Ανάλυση ΙΙ

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

5η Σειρά Ασκήσεων
Ο κανόνας της αλυσίδας - Πολλαπλές μερικές παράγωγοι

1. Έστω $g(x,y) = (x^2+1, y^2)$ και $f(u,v) = (u+v, u, v^2)$. Να υπολογιστεί το διαφορικό $D(f\circ g)(1,1)$.

2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνάρτηση της κλάσης C^1 και $z = f(x,y)$. Κάνουμε την αντικατάσταση $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ (πολικές συντεταγμένες). Να υπολογιστεί η $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

3. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις της κλάσης C^2. Θέτουμε $F(x,y) = f(x + g(y))$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Βρείτε τύπους για τις παραγώγους της F πρώτης και δεύτερης τάξης συναρτήσει των παραγώγων των f και g. Αποδείξτε επίσης ότι:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση και $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Αν $h = f\circ g$, δείξτε ότι

$$\|\nabla h(x,y,z)\|^2 = 4g(x,y,z)\cdot\big(f'(g(x,y,z))\big)^2$$

και ότι η διεύθυνση του διανύσματος της κλίσης $\nabla h(x,y,z)$ συμπίπτει με τη διεύθυνση του διανύσματος θέσης του σημείου (x,y,z). Δώστε γεωμετρική ερμηνεία αυτού του αποτελέσματος με βάση τη μορφή που έχουν οι επιφάνειες στάθμης της συνάρτησης h.

5. Για καθεμιά από τις ακόλουθες συναρτήσεις, εξακριβώστε ότι οι μεικτές παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ είναι ίσες:

$$(\alpha)\ f(x,y) = x^4+y^4-4x^2y^2,\quad (\beta)\ f(x,y) = \ln(x^2+y^2),\ (x,y)\neq(0,0),$$

$$(\gamma)\ f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2},\ (x,y)\neq(0,0),\quad (\delta)\ f(x,y) = \tan\big(\frac{x^2}{y}\big),\ y\neq 0$$

6. Επαληθεύστε τη σχέση $f_{xz\omega} = f_{z\omega x}$ για τη συνάρτηση $f(x,y,z,\omega) = e^{xyz}\sin(x\omega)$.

7. Να βρεθούν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης των συναρτήσεων:

(α) $z = \sin(x^2-3xy)$ και (β) $z = x^2y^2e^{2xy}$.

8. Μια συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (U ανοικτό) λέγεται *αρμονική* αν είναι της κλάσης C^2 και ικανοποιεί την *εξίσωση Laplace*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{στο } U.$$

Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

(α) $f(x,y) = x^3-3xy^2$, (β) $f(x,y) = e^x\cos y$ και (γ) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2},\ (x,y)\neq(0,0)$ είναι αρμονικές.

9. Λέμε ότι οι C^1 συναρτήσεις $u, v : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (U ανοικτό) ικανοποιούν τις *εξισώσεις Cauchy - Riemann* (C-R), αν

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ .$$

Ποια από τα ακόλουθα ζεύγη συναρτήσεων ικανοποιούν τις εξισώσεις C-R;

$$(\alpha)\ u(x,y) = e^{-x}\cos y,\ \ v(x,y) = e^{-x}\sin y, \quad (\beta)\ u(x,y) = x^2 + y^2,\ \ v(x,y) = 2xy,$$

$$(\gamma)\ u(x,y) = x^3 - 3xy^2,\ \ v(x,y) = 3x^2y - y^3,$$

$$(\delta)\ u(x,y) = \ln(x^2+y^2),\ \ v(x,y) = 2\arctan\frac{y}{x}, \quad \text{στο } U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$$

10. Αποδείξτε το ακόλουθο *Θεώρημα Μέσης Τιμής* για συναρτήσεις δύο μεταβλητών:
Υποθέτουμε ότι $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ με την ιδιότητα ότι το ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} : 0 \leq t \leq 1\}$ περιέχεται στο D. Αν η συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη, τότε υπάρχει $\mathbf{z} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ με $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

(*Υπόδειξη:* Εφαρμόστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για συναρτήσεις μιας μεταβλητής στη συνάρτηση $h = f \circ \sigma$, όπου $\sigma : [0,1] \to D$ η συνάρτηση $\sigma(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$.)
Το ίδιο θεώρημα ισχύει γενικότερα για συναρτήσεις n μεταβλητών, για κάθε $n \geq 1$.