Λύσεις 3ης Σειράς Ασκήσεων

1. Βρείτε τις μερικές παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων, εφ' όσον υπάρχουν.

(α) $f(x,y) = e^{xy}$

Είναι $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy}$

(β) $f(x,y) = x \cdot \cos x \cdot \cos y$

Είναι $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos y\,(\cos x - x \sin x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x \cos x \sin y$

(γ) $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$ $(x,y) \neq (0,0)$

Είναι $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot \ln(x^2+y^2) + (x^2+y^2)\cdot \dfrac{2x}{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\ln(x^2+y^2) + 2x$

και, όμοια, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2y \ln(x^2+y^2) + 2y$

(δ) $f(x,y,z) = x y z e^{x^2+y^2}$

Είναι $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yz e^{x^2+y^2} + 2x^2 yz e^{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz e^{x^2+y^2} + 2xy^2 z e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy\, e^{x^2+y^2}$$

(ε) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, $y \neq \pm x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(x^2-y^2) - 2x(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{4xy^2}{(x^2-y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y(x^2-y^2) + 2y(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2}$$

(στ) $f(x,y) = (x+y,\ x-y,\ xy)$

Εστω $f_1(x,y) = x+y$, $f_2(x,y) = x-y$, $f_3(x,y) = xy$

οι συνιστώσες συναρτήσεις της f.

Είναι
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = x$$

(ζ) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2+y^2) - x^2 y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Ομοια, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

(η) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2(x^2+y^4) - 2x^3y^2}{(x^2+y^4)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2y^2 + y^6 - 2x^3y^2}{(x^2+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy(x^2+y^4) - 4xy^5}{(x^2+y^4)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^3y - 2xy^5}{(x^2+y^4)^2}$$

(θ) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Για $(x,y) \neq (0,0)$, είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

και, όμοια,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} .$$

Στο $(0,0)$, θα δείξουμε ότι δεν ορίζονται οι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Είναι

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+0}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$, όμως το τελευταίο όριο δεν υπάρχει, αφού $\frac{|x|}{x} = 1$, αν $x>0$ και $\frac{|x|}{x} = -1$, αν $x<0$.

Συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει η $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$.

Όμοια (λόγω συμμετρίας) αποδεικνύεται ότι δεν ορίζεται η $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$.

2. Εξετάστε ποιες από τις συναρτήσεις της Άσκησης 1 είναι διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους.

Απάντηση

Οι συναρτήσεις (α) - (η) έχουν πεδίο ορισμού είτε το $\mathbb{R}^2$ (οι (α), (β), (στ)), είτε το $\mathbb{R}^3$ (η (δ)) είτε ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ (η (γ): $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, η (ε): $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y): y = \pm x\}$, η (ζ) και η (η): $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) και οι μερικές τους παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού τους - δηλαδή οι συναρτήσεις αυτές είναι της κλάσης C^1. Έπεται ότι είναι διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους.

Η συνάρτηση (θ) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, δεν έχει μερικές παραγώγους στο $(0,0)$, άρα δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό. Στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ οι μερικές της παράγωγοι είναι συνεχείς, άρα είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο $(x,y) \neq (0,0)$.

3. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται σε καθεμιά από τις παρακάτω επιφάνειες στο δεδομένο σημείο. Αιτιολογήστε την ύπαρξη εφαπτόμενου επιπέδου σε κάθε περίπτωση:

(α) $z = x^2 + y^3$ στο σημείο $(3, 1, 10)$

Η δεδομένη επιφάνεια είναι το γράφημα της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 + y^3$, η οποία έχει μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$ συνεχείς.

Άρα η f είναι της κλάσης C^1, επομένως και διαφορίσιμη. (κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι διαφορίσιμη για τον ίδιο λόγο)

Επομένως, ορίζεται το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f στο σημείο του $(3, 1, f(3,1)) = (3, 1, 10)$ και δίνεται από την εξίσωση:

$$z = f(3,1) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(3,1)} \cdot (x-3) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(3,1)} \cdot (y-1),$$

δηλαδή

$$z = 10 + 6(x-3) + 3(y-1)$$

ή

$$6x + 3y - z = 11$$

(β) $z = e^{x-y}$ στο $(1, 1, 1)$

Η επιφάνεια είναι το γράφημα της συνάρτησης $f(x,y) = e^{x-y}$, η οποία έχει μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x-y}$ συνεχείς.
Η f είναι της κλάσης C^1, άρα διαφορίσιμη.
Έπεται ότι το γράφημά της έχει εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο, άρα και στο $(1, 1, f(1,1)) = (1,1,1)$. Το εφαπτόμενο επίπεδο δίνεται από την εξίσωση:

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)} \cdot (x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)} \cdot (y-1)$$

δηλαδή

$$z = 1 + (x-1) - (y-1)$$

ή

$$x - y - z = -1$$

4. Γιατί μπορούμε να πούμε ότι τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x,y) = x^2+y^2$ και $g(x,y) = -x^2-y^2+xy^3$ εφάπτονται στο σημείο $(0,0,0)$;

Απάντηση

Τα γραφήματα θα εφάπτονται αν έχουν κοινό εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο αυτό.
Κατ' αρχάς οι συναρτήσεις f και g είναι διαφορίσιμες, αφού ως πολυωνυμικές είναι της κλάσης C^1. Άρα υπάρχουν τα εφαπτόμενα επίπεδα του G_f στο $(0,0,0)$ και του G_g στο $(0,0,0)$.
Οι εξισώσεις τους είναι:
Εφαπτόμενο επίπεδο του G_f, έστω P_1:

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)} x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)} \cdot y$$

Αλλά $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = 2x\Big|_{(0,0)} = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = 2y\Big|_{(0,0)} = 0$

άρα $P_1: \ z = 0$ (το xy-επίπεδο).

Βρίσκουμε τώρα την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου P_2 του G_g:

$$z = g(0,0) + \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(0,0)} \cdot x + \frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{(0,0)} \cdot y$$

όπου $\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = \left(-2x + y^3\right)\Big|_{(0,0)} = 0$ και $\frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = \left(-2y + 3xy^2\right)\Big|_{(0,0)} = 0$.

Άρα και πάλι

$P_2: \ z = 0$

δηλαδή τα δύο εφαπτόμενα επίπεδα συμπίπτουν.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad \text{αν } (x,y) \neq (0,0)$$

και $f(0,0) = 0$.

Να δείξετε ότι:

(α) Υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0,0)$, αλλά

(β) Η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Απάντηση

(α) Είναι

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

και

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

δηλαδή οι μερικές παράγωγοι στο $(0,0)$ είναι ίσες με 0, αφού η συνάρτηση είναι σταθερά ίση με 0 πάνω στους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(β) Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, από όπου έπεται ότι η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Παρατηρούμε ότι όταν το (x,y) τείνει στο $(0,0)$ κατά μήκος του άξονα $x'x$, τότε το $f(x,y)$ τείνει στο 0, αφού $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$, ενώ, όταν το (x,y) τείνει στο $(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $y=x$, τότε το $f(x,y)$ τείνει στο $\frac{1}{2}$, αφού $\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$. Άρα δεν υπάρχει το όριο της f στο $(0,0)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \text{ αν } (x,y) \neq (0,0)$$

και

$$f(0,0) = 0.$$

Να δείξετε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Απάντηση

Είναι

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

και

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

Επίσης $f(0,0) = 0$.

Για να είναι f διαφορίσιμη στο $(0,0)$ αρκεί - σύμφωνα με τον ορισμό - να ισχύει

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y \right|}{\|(x,y)\|} = 0,$$

δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = 0,$$

δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Για να αποδείξουμε την τελευταία σχέση, παρατηρούμε ότι, αν $y \neq 0$, τότε

$$0 \leq \frac{|xy^2|}{x^2+y^2} \leq \frac{|xy^2|}{y^2} = |x|$$

και, αν $y=0$, τότε

$$\frac{|xy^2|}{x^2+y^2} = 0 \leq |x|,$$

άρα από το κριτήριο παρεμβολής, είναι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

7. Αν η $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, και $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$, ποιο είναι το διαφορικό $Df(\vec{a})$ της f στο $\vec{a}$;

Απάντηση

Αν η $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε, όπως ξέρουμε, υπάρχει ένας πίνακας-γραμμή $B=[b_1\ b_2 \dots b_n]$, ώστε

$f(\vec{x}) = B\vec{x}$, δηλαδή

$$f(x_1,\dots,x_n) = [b_1\ b_2 \dots b_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} = b_1x_1+b_2x_2+\dots+b_nx_n$$

Είναι: $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = b_1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = b_2$, $\dots$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_n} = b_n$,

δηλαδή ο πίνακας των μερικών παραγώγων της f είναι ανεξάρτητος του σημείου $\vec{a}$ και μάλιστα είναι ακριβώς ο πίνακας $B=[b_1 \dots b_n]$ που αναπαριστά την f.

Για να δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο τυχόν $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{|f(\vec{x})-f(\vec{a})-B(\vec{x}-\vec{a})|}{\|\vec{x}-\vec{a}\|} = 0$$

Όμως

$$f(\vec{x})-f(\vec{a})-B(\vec{x}-\vec{a})$$
$$= b_1(x_1-a_1)+b_2(x_2-a_2)+\dots+b_n(x_n-a_n)-[b_1(x_1-a_1)+\dots+b_n(x_n-a_n)]$$

$\Rightarrow f(\vec{x})-f(\vec{a})-B(\vec{x}-\vec{a}) = 0$, άρα και το ζητούμενο όριο είναι ίσο με 0.

Συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$, η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ και το διαφορικό της, $Df(\vec{a})$ είναι ανεξάρτητο του $\vec{a}$ και ίσο με τον πίνακα B που αναπαριστά την f.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y,z) = z^2 e^x \cos y$. Βρείτε την κλίση της στο σημείο $(0, 2\pi, 1)$ και το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του γραφήματός της στο σημείο $(0, 2\pi, 1, 1)$.

Απάντηση

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^2 e^x \cos y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -z^2 e^x \sin y \, , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z e^x \cos y$$

Άρα $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,2\pi,1)} = 1 \quad , \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,2\pi,1)} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(0,2\pi,1)} = 2$$

Επίσης, οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^3$, άρα η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^3$. Έπεται ότι ορίζονται η κλίση και το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο της f στο δεδομένο σημείο και είναι

$$\nabla f(0, 2\pi, 1) = (1, 0, 2)$$

και εφαπτόμενο υπερεπίπεδο:

$$P: \quad w = f(0,2\pi,1) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,2\pi,1)} \cdot (x-0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,2\pi,1)} \cdot (y-2\pi) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(0,2\pi,1)} (z-1)$$

δηλαδή

$$P: \quad w = 1 + x + 2(z-1)$$

ή

$$P: \quad x + 2z - w = 1$$

9. Βρείτε τις κατευθυνόμενες παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία και στις κατευθύνσεις που δίνονται:

(α) $f(x,y) = e^x \cos(\pi y)$, $(x_0,y_0)=(0,-1)$, $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$

Είναι $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x\cos(\pi y)$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\pi e^x \sin(\pi y)$

Οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς, άρα η f είναι διαφορίσιμη, οπότε για κάθε σημείο $\vec{a}$ και, για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}$ ισχύει

$$D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u}.$$

Αφού το $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$ έχει νόρμα $\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1$, η κατευθυνόμενη παράγωγος στην κατεύθυνση του $\vec{v}$ είναι:

$D_{\vec{v}} f(0,-1) = \nabla f(0,-1) \cdot \vec{v}$, δηλαδή

$$D_{\vec{v}} f(0,-1) = (-1, 0)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

(β) $f(x,y) = xy^2 + x^3 y$, $(x_0,y_0) = (4,-2)$, $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j}$.

Είναι

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 3x^2 y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^3$.

Όμοια με το (α), η f είναι διαφορίσιμη και ισχύει $D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{u}$, για κάθε $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$ με $\|\vec{u}\| = 1$.

Το $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j}$ έχει νόρμα 1, άρα η ζητούμενη κατευθυνόμενη παράγωγος είναι:

$D_{\vec{v}} f(4,-2) = \nabla f(4,-2)\cdot\vec{v}$, δηλαδή

$$D_{\vec{v}} f(4,-2) = (-92, 32)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{92+96}{\sqrt{10}} = \frac{188}{\sqrt{10}},$$

αφού $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(4,-2)} = -92$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(4,-2)} = 32$

9 (γ)

$$f(x,y,z) = e^x + yz\,, \quad (x_0,y_0,z_0)=(1,1,1)\,, \quad \vec{w} = \vec{i}-\vec{j}+\vec{k}.$$

Είναι $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = z$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = x$

Η f είναι διαφορίσιμη, αφού είναι της κλάσης C^1, οπότε και πάλι ισχύει ο τύπος:

$$D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u}.$$

Εδώ το διάνυσμα $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ έχει νόρμα $\|\vec{w}\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{3}$, οπότε το μοναδιαίο διάνυσμα που έχει την κατεύθυνση του $\vec{w}$ είναι το $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$.

Έπεται ότι η ζητούμενη κατευθυνόμενη παράγωγος δίνεται από τον τύπο:

$$D_{\vec{u}} f(1,1,1) = \nabla f(1,1,1) \cdot \vec{u}\,, \quad \text{δηλαδή}$$

$$D_{\vec{u}} f(1,1,1) = (e, 1, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Άρα $D_{\vec{u}} f(1,1,1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, e$

10. Για καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις, βρείτε την κατεύθυνση στην οποία αυξάνει πιο γρήγορα στο σημείο $(1,1)$. Στη συνέχεια, σχεδιάστε ένα διάγραμμα καμπυλών στάθμης της συνάρτησης και τοποθετήστε το διάνυσμα που δίνει αυτή την κατεύθυνση, με αρχή το σημείο $(1,1)$. Παρατηρήστε ότι το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στην καμπύλη στάθμης που περιλαμβάνει το $(1,1)$.

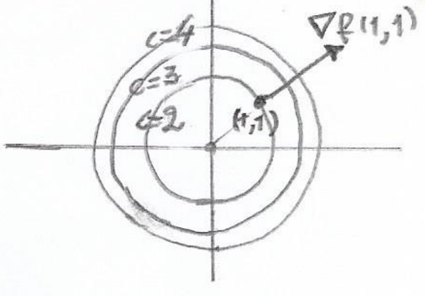
(α) $f(x,y) = x^2+y^2$

Μπορούμε να πούμε απευθείας ότι η f είναι διαφορίσιμη ως πολυωνυμική. Έπεται ότι η κατεύθυνση στην οποία αυξάνει πιο γρήγορα η f, σε οποιοδήποτε σημείο $\vec{a}\in\mathbb{R}^2$, είναι η κατεύθυνση της κλίσης $\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})\right)$.
Για το $\vec{a} = (1,1)$, έχουμε

$$\nabla f(1,1) = (2,2),$$

αφού $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = 2x\Big|_{(1,1)} = 2$ και $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = 2y\Big|_{(1,1)} = 2$.

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα της κλίσης έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα θέσης του σημείου $(1,1)$.
(Αυτό θα συμβαίνει σε κάθε σημείο $\vec{a} \overset{=(x_0,y_0)}{\in} \mathbb{R}^2$ και οφείλεται στο ότι η f εξαρτάται μόνο από το x^2+y^2 - δηλαδή η τιμή $f(x,y)$ εξαρτάται μόνο από την απόσταση του (x,y) από την αρχή των αξόνων)



(Διάγραμμα καμπυλών στάθμης)

Οι καμπύλες στάθμης είναι κύκλοι με κέντρο την αρχή των αξόνων. Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα της κλίσης ∇f στο σημείο $(1,1)$ είναι κάθετο στην εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $(1,1)$.
Αυτό συμφωνεί με τον τύπο

$$D_{\vec{u}} f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \vec{u},$$

αφού, αν το $\vec{u}$ εφάπτεται στην καμπύλη στάθμης στο σημείο $(1,1)$, τότε η f στην κατεύθυνση του $\vec{u}$ τείνει να μείνει σταθερή, άρα $D_{\vec{u}} f(1,1) = 0$.
Αυτό σημαίνει ότι θα είναι $\nabla f(1,1) \cdot \vec{u} = 0$, δηλαδή το $\vec{u}$ θα είναι κάθετο στο $\nabla f(1,1)$.

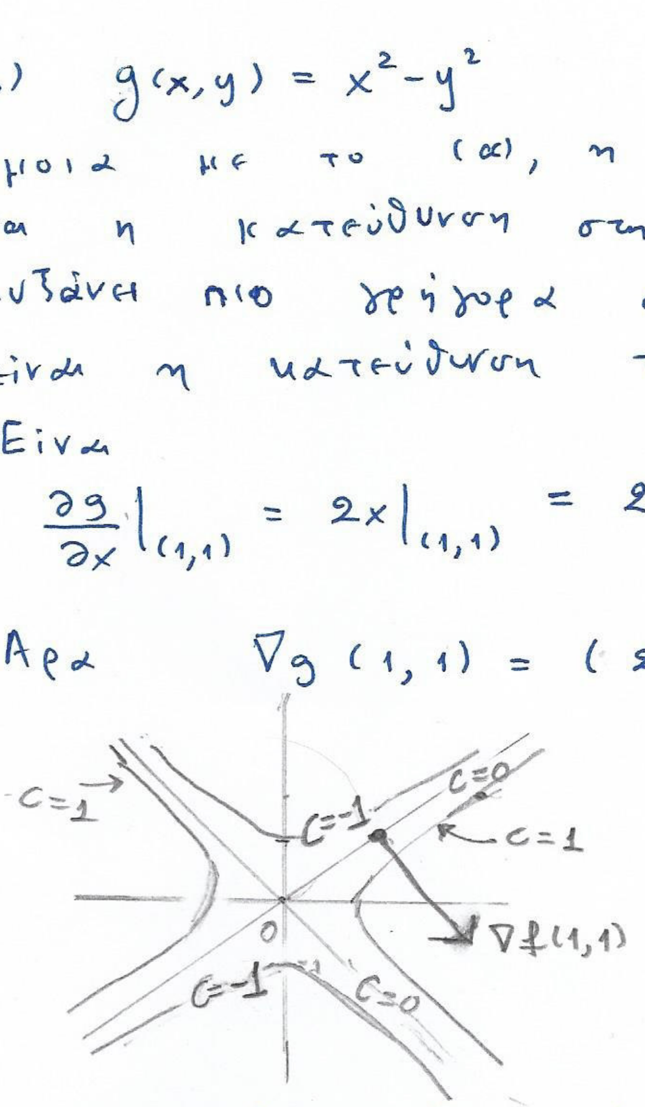
(β) $g(x,y) = x^2 - y^2$

Όμοια με το (α), η g είναι διαφορίσιμη και η κατεύθυνση στην οποία η g αυξάνει πιο γρήγορα στο σημείο $(1,1)$ είναι η κατεύθυνση του $\nabla g(1,1)$.

Είναι

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(1,1)} = \left.2x\right|_{(1,1)} = 2 \quad \text{και} \quad \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(1,1)} = \left.-2y\right|_{(1,1)} = -2.$$

Άρα $\nabla g(1,1) = (2,-2)$.



Η καμπύλη στάθμης που περιλαμβάνει* το σημείο $(1,1)$ είναι η ένωση των ευθειών $y=x$ και $y=-x$.
Παρατηρούμε και πάλι ότι το $\nabla f(1,1)$ είναι κάθετο στην καμπύλη στάθμης στο σημείο $(1,1)$, όπως ήταν αναμενόμενο.

$$* \; L_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$$

11. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $h(x,y)=3e^{-x^2}+e^{-3y^2}$ δίνει το ύψος ενός βουνού, πάνω από κάθε σημείο (x,y) του οριζόντιου επιπέδου.

(α) Ξεκινώντας από το σημείο $(1,0)$, σε ποια κατεύθυνση πρέπει να αρχίσει να προχωράει κανείς για να σκαρφαλώσει γρηγορότερα;

(β) Αν αφήσουμε ένα βώλο στο σημείο $(1,0,1+\frac{3}{e})$, σε ποια κατεύθυνση θα αρχίσει να κατρακυλάει;

<u>Απάντηση</u>

Η συνάρτηση h είναι διαφορίσιμη, αφού οι μερικές της παράγωγοι

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -6x e^{-x^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -6y e^{-3y^2}$$

είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$.

(α) Η κατεύθυνση που ζητάμε είναι η κατεύθυνση στην οποία η h αυξάνει πιο γρήγορα στο σημείο $(1,0)$, η οποία δίνεται από το διάνυσμα της κλίσης

$$\nabla h(1,0) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(1,0), \frac{\partial h}{\partial y}(1,0)\right) = \left(-\frac{6}{e}, 0\right) = \frac{6}{e}(-1,0)$$

Έπεται ότι η κατεύθυνση στην οποία το ύψος του βουνού αυξάνει πιο απότομα είναι αυτή του διανύσματος $(-1,0) = -\vec{i}$.

(β) Ο βώλος θα κατρακυλήσει στην κατεύθυνση που το ύψος του βουνού μειώνεται πιο απότομα, δηλαδή στην κατεύθυνση του διανύσματος $-\nabla h(1,0) = \left(\frac{6}{e}, 0\right)$, η οποία είναι ίδια με την κατεύθυνση του διανύσματος $(1,0) = \vec{i}$.