Ανάλυση ΙΙ

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

4η Σειρά Ασκήσεων
Κλίση - Κατευθυνόμενες παράγωγοι - Εφαπτόμενα επίπεδα

Εφαπτόμενο επίπεδο επιφάνειας στάθμης. Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και $\mathbf{a} = (x_0, y_0, z_0) \in U$ με $f(x_0, y_0, z_0) = c$. Θεωρούμε την επιφάνεια στάθμης της f στην οποία ανήκει το $\mathbf{a} = (x_0, y_0, z_0)$, δηλαδή την επιφάνεια S που ορίζεται από την εξίσωση: $f(x, y, z) = c$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\mathbf{a}$, τότε κατά μήκος κάθε διανύσματος $\mathbf{v}$ που εφάπτεται στην S στο σημείο $\mathbf{a}$ η f τείνει να μείνει σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι η κατευθυνόμενη παράγωγος $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$ θα είναι 0, δηλαδή $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = 0$, για κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}$ που εφάπτεται στην S στο σημείο $\mathbf{a}$. Συμπεραίνουμε ότι, αν η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\mathbf{a} = (x_0, y_0, z_0)$ και $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, τότε:

(α) Το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f(\mathbf{a})$ είναι κάθετο στην επιφάνεια στάθμης S της f που περιέχει το $\mathbf{a}$.

(β) Το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στάθμης S στο σημείο $\mathbf{a}$ είναι το επίπεδο που ορίζεται απο την εξίσωση:

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \ ,$$

δηλαδή

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{a})(z - z_0) = 0 \ .$$

Το ανάλογο ισχύει και στις δύο διαστάσεις: Η εφαπτομένη ευθεία μιας καμπύλης στάθμης C της μορφής $f(x, y) = c$ για μια διαφορίσιμη συνάρτηση f στο σημείο $\mathbf{a} = (x_0, y_0) \in C$, αν $\nabla f \neq \mathbf{0}$, δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})(y - y_0) = 0 \ .$$

1. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο καθεμιάς από τις παρακάτω επιφάνειες στο σημείο που υποδεικνύεται:
(α) $3xy + z^2 = 4$ στο $(1, 1, 1)$.
(β) $y^2 - x^2 = 3$ στο $(1, 2, 8)$.
(γ) $xyz = 1$ στο $(1, 1, 1)$.
(δ) $z = (\cos x)(\sin y)$ στο $(0, \frac{\pi}{2}, 1)$.

2. Βρείτε ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε καθεμιά από τις παρακάτω επιφάνειες στο σημείο που δίνεται:
(α) $x^3y^3 + y - z + 2 = 0$ στο $(0, 0, 2)$.
(β) $\cos(xy) = e^z - 2$ στο $(1, \pi, 0)$.

3. Θυμηθείτε τον ορισμό του εφαπτόμενου επιπέδου σε ένα σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ του γραφήματος της συνάρτησης $z = f(x, y)$ και αποδείξτε ότι αυτός μπορεί να προκύψει ως ειδική περίπτωση του παραπάνω ορισμού αν δούμε το γράφημα σαν μια επιφάνεια στάθμης της συνάρτησης $F(x, y, z) = f(x, y) - z$.

4. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι ανεξάρτητη από τη δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή ότι υπάρχει συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x, y) = g(x)$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Αν η g είναι παραγωγίσιμη, υπολογίστε την ∇f συναρτήσει της g'. Σχεδιάστε ένα πιθανό διάγραμμα ισοσταθμικών καμπυλών της f και τοποθετήστε πάνω σε αυτό κάποια διανύσματα κλίσης ∇f.

5. Βρείτε την κατεύθυνση της ταχύτερης αύξησης και την κατεύθυνση της ταχύτερης μείωσης για τη συνάρτηση $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ στο σημείο $(1, 1, 1)$.

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$. Δείξτε ότι η f έχει κατευθυνόμενη παράγωγο σε κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο $(0, 0)$, αλλά δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.