Υπολογισμός ορίων - Συνέχεια συνάρτησης

Η επόμενη Πρόταση μας επιτρέπει να περιοριστούμε στη μελέτη ορίων πραγματικών συναρτήσεων: Ο υπολογισμός του ορίου μιας διανυσματικής συνάρτησης ανάγεται στον υπολογισμό των ορίων των συνιστωσών της συναρτήσεων.

Πρόταση 3

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f : A \to \mathbb{R}^m$ με

$$f(\vec{x}) = \left(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})\right)$$, όπου, για $i=1,\dots,m$, $f_i : A \to \mathbb{R}$ είναι οι συνιστώσες συναρτήσεις της f. Έστω $\vec{x}_0$ σημείο συσσώρευσης του συνόλου A και $\vec{l} \in \mathbb{R}^m$. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{l} = (l_1, l_2, \dots, l_m)$$ αν

και μόνο αν, για κάθε $i = 1, \dots, m$,

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = l_i .$$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη μελέτη των ορίων πραγματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Οι βασικές ιδιότητες των ορίων είναι ανάλογες με αυτές που ισχύουν για όρια συναρτήσεων μιας μεταβλητής και οι αποδείξεις τους είναι επίσης εντελώς ανάλογες:

Πρόταση 4

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ πραγματικές συναρτήσεις, $\vec{x}_0$ σημείο συσσώρευσης του συνόλου A και $l, l_1, l_2, c \in \mathbb{R}$. Ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = l$, τότε $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} (c \cdot f(\vec{x})) = c \cdot l$

(ii) Αν $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = l_1$ και $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = l_2$, τότε

(α) $$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} (f+g)(\vec{x}) = l_1 + l_2$$

(β) $$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} (f \cdot g)(\vec{x}) = l_1 \cdot l_2$$

(γ) Αν επιπλέον είναι $l_2 \neq 0$, τότε ισχύει και

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \left(\frac{1}{g}\right)(\vec{x}) = \frac{l_1}{l_2}.$$

Παράδειγμα

Είναι διαισθητικά φανερό και εύκολο να ελέγξουμε με βάση τον ορισμό ότι για τις <u>προβολές</u> $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $g_1(x,y) = x$ και $g_2(x,y) = y$, ισχύει

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} g_1(x,y) = \lim_{(x,y) \to (a,b)} x = a$$ και

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} g_2(x,y) = \lim_{(x,y) \to (a,b)} y = b.$$

Με βάση αυτό και χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες Προτάσεις παίρνουμε ότι:

Η συνάρτηση

$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ με $f(x,y) = \left(x-y, \frac{2xy}{x^2+y^2}\right)$

έχει την ιδιότητα ότι: Για κάθε $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \left(a-b, \frac{2ab}{a^2+b^2}\right) \quad , \text{ δηλαδή}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b) \qquad (*)$$

Όπως και στην περίπτωση των συναρτήσεων μιας μεταβλητής, μια συνάρτηση με την ιδιότητα $(*)$ λέμε ότι είναι συνεχής στο (a,b).

Διαισθητικά, αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\vec{x}_0 \in A$, μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^m$ λέγεται συνεχής στο $\vec{x}_0$, αν, καθώς το $\vec{x}$ πλησιάζει το $\vec{x}_0$, το $f(\vec{x})$ πλησιάζει απεριόριστα κοντά το $f(\vec{x}_0)$. Τυπικά έχουμε:

Ορισμός. Αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ και $\vec{x}_0 \in A$, λέμε ότι η f είναι <u>συνεχής</u> στο $\vec{x}_0$, αν:
Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:
Για κάθε $\vec{x} \in A$ με $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ να ισχύει

$\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\| < \varepsilon$.

Λέμε ότι η f είναι <u>συνεχής συνάρτηση</u>, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $\vec{x}_0$ του πεδίου ορισμού της A.

Στην πράξη, ο ορισμός αυτός λέει δύο πράγματα:

- Αν το $\vec{x}_0 \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A τότε: Η f είναι συνεχής στο $\vec{x}_0$ αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x})$ και ισχύει $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$.

- Αν το $\vec{x}_0 \in A$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A (είναι «μεμονωμένο σημείο» του A), τότε, αυτόματα, η f είναι συνεχής στο $\vec{x}_0$.

Σε αυτό το μάθημα ασχολούμαστε σχεδόν αποκλειστικά με συναρτήσεις ορισμένες σε σύνολα A με την ιδιότητα: κάθε $x \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A - τέτοια είναι για παράδειγμα τα ανοικτά σύνολα.
Στην πράξη λοιπόν θα θεωρούμε ότι:
Η f είναι συνεχής στο $\vec{x}_0 \in A$ αν και μόνο αν $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$.

Με βάση τις Προτάσεις 3 και 4 παίρνουμε τώρα ότι:

Πόρισμα 5. Αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\vec{x}_0 \in A$, η $f: A \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής στο $\vec{x}_0$ αν και μόνο αν κάθε συνιστώσα συνάρτηση f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ είναι συνεχής στο $\vec{x}_0$.

Πόρισμα 6. Αν οι $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι πραγματικές συναρτήσεις, συνεχείς στο $\vec{x}_0 \in A$, τότε οι $f+g$, $f \cdot g$ είναι συνεχείς στο $\vec{x}_0$. Αν επιπλέον $g(\vec{x}_0) \neq 0$, τότε και η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο $\vec{x}_0$.

Επιπλέον, ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 7

Έστω $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $f : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, με $g(A) \subseteq B$, έτσι ώστε η $f \circ g$ να ορίζεται στο A. Αν η g είναι συνεχής στο $\vec{x}_0 \in A$ και η f είναι συνεχής στο $g(\vec{x}_0)$, τότε η $f \circ g$ είναι συνεχής στο $\vec{x}_0$.

Βασικό παράδειγμα. Όπως έχουμε παρατηρήσει, κάθε προβολή $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Με βάση το Πόρισμα 6 έπεται ότι κάθε πολυώνυμο n μεταβλητών $P(\vec{x})$ (δηλαδή $P(\vec{x})$ = άθροισμα μονωνύμων της μορφής $a \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$) είναι συνεχής συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$.

Επίσης, κάθε ρητή συνάρτηση $Q(\vec{x})$ ($Q(\vec{x}) = \dfrac{P_1(\vec{x})}{P_2(\vec{x})}$, όπου $P_1(\vec{x}), P_2(\vec{x})$ πολυώνυμα) είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Παραδείγματα - Ασκήσεις

(1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

με $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

a) Έστω $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. Αφού η συνάρτηση

$h(x,y) = x^2+y^2$ είναι συνεχής, και η

$s(t) = \sin t$ είναι συνεχής έπεται ότι

και η $(s \circ h)(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ είναι

συνεχής στο $\mathbb{R}^2$.

Αφού $x_0^2+y_0^2 \neq 0$, έπεται ότι η f είναι

συνεχής στο (x_0, y_0) ως πηλίκο συνεχών.

β) Εξετάζουμε τώρα αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ισχύει:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \text{(Βασικό όριο)}$$

Έπεται ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Αν θέλουμε να αιτιολογήσουμε πιο αυστηρά την τελευταία ισότητα των ορίων μπορούμε να το κάνουμε ως εξής:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(t) = \frac{\sin t}{t}$, αν $t \neq 0$ και $g(0)=1$.

Αφού $\lim_{t \to 0} g(t) = 1$, η g είναι συνεχής (και) στο 0.

Αν τώρα $h(x,y) = x^2+y^2$, το Θεώρημα 7 λέει ότι η $g \circ h$ είναι συνεχής στο $(0,0)$, δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (g \circ h)(x,y) = (g\circ h)(0,0) = g(0) = 1.$$

(2) Εξετάζουμε αν υπάρχει το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Αν $f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y) \neq (0,0)$, παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι $f(0,y) = 0$, δηλαδή όταν το (x,y) πλησιάζει το $(0,0)$ κινούμενο κατά μήκος του άξονα των y, τότε το $f(x,y)$ τείνει στο 0 (είναι ίσο με 0).

Άρα, αν υπάρχει το ζητούμενο όριο, θα είναι ίσο με 0.

Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να φράξουμε από πάνω την $f(x,y)$ από μία $g(x,y)$ που τείνει στο 0 όταν $(x,y)\to(0,0)$: $0 \le f(x,y) \le g(x,y)$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα προκύψει ότι
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 .$$

Είναι

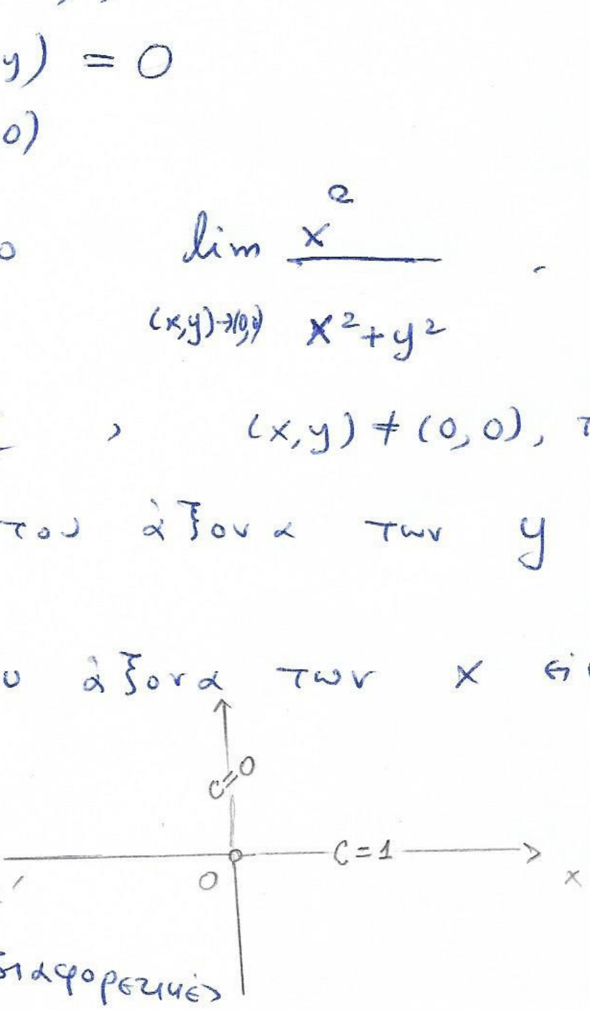
$$0 \le \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

και, αφού $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, συμπεραίνουμε ότι
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

(3) Εξετάζουμε το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

Αν $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, παρατηρούμε ότι: Κατά μήκος του άξονα των y είναι: $f(0,y)=0$.

Κατά μήκος του άξονα των x είναι $f(x,0) = 1$.



Αφού, κινούμενοι προς το $(0,0)$ από δύο διαφορετικές διαδρομές βρίσκουμε διαφορετικά όρια, συμπεραίνουμε ότι το όριο της f στο $(0,0)$ δεν υπάρχει.

(4) Εξετάζουμε το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Έστω $f(x,y) = xy/x^2+y^2$.
Παρατηρούμε ότι πάνω στους άξονες $x'x$ και $y'y$ η συνάρτηση είναι σταθερά ίση με 0, άρα καθώς το (x,y) τείνει προς το $(0,0)$ κινούμενο κατά μήκος ενός από τους άξονες, το $f(x,y)$ τείνει στο 0.
Όμως,

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}.$$

Άρα, καθώς το (x,y) τείνει προς το $(0,0)$ κινούμενο κατά μήκος της ευθείας $y=x$, το $f(x,y)$ τείνει στο $\frac{1}{2} \neq 0$.
Αφού κατά μήκος διαφορετικών διαδρομών βρήκαμε διαφορετικά όρια, συμπεραίνουμε ότι το όριο της f στο $(0,0)$ δεν υπάρχει.

Παρατηρήστε ότι γενικότερα, αν $y = \lambda x$ (δηλαδή όταν το (x,y) κινείται πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το O και έχει κλίση λ) είναι $f(x,\lambda x) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$ = σταθερά, οπότε κινούμενοι προς το $(0,0)$ από διαφορετικές ακτίνες βρίσκουμε διαφορετικά όρια (εκτός αν $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$). Δείτε και την Άσκηση 2 του Φυλλαδίου 2.

(5) (Άσκηση 4 Φυλλαδίου 2)

Εξετάζουμε το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

Αν $y=0$ (και $x\neq 0$), δηλαδή στον άξονα $x'x$, η συνάρτηση $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^2}$ είναι ίση με 0.

Για $y\neq 0$ είναι: $x^2+y^2 \geq y^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{y^2}$.

Άρα, για $y\neq 0$,

$$0 \leq |f(x,y)| = \frac{|x|y^2}{x^2+y^2} \leq |x|\frac{y^2}{y^2} = |x|$$

Αφού $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$

(6) (Άσκηση 5 Φυλλαδίου 2)

Εξετάζουμε το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

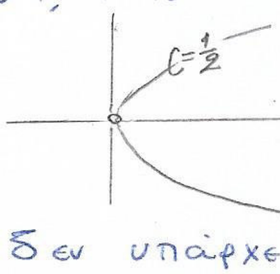
Εδώ θα δούμε ότι, αν και το όριο δεν υπάρχει, η μέθοδος του Παραδείγματος 4 δεν δουλεύει: Κινούμενοι κατά μήκος οποιασδήποτε ακτίνας $y=\lambda x$ βρίσκουμε το ίδιο όριο: 0.

Δοκιμάζουμε την παραβολή: $x=ay^2$ $(a\neq 0)$.

Βλέπουμε ότι

$$f(ay^2,y) = \frac{ay^4}{a^2y^4+y^4} = \frac{a}{1+a^2},$$

οπότε π.χ. για $a=1$ βλέπουμε ότι, καθώς το (x,y) κινείται προς το $(0,0)$ κατά μήκος της παραβολής, το όριο του $f(x,y)$ είναι $\frac{1}{2}\neq 0$.



Συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

7 (Άσκηση 6 Φυλλαδίου 2)

Εξετάζουμε το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sin(x^2+y^2)}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό όριο:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 .$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{\sin(x^2+y^2)}$ κοντά στο $(0,0)$ έχει «την ίδια συμπεριφορά» με την $g(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$, την οποία είδαμε στο 5ο Παράδειγμα.

Για να το δούμε αυτό, γράφουμε:

$$\frac{xy^2}{\sin(x^2+y^2)} = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)} ,$$ οπότε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sin(x^2+y^2)} = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}\right)\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}\right)$$

$$\underset{\text{Παρ. 5}}{=} 0 \cdot 1 = 0.$$

(8) (Ασκηση 11 Φυλλαδιο 2)

Εστω $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \frac{xy}{x-y}.$$

(α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, το όριο του $f(x,y)$ καθώς το (x,y) τείνει προς το $(0,0)$ κινούμενο πάνω στην καμπύλη $y = x^\lambda$ είναι ίσο με 0.

(β) Αποδείξτε ότι – παρόλο που ισχύει το (α) – το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

Απόδειξη Για το (α) έχουμε: Για $x > 0$:

$$f(x, x^\lambda) = \frac{x^{\lambda+1}}{x - x^\lambda}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις $0 < \lambda < 1$ και $\lambda > 1$.

- Αν $0 < \lambda < 1$, τότε

$$f(x, x^\lambda) = \frac{x^\lambda \cdot x}{x^\lambda (x^{1-\lambda} - 1)} = \frac{x}{x^{1-\lambda} - 1} \longrightarrow 0$$

καθώς $x \to 0$, αφού $1 - \lambda > 0$.

- Αν $\lambda > 1$, τότε

$$f(x, x^\lambda) = \frac{x \cdot x^\lambda}{x(1 - x^{\lambda-1})} = \frac{x^\lambda}{1 - x^{\lambda-1}} \longrightarrow 0$$

καθώς $x \to 0$, αφού $\lambda > 0$ και $\lambda - 1 > 0$.

(β) Κατά μήκος του άξονα των x, του άξονα των y και των καμπυλών που εξετάσαμε στο (α) το όριο του $f(x,y)$ είναι 0. Για να δείξουμε ότι το όριο δεν υπάρχει, αρκεί να βρούμε μια καμπύλη $y = g(x)$ που διέρχεται από το $(0,0)$, κατά μήκος της οποίας η f παίρνει τιμές μακριά από το 0.

Ας εξετάσουμε την καμπύλη στάθμης της f με τιμή $c=1$. Είναι

$$f(x,y)=1 \iff \frac{xy}{x-y}=1 \iff xy = x-y \quad \text{και } x\neq y$$

$$\iff y(x+1)=x \quad \text{και } x\neq y \iff y=\frac{x}{x+1} \quad \text{και } x\neq y$$

Παρατηρούμε ότι η καμπύλη $L: y=\frac{x}{x+1}$, $x>-1$ διέρχεται από το $(0,0)$, οπότε σε οποιαδήποτε περιοχή του $(0,0)$ υπάρχουν σημεία της καμπύλης L, $(x,y)\neq(0,0)$.
Αλλά σε κάθε τέτοιο σημείο (x,y) είναι $f(x,y)=1$.
Συμπεραίνουμε ότι το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.