1ο Διαγώνισμα Ανάλυσης II

Θέμα 1ο

(α) Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, αποδείξτε ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \iff \text{τα } \vec{x}, \vec{y} \text{ είναι ορθογώνια}$$

Ποιο Θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας εκφράζει η παραπάνω ισοδυναμία;

Απάντηση

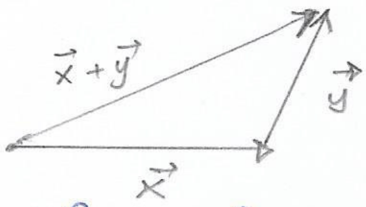
Είναι:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{x} + \vec{y}\cdot\vec{y}$$
$$= \|\vec{x}\|^2 + 2\,\vec{x}\cdot\vec{y} + \|\vec{y}\|^2.$$

Άρα

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \iff \vec{x}\cdot\vec{y} = 0 \iff \vec{x}, \vec{y} \text{ ορθογώνια}$$

Η παραπάνω ισοδυναμία λέει ότι:



Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών (Πυθαγόρειο Θεώρημα) και, αντίστροφα, αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο μιας πλευράς ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Θέμα 1ο

(Β) Δίνεται η επιφάνεια S που ορίζεται στον $\mathbb{R}^3$ από την εξίσωση:

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$$

(i) Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου P της S στο σημείο της $(1, 1, -2)$.

(ii) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι παράλληλο προς το P και διέρχεται από το σημείο $(3, 4, 0)$.

Απάντηση

(i) Η επιφάνεια S είναι επιφάνεια στάθμης της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2.$$

Η f ως πολυωνυμική είναι διαφορίσιμη, άρα ορίζεται η κλίση της ∇f και το εφαπτόμενο επίπεδο σε οποιοδήποτε σημείο $\vec{a}$ της S είναι κάθετο στην $\nabla f(\vec{a})$.

Είναι

$$\nabla f(1,1,-2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)\Big|_{(1,1,-2)}$$

$$= (4x, 6y, 2z)\Big|_{(1,1,-2)}$$

$$= (4, 6, -4)$$

Άρα:

$$P: \quad 4(x-1) + 6(y-1) - 4(z+2) = 0$$

ή $\quad 2(x-1) + 3(y-1) - 2(z+2) = 0$

ή $\quad 2x + 3y - 2z = 9$

(ii) Το επίπεδο αυτό θα είναι πάλι κάθετο προς το $\nabla f(1,1,-2) = (4, 6, -4)$, δηλαδή κάθετο στο διάνυσμα $(2, 3, -2)$ και διέρχεται από το σημείο $(3, 4, 0)$, άρα έχει εξίσωση:

$$2(x-3) + 3(y-4) - 2z = 0$$

ή $\quad 2x + 3y - 2z = 18.$

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2} \quad , \quad (x,y)\neq(0,0)$$

(α) Δείξτε ότι, για κάθε σημείο $(x_0,y_0)\neq(0,0)$, η κατεύθυνση στην οποία η f αυξάνει πιο γρήγορα στο (x_0,y_0) είναι η κατεύθυνση του διανύσματος $-x_0\vec{i}-y_0\vec{j}$. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f σε αυτή την κατεύθυνση.

(β) Σχεδιάστε τις καμπύλες στάθμης της συνάρτησης f που αντιστοιχούν στις τιμές $c=\frac{1}{4}$, $c=\frac{1}{2}$ και $c=1$ και τοποθετήστε στο σχήμα σας το διάνυσμα κλίσης της f στο σημείο $(1,-1)$ με αρχή το σημείο $(1,-1)$.

Απάντηση

Η f είναι διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, ως ρητή. Άρα, σε κάθε σημείο $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, η κατεύθυνση στην οποία η f αυξάνει πιο γρήγορα δίνεται από το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f(x_0,y_0)$ (αρκεί να είναι $\nabla f(x_0,y_0)\neq(0,0)$).

Είναι

$$\nabla f(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}=$$

$$=\left(-\frac{2x_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}\ ,\ -\frac{2y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}\right)$$

$$=-\frac{2}{(x_0^2+y_0^2)^2}\,(x_0,\ y_0)\ ,$$

δηλαδή

$$\nabla f(x_0,y_0)=\frac{2}{(x_0^2+y_0^2)^2}\cdot\left(-x_0\vec{i}-y_0\vec{j}\right),$$

ομόρροπο του $-x_0\vec{i}-y_0\vec{j}$

Γενικά, ο ρυθμός μεταβολής της f στο σημείο $\vec{a}$ στην κατεύθυνση του διανύσματος κλίσης $\nabla f(\vec{a})$ είναι ίσος με $\|\nabla f(\vec{a})\|$.

Αυτό προκύπτει γιατί ο ρυθμός μεταβολής στην κατεύθυνση του $\nabla f(\vec{a})$ είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος στην κατεύθυνση του $\nabla f(\vec{a})$, δηλαδή είναι, για $\vec{u} = \frac{1}{\|\nabla f(\vec{a})\|} \cdot \nabla f(\vec{a})$,

$$D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \frac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|} = \frac{\|\nabla f(\vec{a})\|^2}{\|\nabla f(\vec{a})\|} = \|\nabla f(\vec{a})\|.$$

Εδώ, ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι

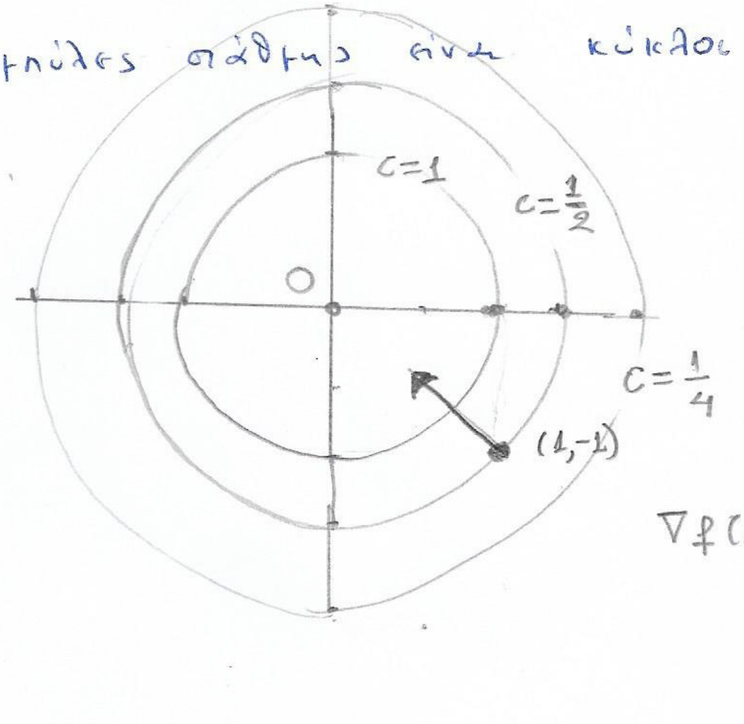
$$\|\nabla f(x_0, y_0)\| = \frac{2}{(x_0^2+y_0^2)^2} \sqrt{x_0^2+y_0^2} = \frac{2}{(x_0^2+y_0^2)^{3/2}}$$

(β) Είναι: $\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{4} \iff x^2+y^2=4 \iff \sqrt{x^2+y^2} = 2$

$\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \iff x^2+y^2=2 \iff \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$

$\frac{1}{x^2+y^2} = 1 \iff x^2+y^2=1 \iff \sqrt{x^2+y^2} = 1.$

Οι καμπύλες στάθμης είναι κύκλοι κέντρου O:



$\nabla f(1,-1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Θέμα 3ο

(α) Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4+y^4}$$

Απάντηση Έστω $f(x,y) = \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4+y^4}$, $(x,y)\neq(0,0)$.
Για $y=0$, είναι

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$$

και, εφαρμόζοντας διαδοχικά τον κανόνα De L'Hospital, παίρνουμε ότι το τελευταίο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{24x} = \frac{1}{24}.$$

Άρα, όταν $(x,y)\to(0,0)$ κατά μήκος του άξονα $x'x$, τότε $f(x,y) \to \frac{1}{24}$.
Όμως, κατά μήκος του άξονα $y'y$ είναι $f(x,y) = f(0,y) = 0$, άρα όταν $(x,y)\to(0,0)$ κατά μήκος του άξονα $y'y$, τότε $f(x,y)\to 0$.

Συμπεραίνουμε ότι το όριο της f στο $(0,0)$ δεν υπάρχει.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = e^x \cos y$. Βρείτε την κατευθυνόμενη παράγωγο της f στο σημείο $(0,\frac{\pi}{2})$ στην κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

Απάντηση Παρατηρούμε πρώτα ότι η f είναι της κλάσης C^1, άρα διαφορίσιμη. Βρίσκουμε τώρα το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}$ στην κατεύθυνση του $\vec{w}$. Είναι $\|\vec{w}\| = \sqrt{5}$, άρα $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$.
Άρα, αφού f διαφορίσιμη,

$$D_{\vec{w}} f(0,\tfrac{\pi}{2}) = D_{\vec{u}} f(0,\tfrac{\pi}{2}) = \nabla f(0,\tfrac{\pi}{2}) \cdot \vec{u} = (0,-1)\cdot\left(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

αφού $\nabla f(0,\frac{\pi}{2}) = (e^x\cos y, -e^x \sin y)\Big|_{(0,\frac{\pi}{2})} = (0,-1)$

Θέμα 4ο

(α) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M>0$ ώστε $|g(\vec{x})| \le M$, για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y) = x \cdot y \cdot g(x,y)$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Απάντηση

Υπολογίζουμε πρώτα τις μερικές παραγώγους της f στο $(0,0)$. Είναι, με βάση τον ορισμό,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

αφού η f είναι σταθερά ίση με 0 στον άξονα $x'x$ και, όμοια,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0,$$

αφού η f είναι σταθερά ίση με 0 στον άξονα $y'y$.

Άρα το διαφορικό της f, αν υπάρχει, θα είναι ο πίνακας-γραμμή $Df(0,0) = [0, 0]$.

Αρκεί να δούμε αν:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - Df(0,0)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

δηλαδή αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x \cdot y \cdot g(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $2|x||y| \le x^2+y^2$, έχουμε:

$$0 \le \frac{|x \cdot y \cdot g(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|x| \cdot |y| \cdot |g(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} M = \frac{M}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

Αφού $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x \cdot y \cdot g(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

Έπεται ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με

$$f(x,y)=x\cdot y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,,\ \text{αν } (x,y)\neq(0,0) \quad \text{και } f(0,0)=0.$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι της κλάσης C^1 στο $\mathbb{R}^2$.

Απάντηση

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της f.
Για $(x,y)\neq(0,0)$, είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right)=\frac{4x^2y^3+x^4y-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

ενώ στο $(0,0)$, έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x}=0$$

Η $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $(x,y)\neq(0,0)$, ως ρητή.
Για να δείξουμε ότι είναι συνεχής στο $(0,0)$ αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

Είναι $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\le\frac{4|x^2y^3|}{(x^2+y^2)^2}+\frac{|x^4y|}{(x^2+y^2)^2}+\frac{|y^5|}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad (x,y)\neq(0,0)$

και θα φράξουμε κατάλληλα κάθε όρο του δεξιού μέλους ώστε να εφαρμόσουμε το κριτήριο παρεμβολής. Είναι

$$\frac{|x^2y^3|}{(x^2+y^2)^2}=\frac{|x\cdot y|^2}{(x^2+y^2)^2}|y|\le\frac{1}{4}|y| \quad (\text{αφού } 2|x\cdot y|\le x^2+y^2)$$

$$\frac{|x^4y|}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}\cdot|y|\le|y| \quad (\text{αφού } 0\le x^2\le x^2+y^2 \Rightarrow x^4\le(x^2+y^2)^2)$$

και

$$\frac{|y^5|}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4}{(x^2+y^2)^2}|y| \le |y| \quad (\text{όπως πριν})$$

Άρα

$$0 \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \le 4\cdot\frac{1}{4}|y| + |y| + |y| = 3|y|$$

Από το κριτήριο παρεμβολής, αφού $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3|y| = 0$, παίρνουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 .$$

Συμπεραίνουμε ότι η $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι συνεχής στο ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$.

Εντελώς ανάλογη είναι η απόδειξη και για την $\frac{\partial f}{\partial y}$.