

Ανάλυση II

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

2η Σειρά Ασκήσεων

Γραφήματα συναρτήσεων - Όρια - Συνέχεια

1. Για καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις, σχεδιάστε μερικές καμπύλες στάθμης και τις τομές του γραφήματος με τα επίπεδα xz και yz . Με βάση αυτά, περιγράψτε το γράφημα της συνάρτησης.

(α) $f(x, y) = xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

(β) $f(x, y) = 2x - y + 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

(γ) $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

(δ) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

(ε) $f(x, y) = e^x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

2. Χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες για να περιγράψετε τις καμπύλες στάθμης της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

3. Περιγράψτε τις επιφάνειες στάθμης της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = y^2 + z^2$.

Στις Ασκήσεις 4 - 10 εξετάστε αν υπάρχει το όριο και, αν ναι, υπολογίστε το.

4.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

5.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

6.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{\sin(x^2 + y^2)}$$

7.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\frac{xy^2}{x^2 + y^2}}$$

8.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

9.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin y + x^2 y}{x^2 + y^4}$$

10.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}$$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \frac{xy}{x - y}.$$

(α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, το όριο του $f(x, y)$ καθώς το (x, y) τείνει προς το $(0, 0)$ κινούμενο πάνω στην καμπύλη $y = x^\lambda$ είναι ίσο με 0.

(β) Αποδείξτε ότι - παρόλο που ισχύει το (α) - το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Δείξτε ότι τα διαδοχικά όρια $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ υπάρχουν και είναι ίσα, αλλά το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

13. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha}.$$

Εξετάστε για ποιες τιμές της παραμέτρου α η f μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή συνάρτηση σε ολόκληρο το \mathbb{R}^2 .

14. Για τις διάφορες τιμές του $\beta > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \frac{x^2 \sin y}{(x^2 + y^2)^\beta}.$$

Εξετάστε για ποιες τιμές της παραμέτρου β η f μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή συνάρτηση σε ολόκληρο το \mathbb{R}^2 .