Ονομάζομαι Μηνάς Πάφης
Το mail μου είναι : minaspafis96@gmail.com
Μπορείτε να μου στέλνετε για απορίες πάνω στις ασκήσεις που λύνουμε

1η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1

Βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $\vec{r}(t) = (3+2t, 7+8t, -2+t)$ με τα επίπεδα συντεταγμένων

Λύση

- xy-επίπεδο: Είναι το $z=0$. Οπότε πρέπει $-2+t=0 \Leftrightarrow t=2$. Συνεπώς το σημείο τομής είναι το $A(7, 23, 0)$

- yz-επίπεδο: Είναι το $x=0$. Οπότε πρέπει $3+2t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{3}{2}$. Οπότε σημείο τομής το $B(0, -5, -\frac{7}{4})$

- xz-επίπεδο: Είναι το $y=0 \Rightarrow 7+8t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{7}{8}$
Άρα σημείο τομής το $\Gamma(\frac{5}{4}, 0, -\frac{23}{8})$

Άσκηση 2

Δείξτε ότι η ευθεία $\vec{r}(t) = (2, -2, -1) + t(1, 1, 1)$ είναι παράλληλη με το επίπεδο $2x-3y+z-2=0$

Λύση

Σχετική θέση ευθείας και επιπέδου:

i) Η ευθεία τέμνει το επίπεδο σε μοναδικό σημείο
ii) Η ευθεία περιέχεται στο επίπεδο (αρκεί να έχουν δύο κοινά σημεία)
iii) Η ευθεία είναι παράλληλη στο επίπεδο (δεν έχουν κοινό σημείο δηλαδή)

Έστω ότι έχουν κοινό σημείο το $A(2+t, -2+t, -1+t)$ για κάποιο $t \in \mathbb{R}$. Τότε το A ικανοποιεί την εξίσωση του επιπέδου: $2(2+t) - 3(-2+t) + (-1+t) - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 7=0 \to$ άτοπο. Άρα δεν τέμνονται σε κανένα σημείο

Άσκηση 3

Δείξτε ότι η ευθεία $\vec{\ell}(t) = (1,-1,2) + t(2,3,1)$ βρίσκεται πάνω στο επίπεδο $5x-3y-z-6=0$

Λύση

Θα δείξουμε ότι $\forall t \in \mathbb{R}$ το τυχόν σημείο της ευθείας $\vec{\ell}(t) = (1+2t, -1+3t, 2+t)$ ικανοποιεί την εξίσωση του επιπέδου (δηλαδή ανήκει σε αυτό)

Πράγματι $5(1+2t) - 3(-1+3t) - (2+t) - 6 = 0$

Άσκηση 4

Βρείτε δύο μη παράλληλα διανύσματα ορθογώνια και τα δύο ως προς το διάνυσμα $\vec{v} = (1,1,1)$

Λύση

α τρόπος) Το $\vec{a} = (x,y,z)$ είναι κάθετο στο $\vec{v} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x+y+z=0 \Leftrightarrow z = -x-y$

Οπότε $\vec{a} = (x,y,z) = (x,y,-x-y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$

Συνεπώς τα $\vec{a_1} = (1,0,-1)$, $\vec{a_2} = (0,1,-1)$ είναι δύο τέτοια ζητούμενα διανύσματα

(Μάλιστα παράγουν τον ορθογώνιο υπόχωρο του $\langle \vec{v} \rangle$, δηλαδή το σύνολο όλων των κάθετων διανυσμάτων στο $\vec{v}$...)

β τρόπος) Βλέπουμε ότι το $\vec{a} = (1,-1,0)$ είναι κάθετο στο $\vec{v}$, αφού $\vec{a}\cdot\vec{v} = 0$

Ένα διάνυσμα που είναι κάθετο στο $\vec{v}$ και στο $\vec{a}$ (και συνεπώς δεν είναι παράλληλο στο $\vec{a}$) είναι το

$$\vec{\beta} = \vec{a} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,2)$$

Άσκηση 5

Βρείτε την ευθεία που περνάει από το σημείο $A(3,1,-2)$ και τέμνει υπό ορθή γωνία την ευθεία $x=t-1$, $y=t-2$, $z=t-1$

Λύση

Η τελευταία ευθεία είναι η $\vec{l_1}(t)=(-1,-2,-1)+t(1,1,1)$

Έστω ότι τέμνονται στο $B(t-1,\ t-2,\ t-1)$. Τότε η ζητούμενη ευθεία $\vec{l}(t)$ είναι παράλληλη στο $\vec{AB}=(t-4,\ t-3,\ t+1)$

Αφού $\vec{l}(t)$ τέμνει κάθετα την $\vec{l_1}(t)$ πρέπει

$\vec{AB} \perp \vec{u}=(1,1,1) \iff (t-4)\cdot 1+(t-3)\cdot 1+(t+1)\cdot 1=0 \iff$

$\iff t=2$

Οπότε $\vec{AB}=(-2,-1,3)$ και άρα $\vec{l}(s)=(3,1,-2)+s(-2,-1,3)$

(και τέμνονται κάθετα στο $B(1,0,1)$)

Άσκηση 6

Αποδείξτε και ερμηνεύστε γεωμετρικά τις παρακάτω σχέσεις:

α) $2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2$ (κανόνας παραλ/μου)

β) $\|x-y\|\,\|x+y\| \le \|x\|^2 + \|y\|^2$. Σε ποια περίπτωση η ανισότητα ισχύει ως ισότητα;

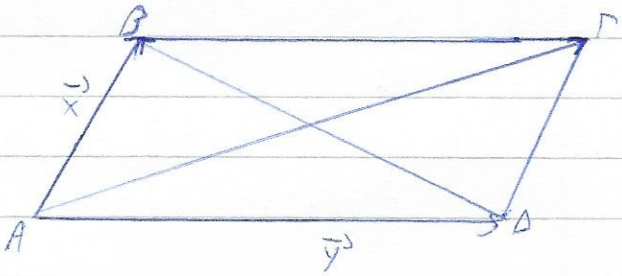
Λύση

α) $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}+\vec{y}) + (\vec{x}-\vec{y})(\vec{x}-\vec{y}) =$

$= \vec{x}^2 + \vec{x}\vec{y} + \vec{y}\vec{x} + \vec{y}^2 + \vec{x}^2 - \vec{y}\vec{x} - \vec{x}\vec{y} + \vec{y}^2 =$

$= 2\vec{x}^2 + 2\vec{y}^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$

Γεωμετρική ερμηνεία:



Ας πούμε ότι $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{A\Delta}$

Τότε $\vec{x}+\vec{y} = \overrightarrow{A\Gamma}$ και $\vec{x}-\vec{y} = \overrightarrow{\Delta B}$

Η σχέση μας λέει ότι $2AB^2 + 2A\Delta^2 = A\Gamma^2 + B\Delta^2$

(Αυτό προκύπτει γεωμετρικά από τον νόμο των συνημιτόνων: $B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 - 2B\Gamma \cdot \Gamma\Delta \cdot \cos\hat{\Gamma}$ στο $\overset{\triangle}{B\Delta\Gamma}$
και $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2AB\,B\Gamma\cos\hat{B}$
Αφού $AB = \Gamma\Delta$, $B\Gamma = A\Delta$ και $\hat{B} = \pi - \hat{\Gamma}$, προσθέτοντας τις σχέσεις έχουμε το ζητούμενο)

β) $\|\vec{x}-\vec{y}\|\,\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \iff \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\,\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \le (\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)^2$

$\iff (\|\vec{x}\|^2 - 2\vec{x}\vec{y} + \|\vec{y}\|^2)(\|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x}\vec{y} + \|\vec{y}\|^2) \le$

$\le (\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)^2$

Τώρα αν $\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = \alpha$, $2\vec{x}\vec{y} = \beta$, εφαρμόζοντας την $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2 - \beta^2$ παίρνουμε ισοδύναμα ότι
$(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)^2 - 4(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \le (\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)^2$ που προφανώς ισχύει

Ισότητα έχουμε $\Leftrightarrow -4(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{x}\cdot\vec{y} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία:</u> Το γινόμενο των μηκών των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου είναι μικρότερο ή ίσο του αθροίσματος των τετραγώνων των δύο μη παράλληλων πλευρών Ισότητα ισχύει αν το παρ/μο είναι ορθογώνιο

Άσκηση 7

Για τα $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ να αποδείξετε ότι ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες και να τις ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

i) $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \Leftrightarrow (\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}-\vec{y}) = 0$

ii) $\vec{x}\cdot\vec{y} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}-\vec{y}\|$

Λύση

i) Έχουμε ότι $(\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}-\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \|\vec{x}\|^2 + \vec{y}\cdot\vec{x} - \vec{x}\cdot\vec{y} - \|\vec{y}\|^2 = 0$

$\Leftrightarrow \|\vec{x}\|^2 = \|\vec{y}\|^2 \Leftrightarrow \|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$

Γεωμετρική ερμηνεία: Οι δύο μη παράλληλες πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες (δηλαδή έχουμε ρόμβο) $\Leftrightarrow$ οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα

ii) $\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}-\vec{y}\| \Leftrightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x}-\vec{y})(\vec{x}-\vec{y}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \|\vec{y}\|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\cdot\vec{x}\vec{y} = 0 \Leftrightarrow \vec{x}\cdot\vec{y} = 0$

Γεωμετρική ερμηνεία: Οι δύο μη παράλληλες πλευρές ενός παραλληλογράμμου τέμνονται κάθετα (δηλαδή έχουμε ορθογώνιο) $\Leftrightarrow$ οι διαγώνιοι είναι ίσες

Άσκηση 8

Χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς κ αποδείξτε ότι αν $\vec{x_1},\dots,\vec{x_k}\in\mathbb{R}^n$, τότε $\|\vec{x_1}+\dots+\vec{x_k}\| \le \|\vec{x_1}\|+\dots+\|\vec{x_k}\|$

Λύση

- Για $\kappa=2$: $\|\vec{x_1}+\vec{x_2}\|^2 = \|\vec{x_1}\|^2 + 2\,\vec{x_1}\cdot\vec{x_2} + \|\vec{x_2}\|^2 \le$
$\le \|\vec{x_1}\|^2 + 2\|\vec{x_1}\|\,\|\vec{x_2}\| + \|\vec{x_2}\|^2 = (\|\vec{x_1}\|+\|\vec{x_2}\|)^2$
χρησιμοποιώντας την ανισότητα C-S
Οπότε $\|\vec{x_1}+\vec{x_2}\| \le \|\vec{x_1}\|+\|\vec{x_2}\|$

- Έστω ότι αν $\vec{x_1},\dots,\vec{x_k}\in\mathbb{R}^n$ τότε ισχύει ότι
$\|\vec{x_1}+\dots+\vec{x_k}\| \le \|\vec{x_1}\|+\dots+\|\vec{x_k}\|$ (επαγ. υπόθεση)
Τότε, αν $\vec{x_1},\dots,\vec{x_k},\vec{x_{k+1}}\in\mathbb{R}^n$ έχουμε ότι
$\|\vec{x_1}+\dots+\vec{x_k}+\vec{x_{k+1}}\| = \|\vec{y}+\vec{x_{k+1}}\|$, θέτοντας $\vec{y}=\vec{x_1}+\dots+\vec{x_k}$
Τώρα όπως δείξαμε για $\kappa=2$: $\|\vec{y}+\vec{x_{k+1}}\| \le$
$\le \|\vec{y}\| + \|\vec{x_{k+1}}\| = \|\vec{x_1}+\dots+\vec{x_k}\| + \|\vec{x_{k+1}}\| \le$
$\le \|\vec{x_1}\|+\dots+\|\vec{x_k}\|+\|\vec{x_{k+1}}\|$ χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση.
Οπότε ολοκληρώσαμε το επιχείρημα της επαγωγής

Ερώτημα: Πότε ισχύει ισότητα;

Απάντηση: Ισότητα ισχύει $\Leftrightarrow$ υπάρχει $\vec{y}\neq\vec{0}$, $\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ και $\lambda_1,\dots,\lambda_k\ge 0$ ώστε $\vec{x_i}=\lambda_i\vec{y}$ $\forall 1\le i\le k$

($\Leftarrow$) Έστω ότι υπάρχει $\vec{y}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$ και $\lambda_1,\dots,\lambda_k\ge 0$
ώστε $\cancel{\forall}$ $\vec{x_i}=\lambda_i\vec{y}$ $\forall 1\le i\le k$
Τότε $\|\vec{x_1}+\dots+\vec{x_k}\| = \|(\lambda_1+\dots+\lambda_k)\vec{y}\| =$
$= (\lambda_1+\dots+\lambda_k)\|\vec{y}\| = \lambda_1\|\vec{y}\| + \dots + \lambda_k\|\vec{y}\| =$
$= \|\lambda_1\vec{y}\| + \dots + \|\lambda_k\vec{y}\| = \|\vec{x_1}\|+\dots+\|\vec{x_k}\|$, αφού
$\lambda_i\ge 0$ $\forall 1\le i\le k$

$(\Leftarrow)$ Με επαγωγή

- Για $k=2$, έχουμε ότι $\|\vec{x_1}+\vec{x_2}\| = \|\vec{x_1}\| + \|\vec{x_2}\| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \|\vec{x_1}\|\|\vec{x_2}\| = \vec{x_1}\cdot\vec{x_2}$
Τότε έχουμε δείξει στη θεωρία ότι η $\|\vec{x_1}+\lambda\vec{x_2}\|^2 =$
$= \|\vec{x_2}\|^2\lambda^2 + 2\vec{x_1}\cdot\vec{x_2}\lambda + \|\vec{x_1}\|^2 \geq 0$ έχει $\Delta = 0$ και συνεπώς έχει ρίζα $\lambda_0 = \dfrac{-\vec{x_1}\vec{x_2}}{\|\vec{x_2}\|^2} = -\dfrac{\|\vec{x_1}\|}{\|\vec{x_2}\|} \leq 0$

Τότε $\|\vec{x_1}+\lambda\vec{x_2}\| = 0 \Rightarrow \vec{x_1} = (-\lambda_0)\vec{x_2}$ και $-\lambda_0 \geq 0$
(Σημειώνουμε ότι αν $\vec{x_2} = \vec{0}$, τότε έχουμε ισότητα για κάθε $\vec{x_1}$ και μπορούμε να θέσουμε $\vec{y} = \vec{x_1}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$)

- Έστω ότι ισχύει για k, δηλαδή αν υπάρχουν $\vec{x_1},\dots,\vec{x_k} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\vec{x_1}+\dots+\vec{x_k}\| = \|\vec{x_1}\|+\dots+\|\vec{x_k}\|$, τότε υπάρχουν $\lambda_1,\dots,\lambda_k \geq 0$ και $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{x_i} = \lambda_i\vec{y}$ $\forall 1\leq i\leq k$

- Έστω τώρα $\vec{x_1},\dots,\vec{x_{k+1}} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\vec{x_1}+\dots+\vec{x_{k+1}}\| = \|\vec{x_1}\|+\dots+\|\vec{x_{k+1}}\|$
Έχουμε ότι $\|\vec{x_1}+\dots+\vec{x_{k+1}}\| \leq \|\vec{x_1}+\dots+\vec{x_k}\| + \|\vec{x_{k+1}}\| \leq$
$\leq \|\vec{x_1}\|+\dots+\|\vec{x_k}\|+\|\vec{x_{k+1}}\|$
Οπότε από υπόθεση θα έχουμε παντού ισότητα, δηλαδή $\|\vec{x_1}+\dots+\vec{x_{k+1}}\| = \|\vec{x_1}+\dots+\vec{x_k}\| + \|\vec{x_{k+1}}\| =$
$= \|\vec{x_1}\|+\dots+\|\vec{x_k}\|+\|\vec{x_{k+1}}\|$
Οπότε $\|\vec{x_1}+\dots+\vec{x_k}\| = \|\vec{x_1}\|+\dots+\|\vec{x_k}\|$. Άρα από επαγ. υπόθεση $\vec{x_i} = \lambda_i\vec{y}$ ~~και~~ για κάποιο $\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ και $\lambda_1,\dots,\lambda_k \geq 0$ $\forall 1\leq i\leq k$
Επίσης $\|(\vec{x_1}+\dots+\vec{x_k})+\vec{x_{k+1}}\| = \|\vec{x_1}+\dots+\vec{x_k}\| + \|\vec{x_{k+1}}\|$
Οπότε από την $k=2$ υπάρχει $\lambda\geq 0$ ώστε
$\vec{x_{k+1}} = \lambda(\vec{x_1}+\dots+\vec{x_k}) = \lambda(\lambda_1+\dots+\lambda_k)\vec{y}$ και $\lambda(\lambda_1+\dots+\lambda_k) = \lambda_{k+1} \geq 0$

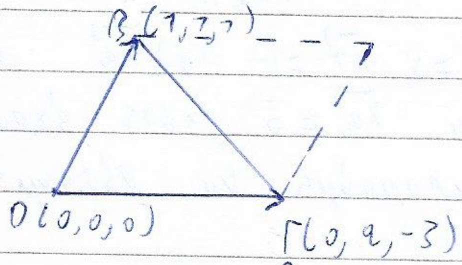
Άσκηση 9

α) Υπολογίστε το εμβαδόν τριγώνου με κορυφές τα σημεία $O(0,0,0)$, $B(1,1,1)$, $\Gamma(0,2,-3)$

β) Υπολογίστε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με πλευρές $2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $5\vec{i}-3\vec{k}$ και $\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

Λύση

α)



Έχουμε ότι $E(O\hat{B}\Gamma) = \frac{1}{2}$ Εμβ. παρ/μου, λόγω π.χ. ισότητα τριγώνων (τρεις πλευρές ίσες)

Έστω $\vec{\beta} = \vec{OB} = (1,1,1)$, $\vec{\gamma} = \vec{O\Gamma} = (0,2,-3)$

Γνωρίζουμε ότι Εμβ. παρ/μου $= \sqrt{\|\vec{\beta}\|^2\|\vec{\gamma}\|^2 - (\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})^2}$

και $\|\vec{\beta}\|^2 = 1^2+1^2+1^2 = 3$, $\|\vec{\gamma}\|^2 = 0^2+2^2+(-3)^2 = 13$

και $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = 1\cdot 0 + 1\cdot 2 + 1\cdot(-3) = -1$

Άρα τελικά $E(O\hat{B}\Gamma) = \frac{1}{2}\sqrt{3\cdot 13 - (-1)^2} = \frac{\sqrt{38}}{2}$

β) $$V = \left| \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \right| =$$

$$= \left| 2\det\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - 5\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 1\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \right|$$

$$= |-12+5-3| = 10$$

Άσκηση 10

Βρείτε μια εξίσωση για καθένα από τα παρακάτω επίπεδα:

α) Το επίπεδο που είναι κάθετο στην ευθεία $\vec{\ell}(t) = (-1,1,2) + (5,0,2)t$ και περνάει από το σημείο $(5,-1,0)$

β) Το επίπεδο που περνάει από τα σημεία $(2,-1,3)$, $(0,0,5)$ και $(5,7,-1)$

γ) Το επίπεδο που περιέχει την ευθεία $\vec{\ell}(t) = (-1,1,2) + t(3,2,4)$ και είναι κάθετο στο επίπεδο $2x+y-3z+4=0$

Λύση

α) Έχουμε ότι $\vec{\ell}(t) \parallel \vec{u} = (5,0,2)$ $\Rightarrow$ το ζητούμενο επίπεδο θα είναι κάθετο στο $\vec{u}$ και διέρχεται από το $(5,-1,0)$.
Οπότε έχει εξίσωση $5(x-5) + 0(y+1) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x + 2z - 25 = 0$

β) Έστω $A(2,-1,3)$, $B(0,0,5)$, $\Gamma(5,7,-1)$
Τότε $\vec{AB} = (-2,1,2)$, $\vec{A\Gamma} = (3,8,-4)$ και το επίπεδο είναι παράλληλο στα $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$, δηλαδή θα είναι κάθετο στο

$$\vec{u} = \vec{AB} \times \vec{A\Gamma} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & -4 \end{vmatrix} =$$

$= (-20, -2, -19)$
Οπότε έχουμε εξίσωση $-20(x-0) - 2(y-0) - 19(z-5) = 0$
$\Leftrightarrow 20x + 2y + 19z - 95 = 0$

γ) Έστω Π το ζητούμενο επίπεδο και $\Pi_1: 2x+y-3z+4=0$
Τότε $\Pi_1 \perp \vec{u} = (2,1,-3)$ και $\vec{\ell}(t) \parallel \vec{v} = (3,2,4)$
Οπότε $\Pi \parallel \vec{u}, \vec{v} \Rightarrow \Pi \perp \vec{u} \times \vec{v}$

Όμως $$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (10, -17, 1)$$

Ένα σημείο της $\vec{\ell}(t)$ είναι το $(-1,1,2)$
Οπότε η εξίσωση είναι $10(x+1) - 17(y-1) + (z-2) = 0$

Άσκηση 11

Βρείτε την απόσταση του σημείου $A(6,1,0)$ από το επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετο στο $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

Λύση

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\Pi: \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ και $A(x_0, y_0, z_0)$ τότε $dist(A,\Pi) = \dfrac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$

Εδώ έχουμε ότι $\Pi: x - 2y + z = 0$ και $A(6,1,0)$

Οπότε $dist(A,\Pi) = \dfrac{|1\cdot 6 - 2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{6}}$

Άσκηση 12

Έστω $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, δηλαδή $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$, ορθογώνια ανά δύο.

Αν $\vec{x} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \rho\vec{w}$, δείξτε ότι $\lambda = \vec{x}\cdot\vec{u}$, $\mu = \vec{x}\cdot\vec{v}$, $\rho = \vec{x}\cdot\vec{w}$

Ερμηνεύστε γεωμετρικά αυτό το αποτέλεσμα

Λύση

Έχουμε ότι $\vec{x}\cdot\vec{u} = (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \rho\vec{w})\vec{u} = \lambda\cdot\vec{u}\cdot\vec{u} + \mu\vec{v}\cdot\vec{u} + \rho\vec{w}\cdot\vec{u}$

$= \lambda\cdot\|\vec{u}\|^2 + \mu\cdot 0 + \rho\cdot 0 = \lambda\cdot 1 = \lambda \iff \lambda = \vec{x}\cdot\vec{u}$

Εντελώς όμοια προκύπτουν τα $\vec{x}\cdot\vec{v} = \mu$, $\vec{x}\cdot\vec{w} = \rho$

Γεωμετρική ερμηνεία: Έχουμε ότι $\vec{x} = (\vec{x}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\vec{x}\cdot\vec{v})\vec{v} + (\vec{x}\cdot\vec{w})\vec{w}$

$= \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} + \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} + \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}$

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα στο άθροισμα είναι οι προβολές του $\vec{x}$ στα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ αντίστοιχα.

Άσκηση 13

α) Εξετάστε αν ισχύει γενικά $(\vec{a}\times\vec{\beta})\times\vec{c} = \vec{a}\times(\vec{\beta}\times\vec{c})$ $\forall \vec{a},\vec{\beta},\vec{c}$ στον $\mathbb{R}^3$

β) Αν τα $\vec{a},\vec{\beta}$ είναι γρ. ανεξάρτητα και $(\vec{a}\times\vec{\beta})\times\vec{c}=0$, δείξτε ότι το $\vec{c}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που παράγουν τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$

Λύση

α) Εν γένει δεν ισχύει.
Θεωρώ $\vec{a}=\vec{\beta}=\vec{i}$, $\vec{c}=\vec{j}$
Τότε $(\vec{a}\times\vec{\beta})\times\vec{c} = \vec{0}\times\vec{j}=\vec{0}$ και $\vec{a}\times(\vec{\beta}\times\vec{c}) =$
$= \vec{i}\times(\vec{i}\times\vec{j}) = \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$ και $\vec{0}\neq -\vec{j}$

β) Αφού $\vec{a},\vec{\beta}$ γρ. ανεξάρτητα, τότε $\vec{a}\times\vec{\beta}\neq\vec{0}$
Συνεπώς $(\vec{a}\times\vec{\beta})\times\vec{c}=0 \Rightarrow \vec{a}\times\vec{\beta}, \vec{c}$ είναι γρ. εξαρτημένα, δηλαδή είναι συγγραμμικά (παράλληλα)
Όμως το $\vec{a}\times\vec{\beta}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που παράγουν τα $\vec{a},\vec{\beta}$. Επομένως το ίδιο θα συμβαίνει και με το $\vec{c}$