Ανάλυση ΙΙ

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

6η Σειρά Ασκήσεων
Καμπύλες στο χώρο - Θεώρημα Taylor

1. Προσδιορίστε τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης, καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης για καθεμιά από τις παρακάτω καμπύλες για τη δοθείσα τιμή του t:

$$(\alpha) \quad \sigma(t) = \left(\sin^2 t, t^2 - 1, \frac{1}{t}\right), \ t = 1, \qquad (\beta) \quad \sigma(t) = (0, t, 0)\,, \ t = \frac{1}{2}$$

2. Να βρεθεί η καμπύλη σ αν $\sigma(0) = (0, -5, 1)$ και $\sigma'(t) = \big(t, e^t, t^2\big)$.

3. Να υπολογιστεί το μήκος των καμπυλών:
(α) $\sigma(t) = \mathbf{a} + r(\cos t, \sin t), \quad t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right],\ r > 0,\ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$.
(β) $\sigma(t) = (t, t^n)\,, \quad t \in [0, 1]$, όπου $n \geq 1$.
(γ) $\sigma(t) = (t^n, t^n)\,, \quad t \in [0, 1]$, όπου $n \geq 1$.

4. Έστω $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ μία C^∞ διαφορίσιμη καμπύλη. Υποθέτουμε ότι $\sigma'(t) \neq 0$, για κάθε $t \in [a, b]$. Το διάνυσμα

$$T(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$$

- το οποίο εφάπτεται στη σ στο $\sigma(t)$ και έχει $\|T(t)\| = 1$ - λέγεται το *μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα* της σ στο $\sigma(t)$.
(α) Αποδείξτε ότι $T'(t) \cdot T(t) = 0$. (Υπόδειξη: Παραγωγίστε τη σχέση $T(t) \cdot T(t) = 1$.)
(β) Γράψτε έναν τύπο για το $T'(t)$ συναρτήσει της σ.

5. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία κατά τμήματα C^1 συνάρτηση. Δείξτε ότι η καμπύλη $\gamma(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$, έχει μήκος το οποίο ισούται με

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt\,.$$

6. Να βρεθούν τα πολυώνυμα Taylor 2ης τάξης με κέντρο το $(0, 0)$ για τις ακόλουθες συναρτήσεις:

$$(\alpha)\ f(x, y) = \sin(x^2 + y^2), \quad (\beta)\ f(x, y) = \frac{1}{1 - x - y + xy}$$

$$(\gamma)\ f(x, y) = xe^y, \qquad (\delta)\ f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$$

7. Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor 2ης τάξης με κέντρο το $(0, 0)$ για τη συνάρτηση $f(x, y) = e^x \sin y$. Εκτιμήστε το λάθος στην προσέγγιση της f από αυτό το πολυώνυμο, όταν $|x| \leq 0,1$ και $|y| \leq 1$.