Ανάλυση ΙΙ

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

10η Σειρά Ασκήσεων
Επικαμπύλια Ολοκληρώματα - Διανυσματικά Πεδία

1. Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα δευτέρου είδους:

(α) $\int_\sigma (x^2 - y^2)dx + xdy$, όπου $\sigma(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta),\ \theta \in [0, 2\pi]$.

(β) $\int_C x^2ydx - xydy$, όπου C είναι η καμπύλη που ξεκινά από το $(0,0)$, πηγαίνει στο $(1,1)$ μέσω της παραβολής $y = x^2$ και επιστρέφει στο $(0,0)$ επί της ευθείας $y = x$.

2. Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_{\sigma_i} ydx,\ (i = 1, 2)$, όπου $\sigma_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $\sigma_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Τι παρατηρείτε; (*Απάντηση*: $\int_{\sigma_1} ydx = -\pi$ και $\int_{\sigma_2} ydx = -2\pi$.)

3. Έστω $F = (x^2 - y^2)i + 2xyj$ διανυσματικό πεδίο δυνάμεων στο $\mathbb{R}^2$. Να βρεθεί το ολικό έργο που παράγει αυτό το διανυσματικό πεδίο όταν μετακινεί αντιωρολογιακά μια σημειακή μάζα στην περίμετρο του τετραγώνου με κορυφές $(0,0),\ (2,0),\ (2,2),\ (0,2)$.

4. Να βρεθεί το έργο που παράγει το διανυσματικό πεδίο δυνάμεων $F = (x^2 + y^2)i + (x + y)j$ όταν μετακινεί αντιωρολογιακά ένα υλικό σημείο επί του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ από το $(1, 0)$ στο $(-1, 0)$ και κατόπιν πίσω στο $(1, 0)$ πάνω στον άξονα των x.

5. Αποδείξτε ότι ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με πίνακα A είναι συντηρητικό πεδίο αν και μόνο αν ο A είναι συμμετρικός πίνακας.

6. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f : U \to \mathbb{R}^2$ συνάρτηση της κλάσης C^1 με $f = (u, v)$. Η f λέγεται *ολόμορφη* συνάρτηση αν ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy και Riemann:

$$\frac{\vartheta u}{\vartheta x} = \frac{\vartheta v}{\vartheta y} \quad \text{και} \quad \frac{\vartheta u}{\vartheta y} = -\frac{\vartheta v}{\vartheta x}\ .$$

Αποδείξτε ότι, αν $D \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι απλά συνεκτικός τόπος και η συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}^2$ με $f = (u, v)$ είναι ολόμορφη, τότε οι $g = (v, u)$ και $h = (u, -v)$ είναι συντηρητικά πεδία στο D.

7. Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $F = (e^x \sin y - y, e^x \cos y - x - 2)$ είναι συντηρητικό και βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού f για την F.

8. Έστω $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ συντηρητικό διανυσματικό πεδίο της κλάσης C^1 με $F = (F_1, F_2, F_3)$. Αποδείξτε ότι:

$$\frac{\vartheta F_2}{\vartheta z} = \frac{\vartheta F_3}{\vartheta y}, \quad \frac{\vartheta F_1}{\vartheta z} = \frac{\vartheta F_3}{\vartheta x} \ \text{ και } \ \frac{\vartheta F_2}{\vartheta x} = \frac{\vartheta F_1}{\vartheta y}.$$

9. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο
$F(x, y) = (f(x) + y,\ g(y) + x)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ είναι συντηρητικό.

10. Αποδείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $F(x, y, z) = (3x^2y^2z,\ 2x^3yz,\ x^3y^2 - e^{-z})$ είναι συντηρητικό και βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για αυτό.

11. Έστω
$$\nabla f(x,y,z) = \left(2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2}\right).$$
Αν $f(0,0,0) = 5$, βρείτε το $f(1,1,2)$.

12. Υπολογίστε το $\int_C 2xyzdx + x^2zdy + x^2dz$, όπου C είναι μια προσανατολισμένη απλή καμπύλη που ενώνει το $(1,1,1)$ με το $(1,2,4)$.