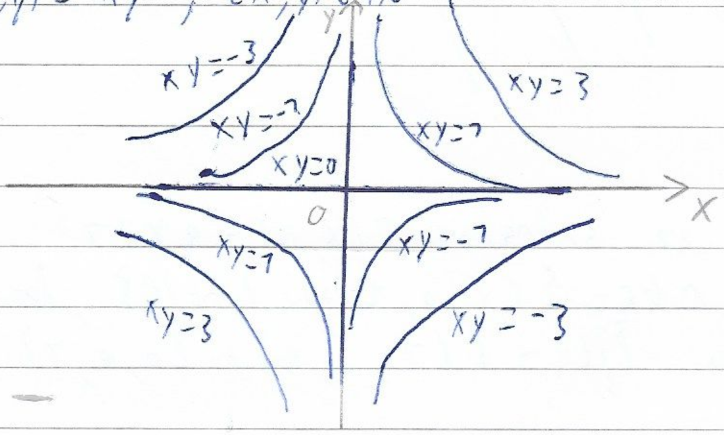
2η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1

Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις σχεδιάστε μερικές καμπύλες στάθμης, βρείτε τις τομές του γραφήματος με τα επίπεδα xz και yz.
Με βάση αυτά περιγράψτε το γράφημα της συνάρτησης

Λύση

α) $f(x,y) = xy \ , \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$



- Τομή με xz επίπεδο: $f(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

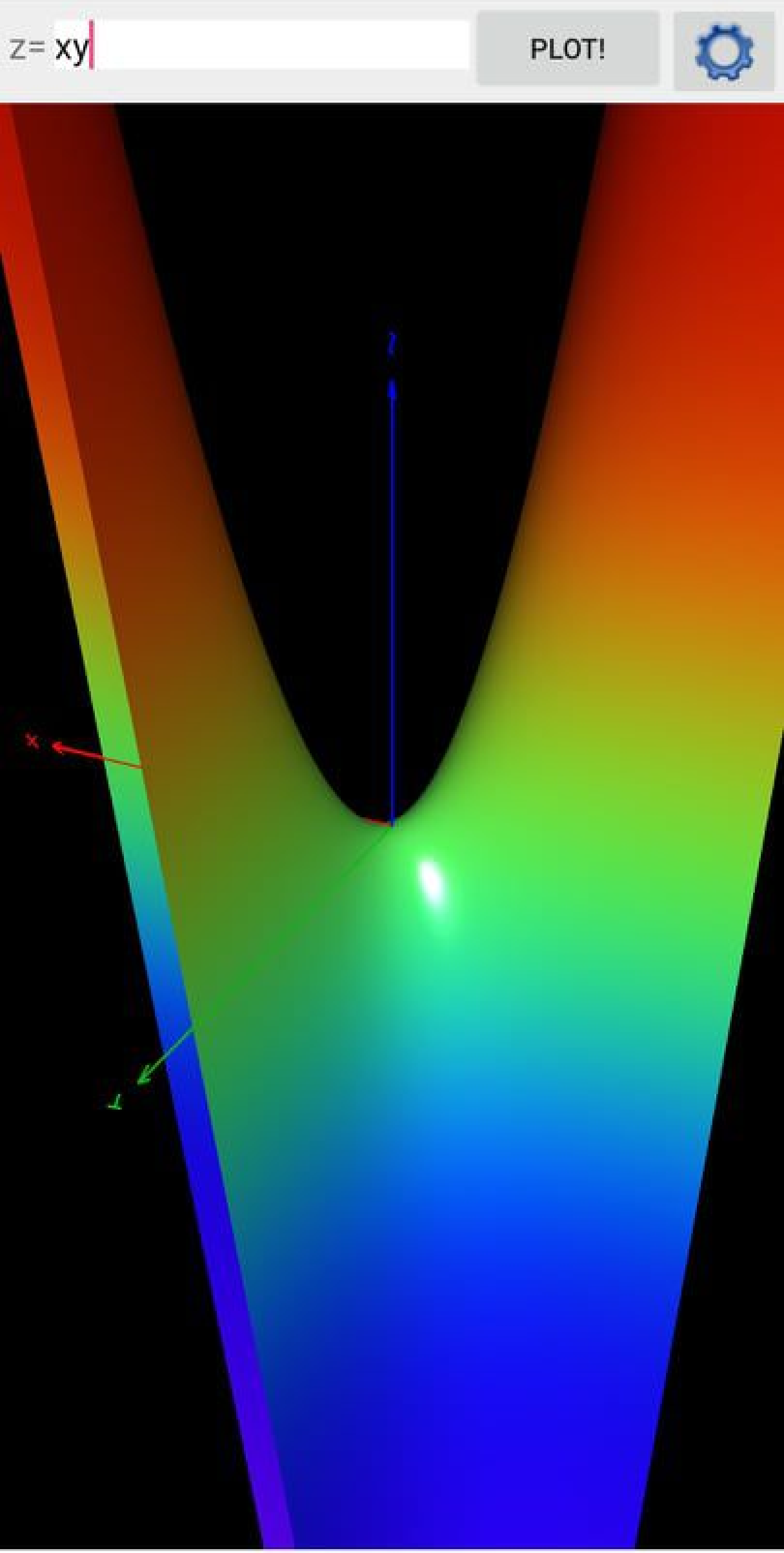
Το γράφημα της f είναι το $G_f = \{ (x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

Οπότε $\Pi_{xz} \cap G_f = \{ (x,0,0) \mid x \in \mathbb{R} \}$

Αυτό το σύνολο παριστάνει την ευθεία $\vec{\ell}_1(t) = t(1,0,0)$

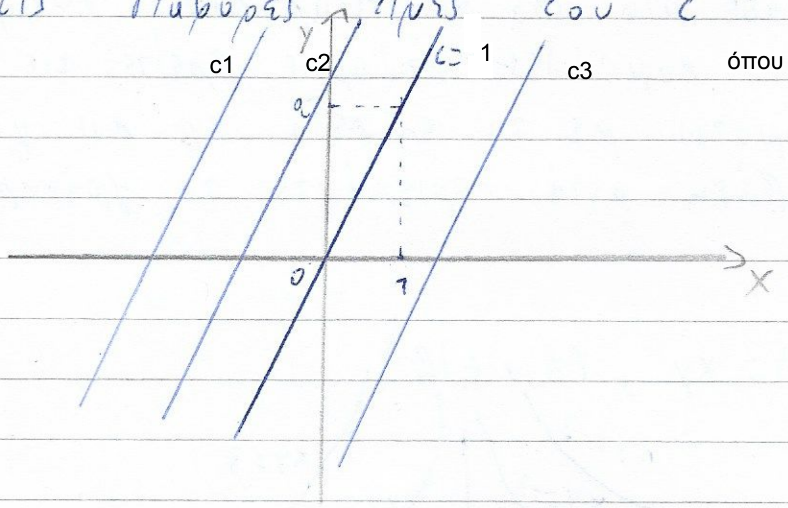
- Τομή με yz επίπεδο: $f(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

Οπότε $\Pi_{yz} \cap G_f = \{ (0,y,0) \mid y \in \mathbb{R} \}$ που παριστάνει την ευθεία $\vec{\ell}_2(t) = t(0,1,0)$


z= xy
PLOT!

β) $f(x,y) = 2x - y + 1 \,,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Παρατηρούμε ότι η $f(x,y) = c \iff 2x - y + 1 = c \iff y = 2x + 1 - c$, παριστάνουν ευθείες παράλληλες για τις διάφορες τιμές του c



• Τομή με xz επίπεδο: $f(x,0) = 2x + 1$

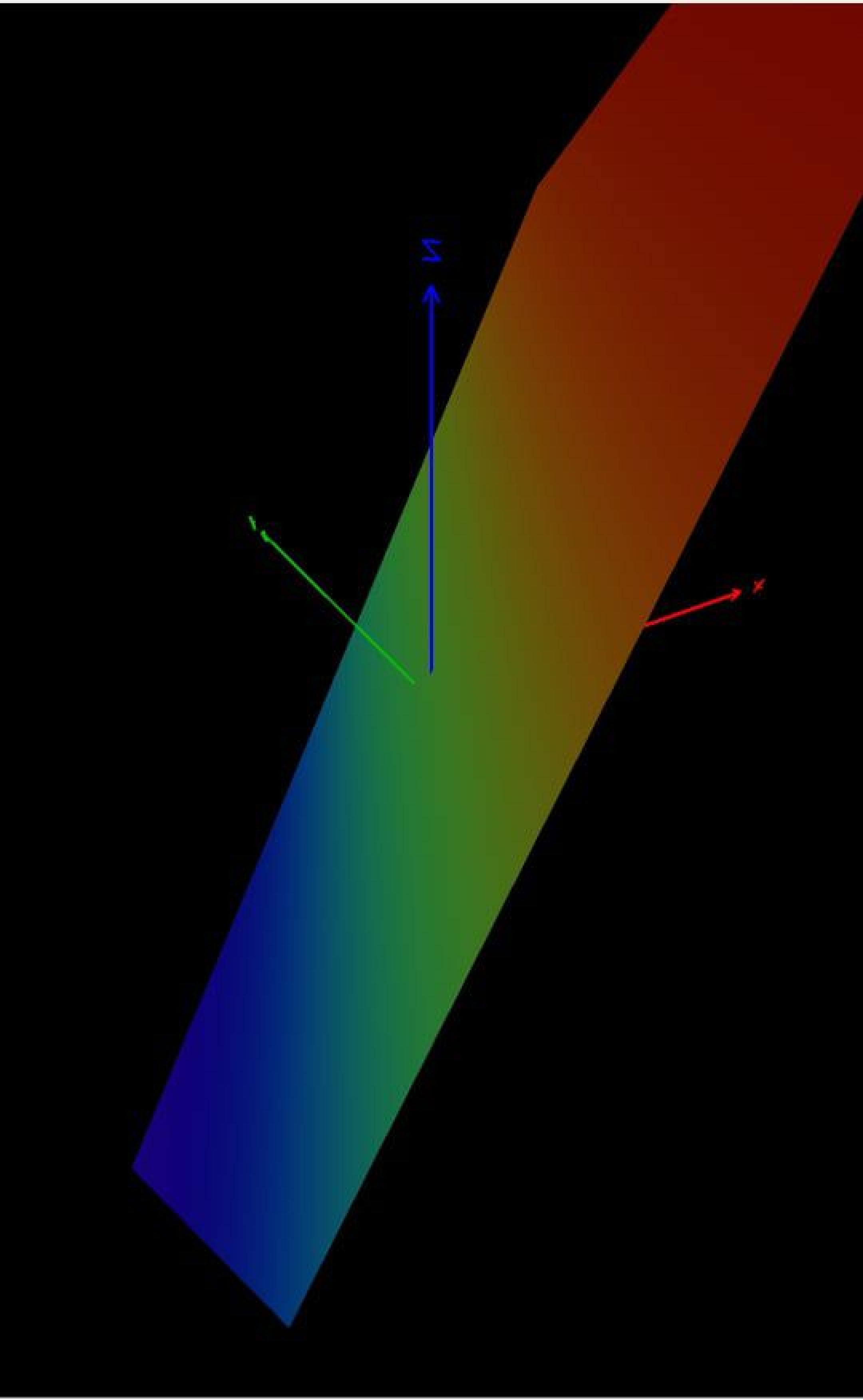
Οπότε $\Pi_{xz} \cap G_f = \{(x, 0, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$, δηλαδή παριστάνει την ευθεία $\vec{\ell_3}(t) = t(1,0,2) + (0,0,1)$

• Τομή με το yz επίπεδο: $f(0,y) = -y + 1$

Οπότε $\Pi_{yz} \cap G_f = \{(0, y, -y+1) \mid y \in \mathbb{R}\}$, δηλαδή παριστάνει την ευθεία $\vec{\ell_4}(t) = t(0,1,-1) + (0,0,1)$

z= 2x-y+1

PLOT!



γ) $f(x,y) = \sin(\sqrt{x^2+y^2}) \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Όμως, αφού $\sqrt{x^2+y^2} \geq 0$, πρέπει $k \geq 0$

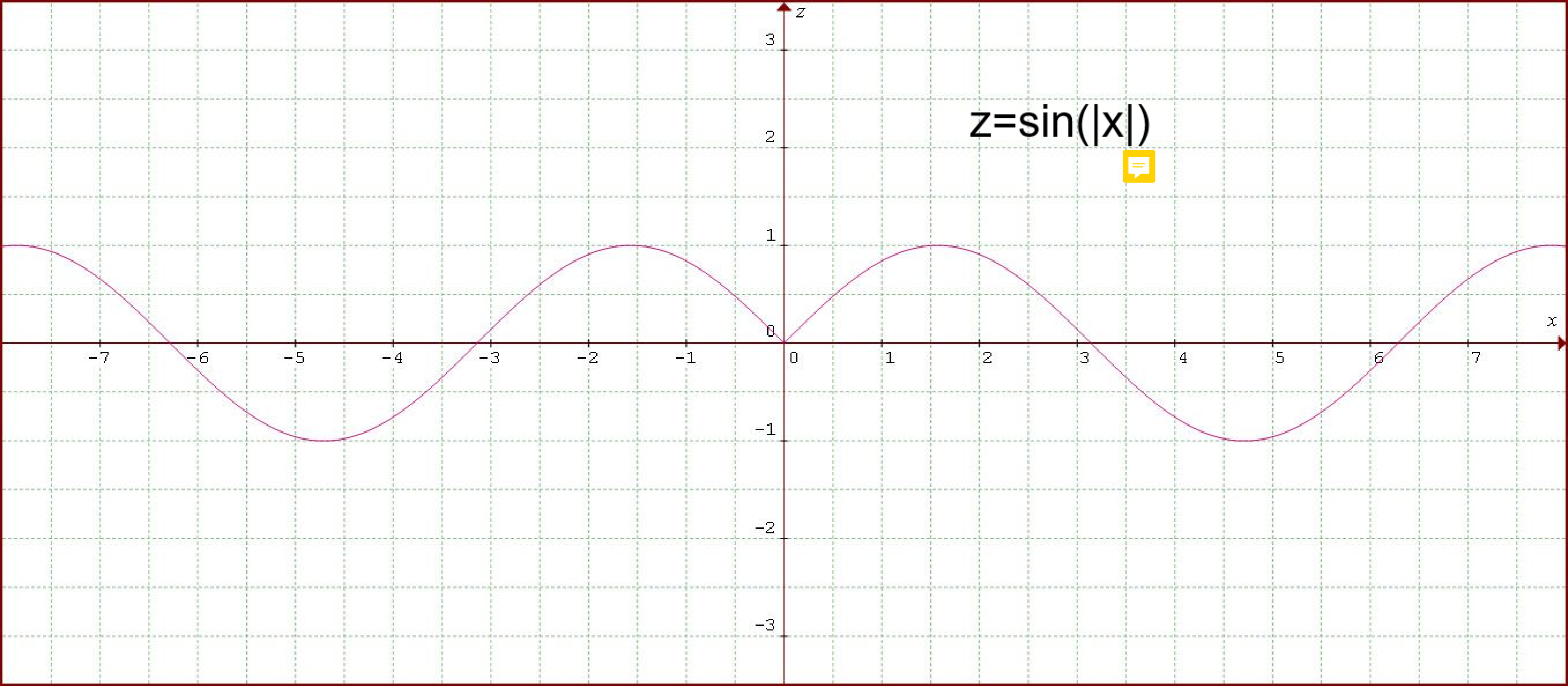
Οπότε ισοδύναμα έχουμε ότι $\begin{cases} x^2+y^2 = (2k\pi + \frac{\pi}{6})^2, \ k \in \mathbb{N}_0 \\ x^2+y^2 = (2k\pi + \frac{5\pi}{6})^2, \ k \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$

όπου $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$

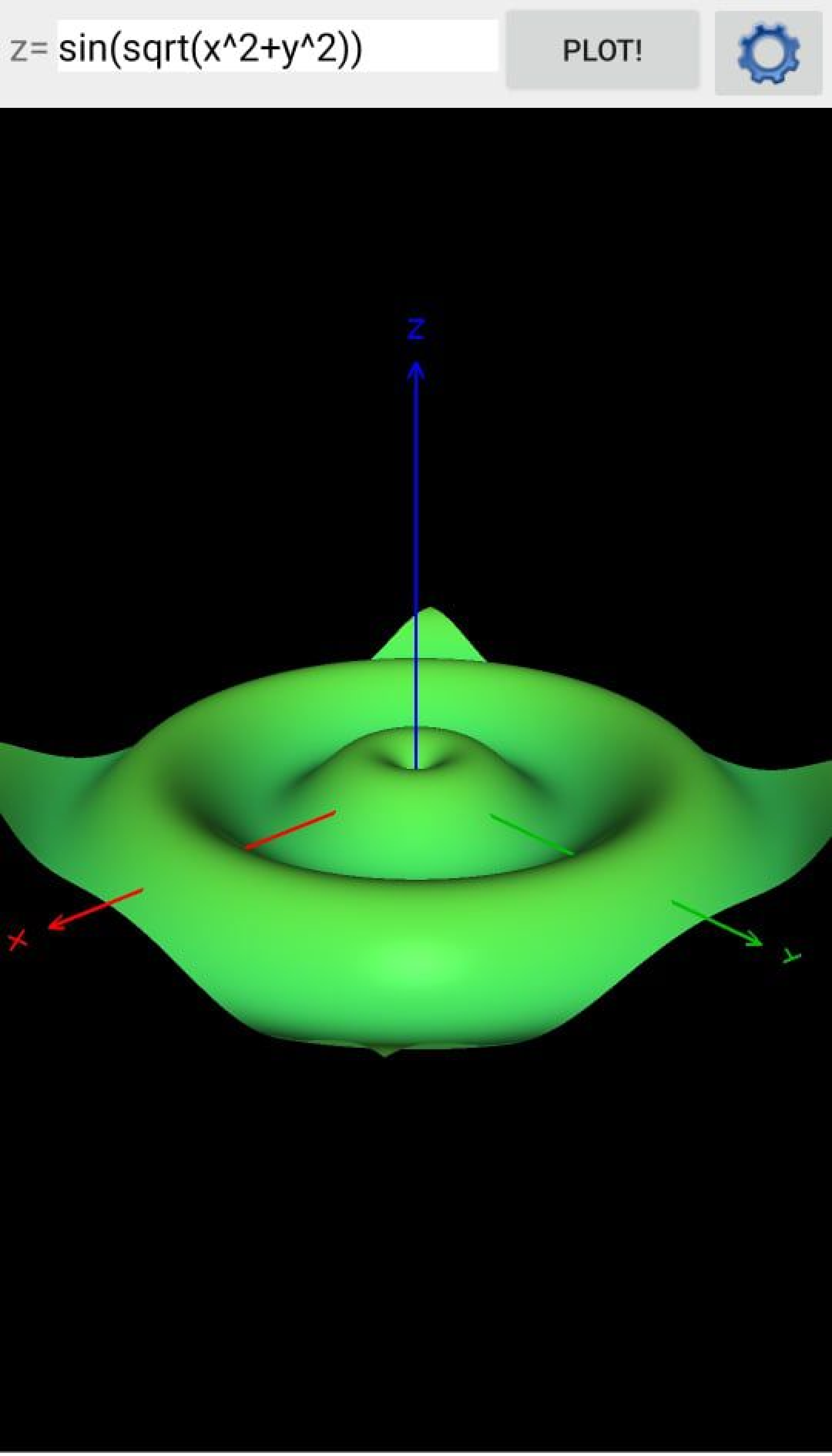
Άρα παίρνουμε ομόκεντρους κύκλους με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνες $2k\pi + \frac{\pi}{6}$, $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Η $f(x,y) = c$ λύνεται με παρόμοιο τρόπο για όλες τις τιμές του $c \in [-1, 1]$ και δεν έχει λύση αν $|c| > 1$, αφού $|\sin a| \leq 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

- Τομή με xz επίπεδο: $\Pi_{xz} \cap G_f = \{(x, 0, \sin|x|) : x \in \mathbb{R}\}$
- Τομή με yz επίπεδο: $\Pi_{yz} \cap G_f = \{(0, y, \sin|y|) : y \in \mathbb{R}\}$



z=sin(|x|)
z
x
3
2
1
0
-1
-2
-3
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7



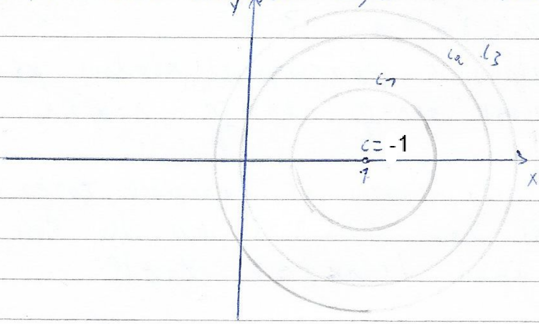
z= sin(sqrt(x^2+y^2))
PLOT!
Z
X
Y

δ) $f(x,y) = x^2+y^2-2x$

Παρατηρούμε ότι $f(x,y) = x^2+y^2-2x+1-1 =$
$= (x-1)^2+y^2-1$

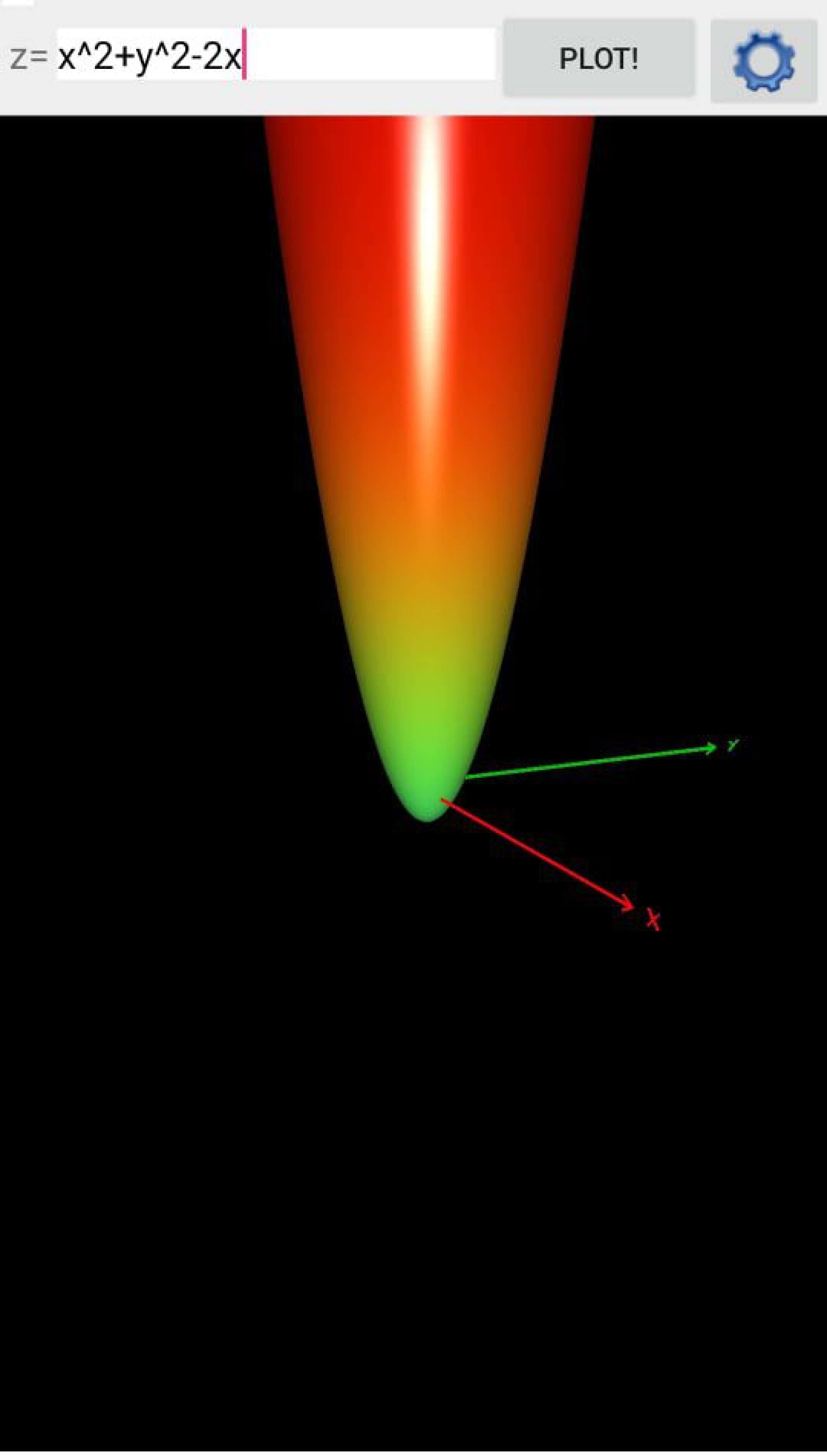
Οπότε $f(x,y) = c \iff (x-1)^2+y^2 = c+1$

Άρα για $c=-1$, έχουμε το σημείο $(1,0)$, για $c<-1$ η εξίσωση είναι αδύνατη, και για $c>-1$ έχουμε κύκλο κέντρου $(1,0)$ και ακτίνας $R_c = \sqrt{c+1}$



, όπου $-1<c_1<c_2<c_3$

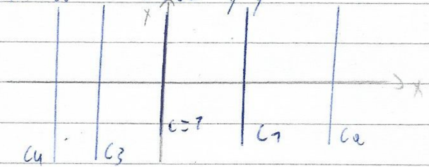
- $\Pi_{xz} \cap G_f = \{(x, 0, x^2-2x) \mid x\in\mathbb{R}\}$
- $\Pi_{yz} \cap G_f = \{(0, y, y^2) \mid y\in\mathbb{R}$


z= x^2+y^2-2x
PLOT!
y
x

ε) $f(x,y)=e^x$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

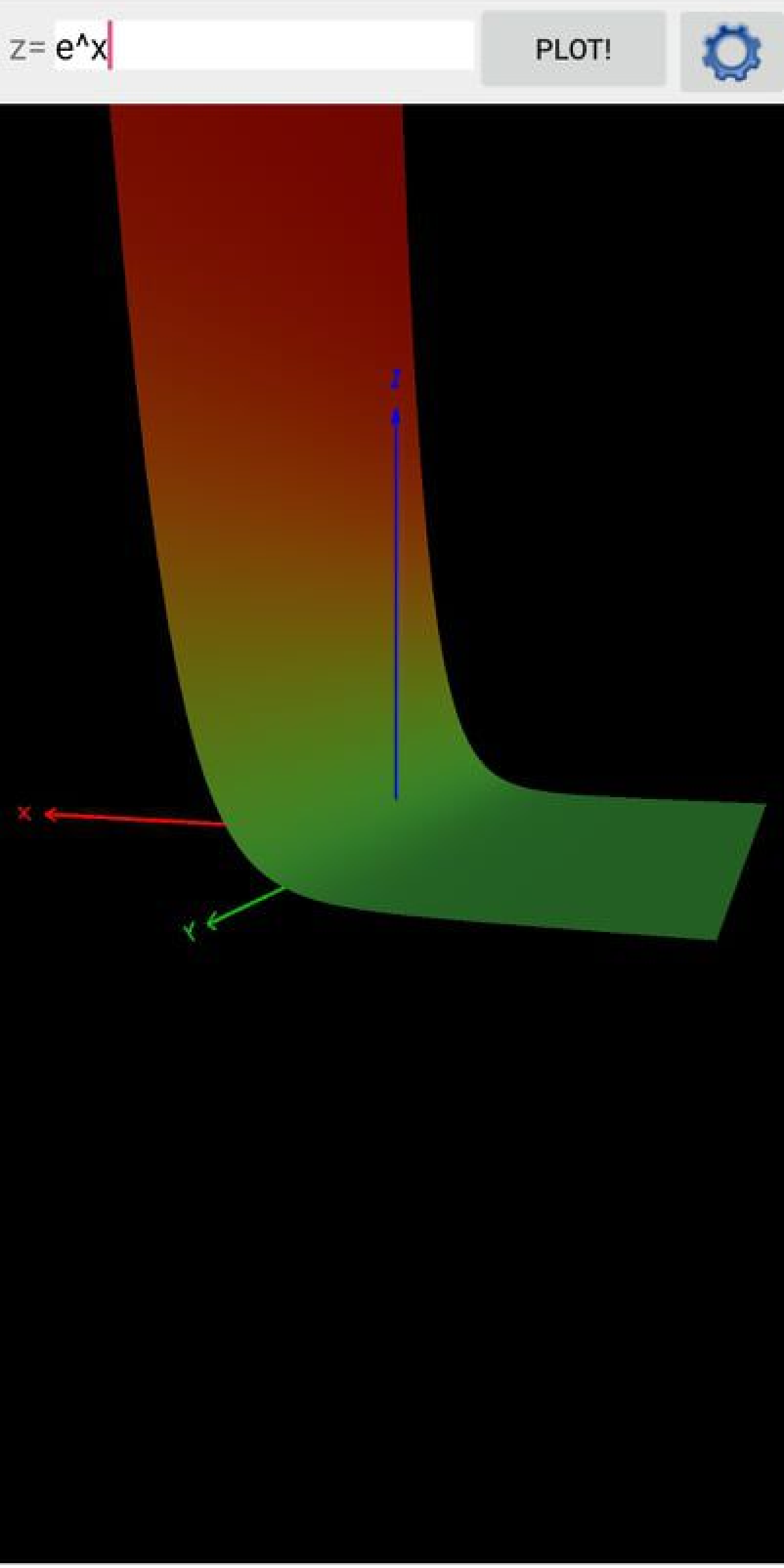
$f(x,y)=c \Leftrightarrow e^x=c \Leftrightarrow x=\ln c$, αν $c>0$ και η εξίσωση είναι αδύνατη για $c\le 0$

Οπότε οι καμπύλες στάθμης παριστάνουν ευθείες παράλληλες στον $y'y$



, όπου $c_4<c_3<1<c_1<c_2$

- $\Pi_{xz}\cap G_f=\{(x,0,e^x) : x\in\mathbb{R}\}$
- $\Pi_{yz}\cap G_f=\{(0,y,1) : y\in\mathbb{R}\}$, που παριστάνει την ευθεία $\vec{e_5}(t)=t(0,1,0)+(0,0,1)$


z= e^x
PLOT!
z
x
y

Άσκηση 2

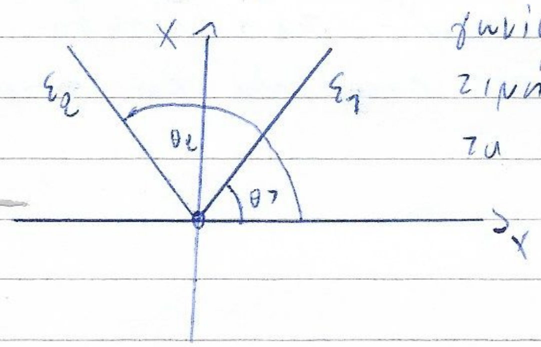
Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, περιγράψτε τις καμπύλες στάθμης της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

Λύση

Έχουμε ότι $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $r>0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Οπότε $f(r,\theta) = \frac{2r\cos\theta \, r\sin\theta}{r^2} = 2\cos\theta\sin\theta = \sin(2\theta)$

Παρατηρούμε ότι η f είναι ακτινικά σταθερή, δηλαδή πάνω στις ημιευθείες με αρχή το O, που σχηματίζουν γωνία θ με τον $x'x$, έχει σταθερή τιμή. Με βάση το σχήμα, όλα τα σημεία της ε_1 έχουν την ίδια τιμή, $f(r,\theta_1) = \sin(2\theta_1)$ και όμοια για την ε_2



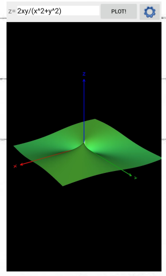
Βλέπουμε ακόμα ότι η $f(x,y) = c$ έχει λύση $\Leftrightarrow c \in [-1, 1]$

- Τώρα π.χ. $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sin(2\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\theta = \kappa\pi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \theta = \frac{\kappa\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Όμως $\theta \in [0, 2\pi) \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

Άρα η f πάνω στους άξονες xx', yy' παίρνει την τιμή 0

- Επίσης $f(x,y) = 1 \Leftrightarrow \sin(2\theta) = 1 \Leftrightarrow 2\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$, αφού $\theta \in [0, 2\pi)$



Άσκηση 3

Περιγράψτε τις επιφάνειες στάθμης της $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$f(x,y,z) = y^2 + z^2$

Λύση

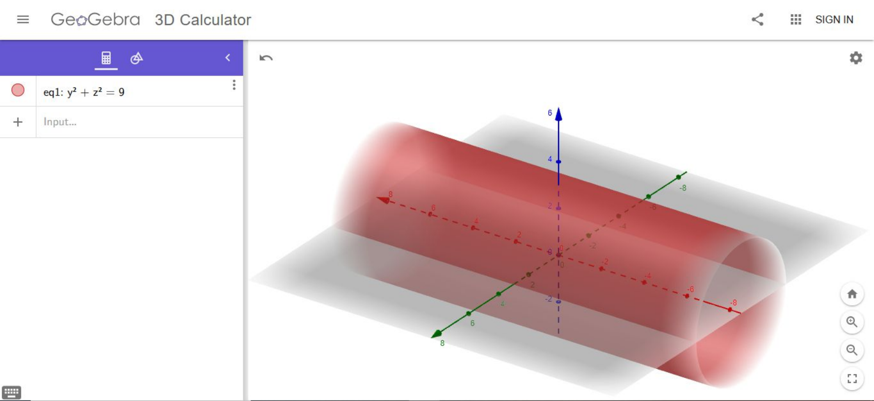
i) Η $f(x,y,z) = c$ δεν έχει λύση για $c<0$

ii) Η $f(x,y,z) = 0 \iff y = z = 0,\ x \in \mathbb{R}$

Δηλαδή είναι η ευθεία $\vec{l}(t) = t(1,0,0)$

iii) Για $c>0$: $f(x,y,z) = c \iff y^2+z^2 = c$

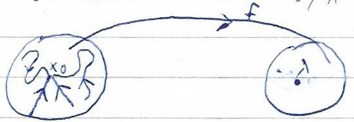
Αυτό παριστάνει κύλινδρο, διότι αν φανταστούμε ότι $x \equiv k$, τότε στο επίπεδο $x \equiv k$ η $y^2+z^2=c$ παριστάνει κύκλο κέντρου O και ακτίνας $\sqrt{c}$, και συνεπώς, καθώς "τρέχουν" τα επίπεδα $x \equiv k$, ο κύκλος μετατοπίζεται παράλληλα και σχηματίζει κύλινδρο


GeoGebra 3D Calculator
SIGN IN
eq1: y² + z² = 9
Input...

Όρια

Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A.
Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}^k$, τότε αυτό σημαίνει ότι για

κάθε περιοχή του λ (ας πούμε μπάλα με κέντρο το λ), υπάρχει μια περιοχή του x_0 (ας πούμε μπάλα με κέντρο το x_0), ώστε αν $x \in A$ με $x \neq x_0$ και το x ανήκει σε αυτή την μπάλα με κέντρο το x_0, τότε το $f(x)$ θα ανήκει στην αρχική περιοχή του λ



Άρα, όπως και να προσεγγίσουμε το x_0 μέσα στην αριστερή μπάλα, ~~το f(x)~~ και εντός του A, τότε το $f(x)$ θα είναι κοντά στο λ, δηλαδή μέσα στη δεξιά μπάλα

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{xy^2}{x^2+y^2}}$

Λύση

Έχουμε ότι $\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = |x| \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |x|\cdot 1 = |x|$ και

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$

Οπότε $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$

Συνεπώς $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{xy^2}{x^2+y^2}} = \lim_{t\to 0} e^t = 1$, λόγω συνέχειας

της e^t

Άσκηση 8

Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Λύση

Θέτουμε $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y) \neq (0,0)$

Παρατηρούμε ότι $f(x,0) = f(0,y) = 0$ (1)

Τώρα για $x \neq 0$ και $y \neq 0$, έχουμε ότι:

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Έχουμε ότι $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$

Τώρα $0 \leq \left| \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \sqrt{\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2}}} \xrightarrow[xy\neq 0]{(x,y)\to(0,0)} 0$,

αφού $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \sqrt{\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2}} = +\infty$

Οπότε έχουμε ότι $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

Άρα $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} f(x,y) = 1\cdot 0 = 0$ (2).

Οπότε τελικά $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, από (1), (2)

Άσκηση 9

Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin y + x^2 y}{x^2+y^4}$

Λύση

Θέτουμε $f(x,y) = \frac{x\sin y + x^2 y}{x^2+y^4}$, $(x,y)\neq(0,0)$

Παρατηρούμε ότι $f(x,0)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=0$

Όμως $f(x,x) = \frac{x\sin x + x^3}{x^2+x^4} = \frac{x\sin x}{x^2+x^4} + \frac{x^3}{x^2+x^4} =$

$= \frac{\sin x}{x+x^3} + \frac{x}{1+x^2} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = 1\cdot 1 + 0 = 1$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει

Άσκηση 10

Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{\sqrt{x^2+2y^2}}$

Λύση

Θέτουμε $f(x,y) = \frac{e^{xy}-1}{\sqrt{x^2+2y^2}}$, $(x,y)\neq 0$ και παρατηρούμε

ότι $f(x,0)=0 \quad \forall x\neq 0$, $f(0,y)=0 \quad \forall y\neq 0$ (1)

Τώρα αν $xy\neq 0$: $f(x,y) = \frac{e^{xy}-1}{xy}\cdot\frac{xy}{\sqrt{x^2+2y^2}}$ και έχουμε

ότι $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \frac{e^{xy}-1}{xy} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = \frac{d}{dz}\Big|_{z=0}(e^z) = e^0 = 1$

Επίσης $\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+2y^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{2}{x^2}}} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$, όπως στην Άσκηση 8

Άρα τελικά $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} f(x,y) = 1\cdot 0 = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Άσκηση 11

Δίνεται η $f:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq y\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\frac{xy}{x-y}$

α) Αποδείξτε ότι $\forall\lambda>0$ με $\lambda\neq1$, το $\lim_{x\to0} f(x,x^\lambda)$ υπάρχει

β) Αποδείξτε ότι το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει

Λύση

α) $f(x,x^\lambda)=\frac{x^{\lambda+1}}{x-x^\lambda}$, για $x\neq0$ και x "κοντά" στο 0

(Με το κοντά στο 0 εννοούμε, σε περιοχή του 0 στην οποία δεν υπάρχουν ρίζες της $x-x^\lambda=0$)

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

i) Αν $\lambda>1$: $f(x,x^\lambda)=\frac{x^{\lambda+1}}{x(1-x^{\lambda-1})}=\frac{x^\lambda}{1-x^{\lambda-1}}\xrightarrow{x\to0}\frac{0}{1-0}=0$, αφού $\lambda>1$

ii) Αν $\lambda<1$: $f(x,x^\lambda)=\frac{x^{\lambda+1}}{x^\lambda(x^{1-\lambda}-1)}=\frac{x}{x^{1-\lambda}-1}\xrightarrow{x\to0}\frac{0}{0-1}=0$, αφού $0<1-\lambda$

β) Παρατηρούμε και ότι $f(x,\mu x)=\frac{\mu x^2}{(1-\mu)x}=\frac{\mu x}{1-\mu}\xrightarrow{x\to0}0$ για $\mu\neq1$

Μια σκέψη λοιπόν είναι η εξής: Αν κατά μήκος κάποιας καμπύλης $y=g(x)$ ισχύει ότι $\lim_{x\to0} g(x)=0$ και $f(x,g(x))=1$ $\forall x$ κοντά στο 0 με $x\neq0$, τότε προφανώς $\lim_{x\to0} f(x,g(x))=1$ και άρα δεν μπορεί να ισχύει ότι

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, διότι προσεγγίζοντας το $(0,0)$ από την $(x,g(x))$ "πλησιάζουμε" στο 1 και όχι στο 0

Έχουμε τώρα ότι $f(x,y)=1 \Leftrightarrow \frac{xy}{x-y}=1 \Leftrightarrow xy=x-y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y(x+1)=x \Leftrightarrow y=\frac{x}{x+1}$

Παρατηρούμε επίσης, ότι $\lim_{x\to0}\frac{x}{x+1}=0$

Οπότε $\lim_{x\to0} f\left(x,\frac{x}{x+1}\right)=\lim_{x\to0}1=1$. Άρα με βάση τα παραπάνω δεν υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$

Να δείξετε ότι υπάρχουν τα διαδοχικά όρια $\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)$, $\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)$ και ότι είναι ίσα,

αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Λύση

Για $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ σταθερό, έχουμε ότι $\lim_{y\to0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{x\cdot0}{x^2+0}=$

$=\frac{0}{x^2}=0$

Οπότε $\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=\lim_{x\to0} 0=0$

Όμοια για $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ σταθερό, έχουμε ότι
$\lim_{x\to0} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{0\cdot y}{0+y^2}=\frac{0}{y^2}=0$

Οπότε $\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=\lim_{y\to0} 0=0$

Τώρα θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Πράγματι, $f(x,0)=0\xrightarrow{x\to0}0$
Οπότε $\lim_{x\to0} f(x,0)=0$

Επίσης $f(x,x)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}\xrightarrow{x\to0}\frac{1}{2}$, δηλαδή $\lim_{x\to0} f(x,x)=\frac{1}{2}$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Άσκηση 11

Για τις διάφορες τιμές του $a>0$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^a}$

Εξετάστε για ποιες τιμές του $a>0$ μπορεί η f να επεκταθεί σε συνεχή στο $\mathbb{R}^2$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $f(x,0) = 0 \xrightarrow{x\to 0} 0$. (1)

Συνεπώς η f μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή στο $\mathbb{R}^2$ $\Leftrightarrow$ υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \in \mathbb{R}$ και της δώσουμε στο $(0,0)$ αυτή την τιμή.

Αν υπάρχει το όριο, τότε λόγω (1), $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

i) Για $a>1$ έχουμε ότι $f(x,x) = \dfrac{x^2}{(2x^2)^a} =$

$= \dfrac{1}{2^a (x^2)^{a-1}} \xrightarrow{x\to 0^+} +\infty$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

ii) Για $a=1$: $f(x,x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow{x\to 0} \dfrac{1}{2}$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

iii) Για $a<1$: Έχουμε ότι $|f(x,y)| = \dfrac{|xy|}{(x^2+y^2)^a} =$

$= \dfrac{|xy|}{(x^2+y^2)} \cdot (x^2+y^2)^{1-a} \overset{(*)}{\leq} \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{1-a} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

Οπότε $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Άρα για $0<a<1$ η f επεκτείνεται σε συνεχής στο $\mathbb{R}^2$

(*) Σημειώνουμε ότι $(|x|-|y|)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2|x||y| + |y|^2 \geq 0$
$\Leftrightarrow 2|x||y| \leq x^2+y^2 \Leftrightarrow \dfrac{|x||y|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}$

Άσκηση 74

Για τις διάφορες τιμές του $\beta > 0$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{x^2 \sin y}{(x^2+y^2)^\beta}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

Εξετάστε για ποιες τιμές της παραμέτρου β, η f μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$

Λύση

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ως πράξεις συνεχών

Επομένως η f μπορεί να επεκταθεί ως συνεχής στο $\mathbb{R}^2$ $\Leftrightarrow$ υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \in \mathbb{R}$ και της δώσουμε την τιμή αυτού του ορίου

Παρατηρούμε ότι $f(x,0) = 0 \ \forall x \neq 0$. Οπότε αν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ θα πρέπει να ισχύει ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Για $x \neq 0$ έχουμε ότι $f(x,x) = \dfrac{x^2 \sin x}{(2x^2)^\beta} = \dfrac{x^3}{2^\beta x^{2\beta}} \dfrac{\sin x}{x}$

i) Αν $3 < 2\beta$, τότε $f(x,x) = \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{1}{2^\beta} \dfrac{1}{x^{2\beta-3}}$ και

~~Δεν υπάρχει~~ π.χ έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x,x) = 1 \cdot \dfrac{1}{2^\beta} (+\infty) = +\infty$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

ii) Αν $3 = 2\beta$, τότε $f(x,x) = \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{2^\beta} \xrightarrow{x\to 0} \dfrac{1}{2^\beta} \neq 0$

Οπότε ούτε σε αυτή την περίπτωση υπάρχει το όριο

(iii) Αν $0 < 2\beta < 3$ βλέπουμε ότι $f(x,x) = \dfrac{x^{3-2\beta}}{2^\beta} \dfrac{\sin x}{x} \to 0 \cdot 1 = 0$

Δεν αρκεί όμως αυτό. Πρέπει να δείξουμε ότι για $0 < 2\beta < 3$, υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$)

Οπότε για $0<2\beta<3 \Leftrightarrow 0<\beta<\frac{3}{2}$ έχουμε ότι

για $y\neq 0$ $f(x,y)=\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^\beta}\frac{\sin y}{y}=$

$$=\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}-\beta}\frac{\sin y}{y}$$

Αφού $\frac{3}{2}>\beta$, έχουμε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}-\beta}\frac{\sin y}{y}=$

$=0\cdot 1=0$

Αν δείξουμε ότι $\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ φραγμένο, τότε

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\neq 0}}f(x,y)=0$, αφού θα έχουμε μηδενική επί φραγμένη

Τώρα $\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ φραγμένη $\Leftrightarrow\left(\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2$ φραγμένη

$\Leftrightarrow \frac{x^4y^2}{(x^2+y^2)^3}$ φραγμένη

Όμως $(x^2+y^2)^3=x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6\geq 3x^4y^2$

$\Leftrightarrow \frac{x^4y^2}{(x^2+y^2)^3}\leq\frac{1}{3}$ και άρα είναι φραγμένη

Επομένως, από τα παραπάνω, αφού επιπλέον $f(x,0)=0$

παίρνουμε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ $\forall\, 0<\beta<\frac{3}{2}$