότερα, η $\frac{1}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{a}$ και

$$D\left(\frac{1}{g}\right)(\vec{a}) = -\frac{1}{(g(\vec{a}))^2} \cdot Dg(\vec{a})$$

Παράδειγμα.
Αν η $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και διάφορη του 0 στο $\mathcal{U}$, τότε η $h = f^2 + \frac{2}{f}$ είναι παραγωγίσιμη.
Αν $Df = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$ είναι η παράγωγος της f (δηλαδή, για κάθε $(x,y) \in \mathcal{U}$, $Df(x,y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]$), τότε

$$D(f^2) = f \cdot Df + f \cdot Df = 2f \cdot Df$$

και $D\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2} Df$, άρα

$$Dh(x,y) = D(f^2)(x,y) - \frac{2}{f^2(x,y)} Df(x,y)$$

$$= 2f(x,y)\, Df(x,y) - \frac{2}{f^2(x,y)} Df(x,y)$$

$$= \left[2f(x,y) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{2}{f^2(x,y)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \; 2f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{2}{f^2(x,y)} \frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

Πρόταση 2

Έστω $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\vec{a} \in \mathcal{U}$, και $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, με $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, δηλαδή f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, είναι οι συνιστώσες συναρτήσεις της f. Τότε ισχύει το εξής:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{a}$ αν και μόνο αν, για κάθε $i = 1, \ldots, m$, η f_i είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{a}$.
Στην περίπτωση αυτή είναι:

$$Df(\vec{a}) = \begin{bmatrix} Df_1(\vec{a}) \\ Df_2(\vec{a}) \\ \vdots \\ Df_m(\vec{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\vec{a}) \\ \nabla f_2(\vec{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{a}) \end{bmatrix}$$

(κάθε $Df_i(\vec{a})$ είναι ένας $1 \times n$ πίνακας-γραμμή).

Η απόδειξη της Πρότασης προκύπτει άμεσα με βάση τον ορισμό της παραγώγου.

Μπορούμε να εκφράσουμε ενιαία και συνοπτικά έναν γενικό κανόνα για την παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό των πινάκων.
Με αυτόν τον συμβολισμό ο κανόνας αυτός είναι εντελώς ανάλογος με τον κανόνα της αλυσίδας για συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Θεώρημα 3 (Κανόνας της Αλυσίδας)

Έστω $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ και $V \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτά. Έστω $g: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ και $f: V \to \mathbb{R}$ με $g(\mathcal{U}) \subseteq V$ έτσι ώστε $f \circ g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$ να ορίζεται. Υποθέτουμε ότι $\vec{a} \in \mathcal{U}$ και η g παραγωγίζεται στο $\vec{a}$ και η f παραγωγίζεται στο $g(\vec{a})$. Τότε η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{a}$ και ισχύει:

$$D(f \circ g)(\vec{a}) = Df(g(\vec{a})) \cdot Dg(\vec{a})$$

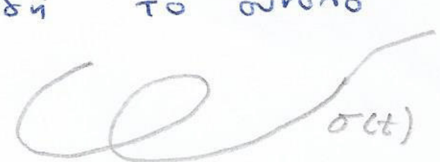
(πολλαπλασιασμός πινάκων)

Ειδικές περιπτώσεις - Παραδείγματα

Περ. 1. $n = 1$

Παρένθεση: Αν $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, μία συνεχής συνάρτηση $\sigma: I \to \mathbb{R}^m$ λέγεται <u>καμπύλη</u> - συχνά η λέξη «καμπύλη» χρησιμοποιείται και για την «τροχιά» της σ, δηλαδή το σύνολο

$C = \{ \sigma(t) : t \in I \} \subseteq \mathbb{R}^m$.



Συνήθως φανταζόμαστε τη μεταβλητή t ως τον χρόνο, οπότε το C είναι η τροχιά ενός υλικού σημείου που τη χρονική στιγμή t βρίσκεται στη θέση $\sigma(t)$.

<u>Παράδειγμα 1.</u>

$\sigma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ με $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$

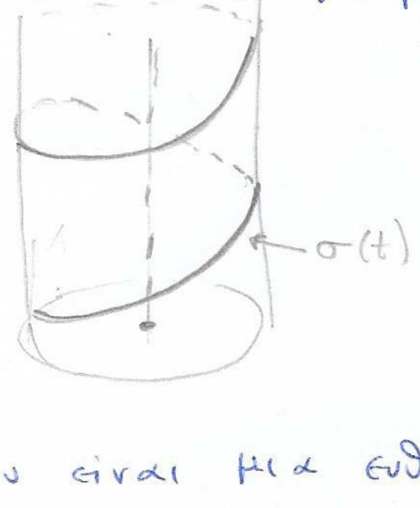
Εδώ το υλικό σημείο διαγράφει άπειρες φορές τον κύκλο κέντρου O ακτίνας 1.

Παράδειγμα 2

$\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με $\sigma(t) = (a\cos t, b\sin t)$,
όπου α, β θετικές σταθερές.
Εδώ το υλικό σημείο διαγράφει την έλλειψη
με εξίσωση
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Παράδειγμα 3

$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$
Εδώ το υλικό σημείο διαγράφει μία έλικα
η οποία βρίσκεται πάνω στον κύλινδρο με
εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$.



Παράδειγμα 4

$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ με
$\sigma(t) = \vec{a} + t\vec{v}$, όπου
$\vec{a}, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$ σταθερά διανύσματα.
Η τροχιά του υλικού σημείου είναι μια ευθεία
μέσα στον m-διάστατο χώρο.

Διαφορίσιμες καμπύλες - εφαπτόμενο διάνυσμα καμπύλης

Μια καμπύλη $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ με
$\sigma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ είναι διαφορίσιμη,
όπως έχουμε δει, αν και μόνο αν οι συνιστώσες
συναρτήσεις $x_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ είναι διαφορίσιμες.
Στην περίπτωση αυτή θέτουμε $\sigma'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_m'(t))$

- δηλαδή $\sigma'(t)$ είναι το διαφορικό
$D\sigma(t)$, με τη διαφορά ότι το $\sigma'(t)$

το βλέπουμε σαν διάνυσμα στον m-διάστατο χώρο, ενώ το

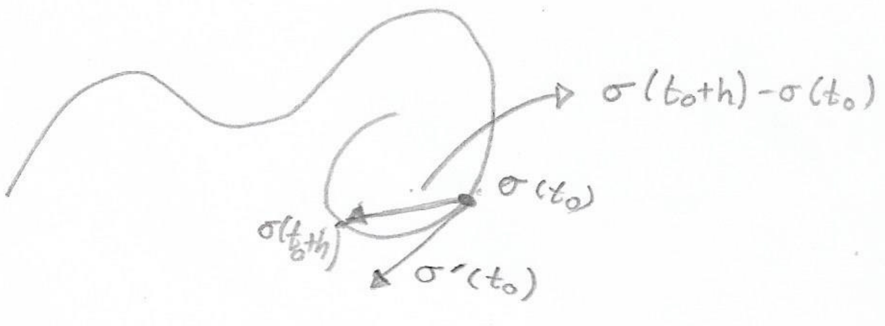
$$D\sigma(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_m'(t) \end{bmatrix}$$

σαν έναν $m \times 1$ πίνακα.

Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου $\sigma'(t)$.

Αν η καμπύλη $\sigma(t)$ είναι διαφορίσιμη, τότε, για κάθε $t_0 \in I$, το διάνυσμα της παραγώγου $\sigma'(t_0) = (x_1'(t_0), \ldots, x_m'(t_0))$ εκφράζει το διάνυσμα ταχύτητας του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t_0 και εφάπτεται στην καμπύλη C στο σημείο $\sigma(t_0)$.

Αυτό είναι - διαισθητικά τουλάχιστον - φανερό, αν σκεφτεί κανείς ότι



$$\sigma'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\sigma(t_0+h) - \sigma(t_0)\right)$$

(Εδώ κλείνει η παρένθεση)

Έστω τώρα $\sigma: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ μία διαφορίσιμη καμπύλη στο επίπεδο και $f: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση, όπου $\sigma(I) \subseteq \mathcal{U}$.

Τότε* η $f \circ \sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θα είναι διαφορίσιμη και θα ισχύει, για κάθε $t_0 \in I$:

$$D(f\circ\sigma)(t_0) = Df(\sigma(t_0)) \cdot D\sigma(t_0),$$ δηλαδή

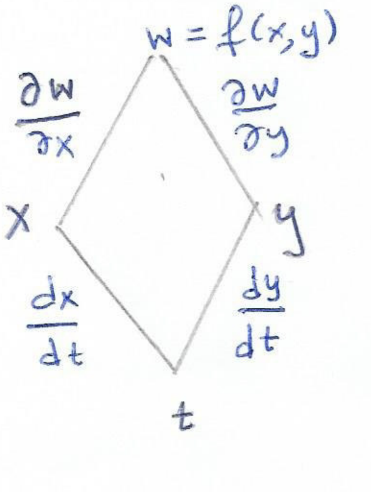
$$\left.\frac{d(f\circ\sigma)}{dt}\right|_{t=t_0} = \left[\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\sigma(t_0)}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\sigma(t_0)} \right] \cdot \begin{bmatrix} \left.dx/dt\right|_{t_0} \\ \left.dy/dt\right|_{t_0} \end{bmatrix}$$

ή, πιο απλά, θέτοντας

$w = f(x,y) = f(x(t), y(t))$, είναι

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

και σχηματικά:



Για να βρούμε το $\frac{dw}{dt}$, ξεκινάμε από το w και κατεβαίνουμε από κάθε δρόμο μέχρι το t, πολλαπλασιάζοντας τις παραγώγους που συναντάμε καθ' οδόν.
Στο τέλος αθροίζουμε τα γινόμενα που υπολογίσαμε.

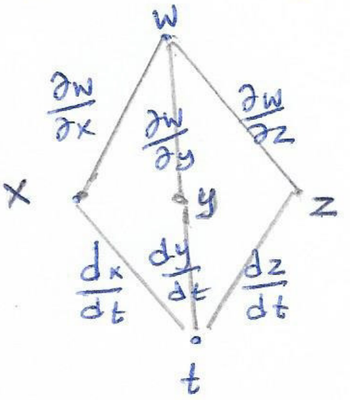
---

* σύμφωνα με το Θεώρημα 3

Εντελώς ανάλογη είναι η περίπτωση που η καμπύλη βρίσκεται στον τρισδιάστατο (αλλά και γενικότερα στον m-διάστατο) χώρο:

Αν η $w = f(x,y,z)$ είναι διαφορίσιμη και η $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ είναι διαφορίσιμη καμπύλη, τότε

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$



Παράδειγμα

Έστω $w = f(x,y,z) = x^2 e^{2y}\cos 3z$

και $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ η καμπύλη με

$x(t) = \cos t$, $y(t) = \ln(t+2)$, $z(t) = t$.

Θα βρούμε την τιμή του $\frac{dw}{dt}$ στο σημείο $(1, \ln 2, 0) = \sigma(0)$ με χρήση του κανόνα της αλυσίδας:

Είναι

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dt} = -2x\,e^{2y}\cos 3z\,\sin t + 2x^2 e^{2y}\cos 3z\cdot\frac{1}{t+2} - 3x^2 e^{2y}\sin 3z$$

Άρα $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = 0 + 2\cdot 2^2\cdot\frac{1}{2} - 0 \Rightarrow \left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = 4.$

Ελέγξτε ότι θα πάρετε το ίδιο αποτέλεσμα αν αντικαταστήσετε άμεσα και παραγωγίσετε τη συνάρτηση

$$F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$$ ως προς t.

2. Γενική περίπτωση

Στη γενική περίπτωση $(n \geq 2)$, δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο για να υπολογίσουμε την κάθε μερική παράγωγο:

Έστω $W = f(x, y)$ όπου

$x = g_1(r, s)$ και $y = g_2(r, s)$ και οι f, g_1, g_2 είναι διαφορίσιμες.

Τότε

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

και

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

Παράδειγμα 1

Αν $w = f(x, y)$ όπου f διαφορίσιμη συνάρτηση και κάνουμε αντικατάσταση σε πολικές συντεταγμένες $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, τότε

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

και

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

Παράδειγμα 2

Έστω ότι η $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν $w = f(x,y,z)$ και θεωρήσουμε το μετασχηματισμό σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi \quad , \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi , \quad z = \rho\cos\varphi ,$$

τότε

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \rho}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial \rho} = \cos\theta\cdot\sin\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta\sin\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \rho\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}$$

και

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \rho\cos\theta\cos\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \rho\sin\theta\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} - \rho\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial z}$$