10η Σειρά Ασκήσεων

<u>Υπενθύμιση</u>

- Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχής συνάρτηση και $\sigma: [a,\beta] \to \mathbb{R}^n$ μια (προσανατολισμένη), (κατά τμήματα) C^1 καμπύλη.
Τότε ορίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους της f πάνω στη σ ως $\int_\sigma f\, ds = \int_a^\beta \underbrace{f(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)}_{\text{εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων}} dt$

- Αν $n=2$ και $f=(f_1, f_2)$, $\sigma(t)=(x(t), y(t))$, τότε συμβολίζουμε και $\int_\sigma f\, ds = \int_\sigma f_1 dx + f_2 dy = \int_a^\beta f_1(\sigma(t))\, x'(t) + f_2(\sigma(t))\, y'(t)\, dt$

- Αν $n=3$ και $f=(f_1, f_2, f_3)$, $\sigma(t)=(x(t), y(t), z(t))$, τότε γράφουμε και $\int_\sigma f\, ds = \int_\sigma f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_a^\beta f_1(\sigma(t))\, x'(t) + f_2(\sigma(t))\, y'(t) + f_3(\sigma(t))\, z'(t)\, dt$

- Αν $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f: U \to \mathbb{R}^n$, τότε η f θα λέγεται συντηρητική ή πεδίο κλίσεων, αν υπάρχει $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^1 με $\nabla V = f$.
Κάθε τέτοια V μάλιστα θα λέγεται δυναμικό της f.

- Αν $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1 συνάρτηση, τότε $\int_\sigma \nabla f\, ds = \int_a^\beta \nabla f(\sigma(t))\, \sigma'(t)\, dt$ $= f(\sigma(\beta)) - f(\sigma(a))$

- Αν $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό και $f: U \to \mathbb{R}^3$ C^1 συνάρτηση, τότε ορίζουμε $\operatorname{curl} f = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$, όπου $f=(f_1, f_2, f_3)$

- Αν $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f: U \to \mathbb{R}^2$ C^1 συνάρτηση με $f=(f_1, f_2)$ τότε $\operatorname{curl} f = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}$

- Αν f συντηρητική (στον $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$), τότε $\operatorname{curl} f = \vec{0}$. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει

- Αν ωστόσο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (ή $\mathbb{R}^3$) απλά συνεκτικός τόπος, ή (πιο απλά) κυρτό και ανοικτό σύνολο και $f: D \to \mathbb{R}^2$ (ή $\mathbb{R}^3$), τότε η f είναι συντηρητική $\Leftrightarrow$ $\operatorname{curl} f = 0$ (π.χ $D=\mathbb{R}^2$ ή $D=\mathbb{R}^3$ ή $D=B(x_0, r)$)

- Ένα $K \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>κυρτό</u>, αν $\forall a, \beta \in K$, ισχύει $[a,\beta] = \{ta + (1-t)\beta \mid t \in [0,1]\} \subseteq K$

Άσκηση 1

Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα β είδους:

Λύση

α) $I_1=\int_\sigma (x^2-y^2)dx + x\,dy$, όπου $\sigma(\theta)=(2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$

Έχουμε ότι $I_1 = \int_0^{2\pi} (4\cos^2\theta - 4\sin^2\theta)(2\cos\theta)' + 2\cos\theta\cdot(2\sin\theta)'\,d\theta =$

$$= \int_0^{2\pi} -8\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+4\cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= 8\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\, d\theta - 8\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta + 4\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta$$

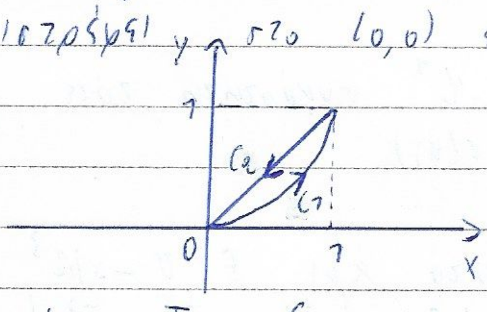
$$= 8\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta - 8\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta + 4\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\theta)+1}{2}\, d\theta$$

$$= 8\int_0^{2\pi}\sin\theta - 16\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta + 2\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)+1\, d\theta$$

$$= 8[-\cos\theta]_0^{2\pi} - 16\int_0^{2\pi}(-\cos^3\theta)'\,d\theta + 2\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}+\theta\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 0 + \frac{16}{3}[\cos^3\theta]_0^{2\pi} + 4\pi = 4\pi$$

β) $I_2=\int_C x^2y\,dx - xy\,dy$, όπου C η καμπύλη που ξεκινάει από το $(0,0)$ και πηγαίνει στο $(1,1)$ μέσω της παραβολής $y=x^2$ και επιστρέφει στο $(0,0)$ επί της ευθείας $y=x$



Έχουμε λοιπόν ότι $I_2=\int_{C_1} x^2y\,dx - xy\,dy + \int_{C_2} x^2y\,dx - xy\,dy$

Μια παραμέτρηση της C_1 είναι η $\sigma_1:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $\sigma_1(t)=(t,t^2)$ και της $-C_2$ η $\sigma_2:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $\sigma_2(t)=(t,t)$

Οπότε $I_2=\int_{\sigma_1} x^2y\,dx - xy\,dy - \int_{\sigma_2} x^2y\,dx - xy\,dy =$

$$=\int_0^1 t^2\cdot t^2(t)' - t\cdot t^2(t^2)'\,dt - \int_0^1 t^2\cdot t(t)' - t\cdot t(t)'\,dt =$$

$$=\int_0^1 t^4 - 2t^4\,dt - \int_0^1 t^3 - t^2\,dt = \left[-\frac{t^5}{5}\right]_0^1 - \left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{7}{60}$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστούν τα $\int_{\sigma_i} y\,dx$, $i=1,2$, όπου $\sigma_1(t)=(\cos t,\sin t)$ και $\sigma_2(t)=(\cos(2t),\sin(2t))$, t∈[0,2π]. Τι παρατηρείτε;

Λύση

Έχουμε ότι $\int_{\sigma_1} y\,dx = \int_0^{2\pi} \sin t\cdot(\cos t)'\,dt = -\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt =$

$= -\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2t)-1\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2}-t\right]_0^{2\pi}$

$= \frac{1}{2}(-2\pi) = -\pi$

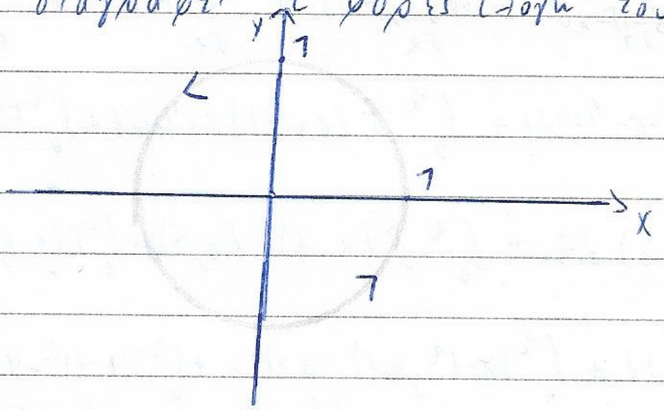
Επίσης $\int_{\sigma_2} y\,dx = \int_0^{2\pi}\sin(2t)\,(\cos(2t))'\,dt = -2\int_0^{2\pi}\sin^2(2t) =$

$= -2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4t)}{2}\,dt = \int_0^{2\pi}\cos(4t)-1\,dt = \left[\frac{\sin(4t)}{4}-t\right]_0^{2\pi}$

$= -2\pi$

Παρατηρούμε ότι αν και οι σ_1,σ_2 περιγράφουν εξίσωση κύκλου με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $R=1$, έχουμε ότι $\int_{\sigma_1} y\,dx \neq \int_{\sigma_2} y\,dx$

Αυτό συμβαίνει διότι καθώς το t "τρέχει" από 0 έως 2π, η σ_1 διαγράφει την περιφέρεια του κύκλου 1 φορά, ενώ η σ_2 τη διαγράφει 2 φορές (λόγω του 2t)

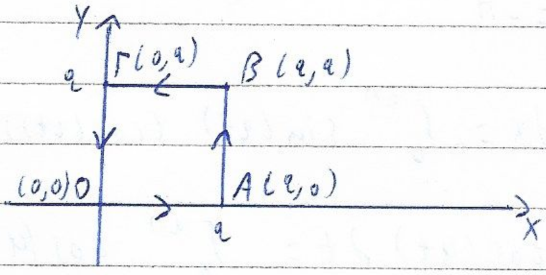


Άσκηση 3

Έστω $F=(x^2-y^2)\vec{i}+2xy\vec{j}$ διανυσματικό πεδίο δυνάμεων του $\mathbb{R}^2$

Να βρεθεί το ολικό έργο που παράγει όταν μετακινεί αντιωρολογιακά μια σημειακή μάζα στην περίμετρο τετραγώνου με κορυφές $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$

Λύση



Βρίσκουμε αρχικά τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του τετραγώνου

$OA: y=0$, $AB: x=2$, $B\Gamma: y=2$, $\Gamma O: x=0$

Βρίσκουμε παραμετρώσεις για κάθε μία από τις πλευρές

$(OA): \sigma_1: [0,2] \to \mathbb{R}, \ \sigma_1(t)=(t,0)$

$(AB): \sigma_2: [0,2] \to \mathbb{R}, \ \sigma_2(t)=(2,t)$

$(B\Gamma): \sigma_3: [0,2] \to \mathbb{R}, \ \sigma_3(t)=(2-t,2)$

$(\Gamma O): \sigma_4: [0,2] \to \mathbb{R}, \ \sigma_4(t)=(0,2-t)$

Όποτε $W_{ολ} = \int_{\sigma_1} F ds + \int_{\sigma_2} F ds + \int_{\sigma_3} F ds + \int_{\sigma_4} F ds =$

$= \int_0^2 F(\sigma_1(t))\sigma_1'(t)dt + \int_0^2 F(\sigma_2(t))\sigma_2'(t)dt + \int_0^2 F(\sigma_3(t))\sigma_3'(t)dt + \int_0^2 F(\sigma_4(t))\sigma_4'(t)dt$

$= \int_0^2 F(t,0)\cdot(1,0)\,dt + \int_0^2 F(2,t)\cdot(0,1)dt + \int_0^2 F(2-t,2)\cdot(-1,0)dt + \int_0^2 F(0,2-t)\cdot(0,-1)dt$

$= \int_0^2 (t^2,0)\cdot(1,0)dt + \int_0^2 (4-t^2,4t)\cdot(0,1)dt + \int_0^2 ((2-t)^2-4, 4(2-t))\cdot(-1,0)dt +$
$+ \int_0^2 (-(2-t)^2,0)(0,-1)dt = \int_0^2 t^2 dt + \int_0^2 4t\,dt + \int_0^2 4-(2-t)^2 dt + 0$

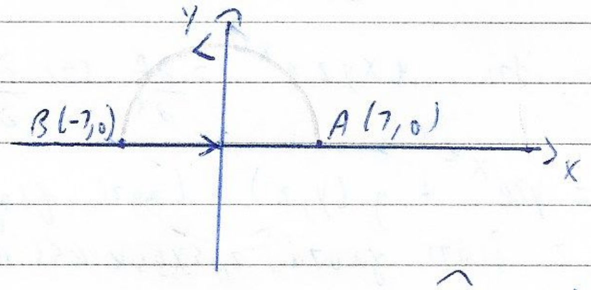
$= \int_0^2 t^2 + 4t + 4 - t^2 + 4t - 4\, dt = \int_0^2 8t\,dt = [4t^2]_0^2 = 16$

Σημείωση: Η δύναμη δεν είναι συντηρητική διότι έχει μη μηδενικό έργο κατά μήκος κλειστής διαδρομής

Άσκηση 4

Να βρεθεί το έργο που παράγει το διανυσματικό πεδίο δυνάμεων $F = (x^2+y^2)\vec{i} + (x+y)\vec{j}$, όταν μετακινεί αντιωρολογιακά υλικό σημείο επί του κύκλου $x^2+y^2=1$ από το $(1,0)$ στο $(-1,0)$, και κατόπιν πίσω στο $(1,0)$ πάνω στον xx'

Λύση



Μια παραμέτρηση του τόξου $\widehat{AB}$ είναι η $\sigma_1 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma_1(t) = (\cos t, \sin t)$

Μια παραμέτρηση του BA είναι η $\sigma_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma_2(t) = (t, 0)$

Οπότε $W_F = \int_{\sigma_1} F \cdot ds + \int_{\sigma_2} F \cdot ds = \int_0^{\pi} F(\sigma_1(t))\, \sigma_1'(t)\,dt + \int_{-1}^{1} F(\sigma_2(t))\, \sigma_2'(t)\,dt$

$$= \int_0^{\pi} F(\cos t, \sin t)\,(-\sin t, \cos t)\,dt + \int_{-1}^{1} F(t,0)\cdot(1,0)\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi} (1, \cos t + \sin t)\,(-\sin t, \cos t)\,dt + \int_{-1}^{1} (t^2, t)\cdot(1,0)\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi} -\sin t + \cos^2 t + \cos t \sin t\,dt + \int_{-1}^{1} t^2\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi} -\sin t + \frac{1+\cos(2t)}{2} + \frac{\sin(2t)}{2}\,dt + \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left[\cos t + \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} - \frac{\cos(2t)}{4}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{3} =$$

$$= -2 + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$$

<u>Σημείωση</u>: Η F δεν είναι συντηρητική, διότι έχει μη μηδενικό έργο κατά μήκος κλειστής διαδρομής

Άσκηση 5.

Ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με πίνακα A, είναι συντηρητικό πεδίο αν και μόνο αν ο A είναι συμμετρικός

Λύση

Έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Τότε $T(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$

Έχουμε ότι T συντηρητικό $\overset{C^1}{\Leftrightarrow} \dfrac{\partial(\alpha x + \beta y)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\gamma x + \delta y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta = \gamma \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ ο A είναι συμμετρικός

(Υπενθύμιση: F συντηρητική $\overset{F\, C^1}{\underset{\mathbb{R}^2}{\Leftrightarrow}} \operatorname{curl} F = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$)

Άσκηση 6

Υπενθυμίζεται ότι αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, τότε η $f=(u,v): \Omega \to \mathbb{R}^2$ θα λέγεται ολόμορφη αν οι u,v ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

Να δειχθεί ότι αν $f=(u,v): D \to \mathbb{R}^2$ ολόμορφη, όπου $D \subseteq \mathbb{R}^2$ απλά συνεκτικός τόπος, τότε οι $g=(v,u)$, $h=(u,-v)$ είναι συντηρητικές

Λύση

Για την g: Έχουμε ότι $v_y = u_x$ από Cauchy-Riemann
Άρα η g είναι συντηρητική

Για την h: Έχουμε ότι $u_y = -v_x = \frac{\partial}{\partial x}(-v)$. Οπότε και η h είναι συντηρητική

Άσκηση 7

Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $F=(e^x \sin y - y, e^x \cos y - x - 2)$ είναι συντηρητικό και βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού V

Λύση

Έστω $F=(u,w)$. Τότε $u_y = e^x \cos y - 1$, $w_x = e^x \cos y - 1$
Άρα $u_y = w_x$ και συνεπώς η F είναι συντηρητικό πεδίο.
Οπότε υπάρχει δυναμικό $V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\nabla V = F \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (V_x, V_y) = F$
Οπότε $V_x = e^x \sin y - y \Leftrightarrow V_x = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y - xy) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow V(x,y) = e^x \sin y - xy + g(y)$ (αντί για $+c$, έχουμε $+g(y)$.
Αυτό συμβαίνει διότι για διαφορετικές, αλλά σταθερές, τιμές του y, η V_x είναι διαφορετική συνάρτηση. Οπότε η σταθερά c κάθε φορά θα είναι διαφορετική και θα εξαρτάται από το y, είναι δηλαδή συνάρτηση του y.
Μάλιστα $g(y) = V(x,y) - e^x \sin y + xy$. Άρα είναι παραγωγίσιμη
Τώρα $V_y = e^x \cos y - x - 2 \Leftrightarrow e^x \cos y - x + g'(y) = e^x \cos y - x - 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow g'(y) = -2 \Leftrightarrow g(y) = -2y + c$
Θέτοντας $c=0$, ένα δυναμικό είναι το $V(x,y) = e^x \sin y - xy - 2y$

Άσκηση 8

Έστω $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ C^1 συντηρητικό πεδίο με $F = (F_1, F_2, F_3)$

Δείξτε ότι $\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}$, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$, $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$

Λύση

Αφού F συντηρητικό πεδίο, τότε $\operatorname{curl} F = \vec{0}$

Όμως $\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Αφού $\operatorname{curl} F = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{cases}$

Άσκηση 9

Έστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $F(x,y) = (f(x)+y,\ g(y)+x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ είναι συντηρητικό

Λύση

Αφού οι f, g δεν είναι παραγωγίσιμες υποχρεωτικά, τότε η F δεν είναι υποχρεωτικά C^1. Οπότε δεν μπορούμε να λύσε μέσω του curl

Άρα πρέπει να βρούμε $V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\nabla V = F \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (V_x, V_y) = (f(x)+y,\ g(y)+x)$

Έχουμε $V_x = f(x) + y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^x f(u)\,du + xy\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V(x,y) = \int_0^x f(u)\,du + xy + h(y)$

Όμως $V_y = g(y) + x \Leftrightarrow x + h'(y) = x + g(y) \Leftrightarrow h'(y) = g(y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(y) = \int_0^y g(u)\,du + c$

Θέτοντας $c=0$, παίρνουμε $V(x,y) = \int_0^x f(u)\,du + \int_0^y g(u)\,du + xy$

και βλέπουμε πράγματι ότι $\nabla V = F = (f(x)+y,\ g(y)+x)$

Άσκηση 10

Αποδείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $F(x,y,z) = (3x^2y^2z\ ,\ 2x^3yz,\ x^3y^2 - e^{-z})$ είναι συντηρητικό και βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού

Λύση

Έχουμε ότι $\text{curl}F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y^2z & 2x^3yz & x^3y^2 - e^{-z} \end{vmatrix} =$

$= [2x^3y - 2x^3y]\,\vec{i} - [3x^2y^2 - 3x^2y^2]\,\vec{j} + [6x^2yz - 6x^2yz]\,\vec{k} = 0$

Αφού $\text{curl}F = 0$ και η F είναι C^1, τότε η F είναι συντηρητική, δηλαδή υπάρχει $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $\nabla V = F$

$\Leftrightarrow (V_x, V_y, V_z) = F$

Τώρα $V_x = 3x^2y^2z \Leftrightarrow V_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^3y^2z) \Leftrightarrow V = x^3y^2z + g(y,z)$

$\Rightarrow V_y = 2x^3yz + \frac{\partial g}{\partial y} \Leftrightarrow 2x^3yz + \frac{\partial g}{\partial y} = 2x^3yz \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g = h(z)$

Οπότε $V_z = x^3y^2 + h'(z) \Leftrightarrow x^3y^2 + h'(z) = x^3y^2 - e^{-z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h'(z) = -e^{-z} = (e^{-z})' \Leftrightarrow h(z) = e^{-z} + c$

Άρα θέτοντας $c = 0$, ένα δυναμικό για την F, είναι το

$V(x,y,z) = x^3y^2z + e^{-z}$

Άσκηση 11

Έστω $\nabla f(x,y,z) = (2xyz e^{x^2}, z e^{x^2}, y e^{x^2})$

Αν $f(0,0,0)=5$ να βρεθεί το $f(1,1,2)$

Λύση

Έχουμε ότι $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

Παρατηρούμε ότι $2xyz e^{x^2} = \frac{\partial f}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(yz e^{x^2}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x,y,z) = yze^{x^2} + g(y,z)$ (αντί για σταθερά c, εδώ εξαρτάται από τα y,z διότι για διαφορετικές (αλλά σταθερές) τιμές των y,z, αν δούμε την f μόνο σαν συνάρτηση του x, είναι διαφορετική συνάρτηση. Οπότε η σταθερά c κάθε φορά θα εξαρτάται από τα y,z). Μάλιστα $g = f - yze^{x^2}$ και άρα έχει μερικές παραγώγους.

Τώρα $\frac{\partial f}{\partial y} = ze^{x^2} \Leftrightarrow ze^{x^2} + \frac{\partial g}{\partial y} = ze^{x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow g = h(z)$

(σταθερή ως προς y - είναι συνάρτηση του z)

Όμως $\frac{\partial f}{\partial z} = ye^{x^2} \Leftrightarrow ye^{x^2} + h'(z) = ye^{x^2} \Leftrightarrow h'(z)=0 \Leftrightarrow h(z)=c$

Οπότε $f(x,y,z) = yze^{x^2} + c \Rightarrow f(0,0,0)=5 \Leftrightarrow c+0=5 \Leftrightarrow c=5$

Άρα $f(x,y,z) = yze^{x^2}+5$

Συνεπώς $f(1,1,2) = 2e+5$

Άσκηση 12

Υπολογίστε το $I=\int_C 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz$, όπου C είναι μια προσανατολισμένη καμπύλη που ενώνει το $(1,1,1)$ με το $(1,2,4)$

Λύση

Θέτουμε $f(x,y,z) = (2xyz,\ x^2z,\ x^2y)$

Τότε $I = \int_C f\cdot ds$

(Αφού δεν έχουμε στοιχεία για τη μορφή ή τον τύπο της C, η μόνη σκέψη που μπορούμε να κάνουμε είναι να γράψουμε την f σαν $f=\nabla F$ για κάποια $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ και τότε $I = \int_C \nabla F\, ds = F(1,2,4) - F(1,1,1)$)

Παρατηρούμε ότι $\operatorname{curl} f = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & x^2z & x^2y \end{vmatrix} =$

$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(x^2y) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2z)\right]\vec{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) - \frac{\partial}{\partial z}(2xyz)\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2z) - \frac{\partial}{\partial y}(2xyz)\right]\vec{k}$

$= (x^2-x^2)\vec{i} - (2xy - 2xy)\vec{j} + (2xz-2xz)\vec{k} = 0$

Άρα υπάρχει F C^2 ώστε $\nabla F = f \Leftrightarrow f = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$

Έχουμε ότι $F_x = 2xyz = \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz) \Leftrightarrow F = x^2yz + g(y,z) \Rightarrow$

$\Rightarrow F_y = x^2z + \frac{\partial g}{\partial x} \Leftrightarrow x^2z = \frac{\partial g}{\partial y} + x^2z \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow g = h(z)$

Οπότε $F = x^2yz + h(z) \Rightarrow F_z = x^2y + h'(z) \Leftrightarrow x^2y = x^2y + h'(z)$

$\Leftrightarrow h'(z) = 0 \Leftrightarrow h \equiv c$

Οπότε $F(x,y,z) = x^2yz + c$

Επομένως $I = F(1,2,4) - F(1,1,1) = 8 + c - 1 - c = 7$

Σημείωση: Μπορούσαμε να πούμε εξ αρχής ότι παρατηρούμε θέτοντας $F(x,y,z) = x^2yz$ (με το μάτι), τότε $\nabla F = f$

Επομένως $I = F(1,2,4) - F(1,1,1) = 7$