

## Ανάλυση II

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

11η Σειρά Ασκήσεων

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Αναπτύγματα Taylor, Ακρότατα συναρτήσεων, Πολλαπλασιαστές Lagrange  
Πολλαπλά ολοκληρώματα

1. (α) Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης με κέντρο το  $(0, 0)$  της συνάρτησης

$$f(x, y) = \sin x \cdot \cos y.$$

- (β) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^x \cos y - 1 - x - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = 0.$$

2. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία των ακόλουθων συναρτήσεων και ταξινομήστε το καθένα από αυτά ως τοπικό ακρότατο ή σαγματικό σημείο:

$$(α) f(x, y) = x^2 + xy + y^2 \quad (β) f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 18y^2 + 81y + 5$$

3. (α) Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x, y, z) = x - y + z$  επί της σφαίρας  $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ .

- (β) Βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  υπό τη συνθήκη  $x - 2y + 3z = 4$ .

4. Σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης και στη συνέχεια υπολογίστε καθένα από τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} dx dy, \quad I_2 = \int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3} dy dx.$$

5. Βρείτε τον όγκο των παρακάτω στερεών:

(α) Του στερεού  $K$ , το οποίο έχει βάση το χωρίο του επιπέδου  $xy$  που ορίζεται από την παραβολή  $y = 4 - x^2$  και την ευθεία  $y = 3x$  και φράσσεται από πάνω από το επίπεδο  $z = x + 4$ .

(β) Του στερεού  $L$  που βρίσκεται στο 1ο ογδομήριο και φράσσεται από τα επίπεδα των συντεταγμένων, από το επίπεδο  $x = 3$  και από τον παραβολικό κύλινδρο  $z = 4 - y^2$ .

6. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που αποκόπτει από το 1ο τεταρτημόριο η καρδιοειδής καμπύλη  $r = 1 + \sin \theta$ .

7. Βρείτε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

πάνω από το χωρίο  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e\}$ .

8. Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^x (x^2 + y^2) dz dx dy.$$

9. Βρείτε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από κάτω από το επίπεδο  $xy$ , στο πλάι από τη σφαίρα  $\rho = 2$  και από πάνω από τον κώνο  $\phi = \frac{\pi}{3}$ .

10. Βρείτε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από τους κυλίνδρους  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 2$  και τους κώνους  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  και  $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ .