$6^{η}$ Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1

Προσδιορίστε τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης για καθεμιά από τις παρακάτω καμπύλες για τη δοσμένη τιμή του t_0:

Λύση

α) $\vec{\sigma}(t) = (\sin^2 t, t^2-1, \frac{1}{t})$, $t_0 = 1$

Ταχύτητα: $\vec{\sigma}'(t) = (2\sin t\cos t, 2t, -\frac{1}{t^2}) = (\sin(2t), 2t, -\frac{1}{t^2})$

Επιτάχυνση: $\vec{\sigma}''(t) = (2\cos(2t), 2, \frac{2}{t^3})$

Εφαπτομένη: $\vec{\ell}(t) = \vec{\sigma}(1) + \vec{\sigma}'(1)(t-1)$ είναι η εφαπτομένη της σ στο $t_0 = 1$

Τώρα $\vec{\sigma}(1) = (\sin^2(1), 0, 1)$, $\vec{\sigma}'(1) = (\sin(2), 2, -1)$

Οπότε $\vec{\ell}(t) = (\sin^2(1), 0, 1) + (\sin(2), 2, -1)(t-1) =$

$= (\sin(2), 2, -1)\cdot t + (\sin^2(1) - \sin(2), -2, 2)$

β) $\sigma(t) = (0, t, 0)$, $t_0 = \frac{1}{2}$ (από εδώ και στο εξής θα παραλείπουμε το "$\rightarrow$" στα διανύσματα για συντομία - οι καμπύλες και οι παράγωγοι τους ωστόσο είναι διανύσματα)

Ταχύτητα: $\sigma'(t) = (0, 1, 0)$

Επιτάχυνση: $\sigma''(t) = (0, 0, 0)$

Εφαπτομένη: $\ell(t) = \sigma(\frac{1}{2}) + \sigma'(\frac{1}{2})(t - \frac{1}{2}) = (0, \frac{1}{2}, 0) + (0, 1, 0)(t - \frac{1}{2})$

$= (0, 1, 0)\cdot t$

Άσκηση 2

Να βρεθεί η καμπύλη με $\sigma(0) = (0, -5, 1)$ και $\sigma'(t) = (t, e^t, t^2)$

Λύση

$\Big[$ Αν $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, τότε $\sigma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

Οπότε αν $\gamma'(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$, τότε

$\gamma(t) = \left(\int x_1(t)\,dt, \int y_1(t)\,dt, \int z_1(t)\,dt\right) + \vec{c}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$

όπου το $\vec{c}$ το υπολογίζουμε αν έχουμε κάποια γνωστή τιμή της γ (είναι μια σταθερά) $\Big]$

Εδώ έχουμε ότι $\sigma'(t) = (t, e^t, t^2) = \left(\left(\frac{t^2}{2}\right)', (e^t)', \left(\frac{t^3}{3}\right)'\right)$

Συνεπώς $\sigma(t) = \left(\frac{t^2}{2}, e^t, \frac{t^3}{3}\right) + \vec{c}$

Όμως $\sigma(0) = (0, -5, 1) \Leftrightarrow (0, 1, 0) + \vec{c} = (0, -5, 1)$

$\Leftrightarrow \vec{c} = (0, -6, 1)$

Οπότε τελικά $\sigma(t) = \left(\frac{t^2}{2}, e^t - 6, \frac{t^3}{3} + 1\right)$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το μήκος των παρακάτω καμπυλών:

Λύση

α) $\sigma(t) = \vec{a} + r(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \frac{3\pi}{2}]$, $r > 0$, $\vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

Οπότε $\sigma(t) = (r\cos t + a_1, r\sin t + a_2)$

Συνεπώς $\sigma'(t) = (-r\sin t, r\cos t) \Rightarrow \|\sigma'(t)\| = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}$

$= \sqrt{r^2} = r$

Συνεπώς μήκος $\sigma = \ell(\sigma) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \|\sigma'(t)\| dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} r\, dt = \frac{3r\pi}{2}$

β) $\sigma(t) = (t, t^n)$, $t \in [0, 1]$, $n \geq 1$

Έχουμε ότι $\sigma'(t) = (1, n t^{n-1}) \Rightarrow \|\sigma'(t)\| = \sqrt{1 + n^2 t^{2(n-1)}}$

Οπότε $\ell(\sigma) = \int_0^1 \|\sigma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + n^2 t^{2(n-1)}}\, dt$

γ) $\sigma(t) = (t^n, t^n)$, $t \in [0, 1]$, $n \geq 1$

$\sigma'(t) = (n t^{n-1}, n t^{n-1}) \Rightarrow \|\sigma'(t)\| = \sqrt{2n^2 t^{2(n-1)}} = \sqrt{2}\, n t^{n-1}$

αφού $t \in [0, 1]$

Οπότε $\ell(\sigma) = \int_0^1 \|\sigma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{2}\, n t^{n-1} dt =$

$= \sqrt{2}\, n \cdot \left[\frac{t^n}{n}\right]_0^1 = \sqrt{2}$

Άσκηση 4

Έστω $\sigma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ μια C^∞ διαφορίσιμη καμπύλη με $\sigma'(t) \neq 0$ $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Θέτουμε $T(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$ το διάνυσμα που εφάπτεται στη σ στο $\sigma(t)$ και έχει $\|T(t)\| = 1$ (λέγεται μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της σ στο $\sigma(t)$)

α) Αποδείξτε ότι $T'(t) \cdot T(t) = 0$ (Υπόδειξη: Παραγωγίστε την $T(t) \cdot T(t) = 1$)

β) Γράψτε έναν τύπο για το $T'(t)$ συναρτήσει της σ και των παραγώγων της

Λύση

α) Έχουμε ότι $\|T(t)\| = \frac{\|\sigma'(t)\|}{\|\sigma'(t)\|} = 1 \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$

Οπότε $\|T(t)\|^2 = 1 \iff T(t) \cdot T(t) = 1$

Παραγωγίζουμε την παραπάνω σχέση: $(T(t) \cdot T(t))' = 0 \iff$

$\iff T'(t) T(t) + T(t) T'(t) = 0 \iff 2 T'(t) \cdot T(t) = 0 \iff T'(t) \cdot T(t) = 0$

(Χρησιμοποιήσαμε ότι $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$)

β) Έχουμε ότι $T(t) = \frac{\sigma'(t)}{\sqrt{\sigma'(t) \cdot \sigma'(t)}}$

Οπότε $$T'(t) = \frac{\sigma''(t) \cdot \sqrt{\sigma'(t) \cdot \sigma'(t)} - \sigma'(t) \left(\sqrt{\sigma'(t) \cdot \sigma'(t)}\right)'}{\sigma'(t) \cdot \sigma'(t)}$$

$$= \frac{\sigma''(t) \|\sigma'(t)\| - \sigma'(t) \dfrac{(\sigma'(t) \cdot \sigma'(t))'}{2\sqrt{\sigma'(t) \sigma'(t)}}}{\|\sigma'(t)\|^2} =$$

$$= \frac{\sigma''(t) \|\sigma'(t)\| - \sigma'(t) \dfrac{\sigma''(t) \cdot \sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}}{\|\sigma'(t)\|^2} =$$

$$= \frac{\|\vec{\sigma}'(t)\|^2 \vec{\sigma}''(t) - (\vec{\sigma}''(t) \cdot \vec{\sigma}'(t)) \vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|^3}$$

Άσκηση 5

Έστω $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ κατά τμήματα C^1 συνάρτηση.
Δείξτε ότι η καμπύλη $\gamma(t) = (t, f(t))$, $t \in [\alpha,\beta]$ έχει μήκος $\ell(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$

Λύση

Αφού η f είναι κατά τμήματα C^1, τότε υπάρχει διαμέριση $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta\}$ ώστε η συνάρτηση $f|_{[t_k, t_{k+1}]} : [t_k, t_{k+1}] \to \mathbb{R}$ να είναι C^1 $\forall\, 0 \le k \le n-1$.
Τότε η γ είναι C^1 σε καθένα από τα $[t_k, t_{k+1}]$ με $\gamma'(t) = (1, f'(t))$ και $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+(f'(t))^2}$ $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$ $\forall\, 0 \le k \le n-1$
Τώρα $\ell(\gamma) = \sum_{k=0}^{n-1} \ell_{[t_k, t_{k+1}]}(\gamma) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$

$$= \int_{t_0}^{t_n} \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$$

Άσκηση 6

Να βρεθούν τα πολυώνυμα Taylor $2^{ης}$ τάξης με κέντρο το $(0,0)$ για τις ακόλουθες συναρτήσεις

Λύση

[Αν $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, τότε το πολυώνυμο Taylor $2^{ης}$ τάξης με κέντρο το (α,β) είναι το:

$P_2(x,y) = f(\alpha,\beta) + [f_x(\alpha,\beta)(x-\alpha) + f_y(\alpha,\beta)(y-\beta)] +$
$+ \frac{1}{2}[f_{xx}(\alpha,\beta)(x-\alpha)^2 + 2 f_{xy}(\alpha,\beta)(x-\alpha)(y-\beta) + f_{yy}(\alpha,\beta)(y-\beta)^2]$]

α) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2) \Rightarrow f(0,0)=0$

$f_x(x,y) = 2x\cos(x^2+y^2) \Rightarrow f_x(0,0)=0$

$f_y(x,y) = 2y\cos(x^2+y^2) \Rightarrow f_y(0,0)=0$

$f_{xx}(x,y) = 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2) \Rightarrow f_{xx}(0,0)=2$

$f_{xy}(x,y) = -4xy\sin(x^2+y^2) \Rightarrow f_{xy}(0,0)=0$

$f_{yy}(x,y) = 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2+y^2) \Rightarrow f_{yy}(0,0)=2$

Οπότε $P_2(x,y) = 0 + [0\cdot x + 0\cdot y] + \frac{1}{2}[2\cdot x^2 + 0\cdot x\cdot y + 2\cdot y^2]$

$\Rightarrow P_2(x,y) = x^2+y^2$

β) $f(x,y) = \dfrac{1}{1-x-y+xy} = \dfrac{1}{(x-1)(y-1)}$ (ορίζεται καλά σε περιοχή του $(0,0)$, π.χ ορίζεται στο $(-1,1)\times(-1,1)$)

$f(0,0) = 1$

$f_x(x,y) = -\dfrac{1}{(x-1)^2(y-1)} \Rightarrow f_x(0,0)=1$

$f_y(x,y) = -\dfrac{1}{(x-1)(y-1)^2} \Rightarrow f_y(0,0)=1$

$f_{xx}(x,y) = \dfrac{2}{(x-1)^3(y-1)} \Rightarrow f_{xx}(0,0)=2$

$f_{xy}(x,y) = \dfrac{1}{(x-1)^2(y-1)^2} \Rightarrow f_{xy}(0,0)=1$

$f_{yy}(x,y) = \dfrac{2}{(x-1)(y-1)^3} \Rightarrow f_{yy}(0,0)=2$

Οπότε $P_2(x,y) = 1 + [x+y] + \frac{1}{2}[2x^2 + 2xy + 2y^2]$

γ) $f(x,y)=xe^y \Rightarrow f(0,0)=0$

$f_x(x,y)=e^y \Rightarrow f_x(0,0)=1$

$f_y(x,y)=xe^y \Rightarrow f_y(0,0)=0$

$f_{xx}(x,y)=0 \Rightarrow f_{xx}(0,0)=0$

$f_{xy}(x,y)=e^y \Rightarrow f_{xy}(0,0)=1$

$f_{yy}(x,y)=xe^y \Rightarrow f_{yy}(0,0)=0$

Οπότε $P_2(x,y)=0+x+\frac{1}{2}\cdot 2xy \Rightarrow P_2(x,y)=x+xy$

δ) $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$. Ορίζεται αυτή σε περιοχή του $(0,0)$, π.χ στο $\mathbb{R}\times(-1,1)$

Έχουμε $f(0,0)=0$

$f_x(x,y)=e^x\ln(1+y) \Rightarrow f_x(0,0)=0$

$f_y(x,y)=\frac{e^x}{1+y} \Rightarrow f_y(0,0)=1$

$f_{xx}(x,y)=e^x\ln(1+y) \Rightarrow f_{xx}(0,0)=0$

$f_{xy}(x,y)=\frac{e^x}{1+y} \Rightarrow f_{xy}(0,0)=1$

$f_{yy}(x,y)=-\frac{e^x}{(1+y)^2} \Rightarrow f_y(0,0)=-1$

Οπότε $P_2(x,y)=0+y+\frac{1}{2}[2xy-y^2]=y+xy-\frac{1}{2}y^2$

Άσκηση 1

Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor τάξης 2 με κέντρο το $(0,0)$ για τη συνάρτηση $f(x,y)=e^x \sin y$
Εκτιμήστε το σφάλμα στην προσέγγιση της f από αυτό το πολυώνυμο όταν $|x|\leq 0.1$ και $|y|\leq 1$

Λύση

$f(x,y)=e^x \sin y \Rightarrow f(0,0)=0$
$f_x(x,y)=e^x \sin y \Rightarrow f_x(0,0)=0$
$f_y(x,y)=e^x \cos y \Rightarrow f_y(0,0)=1$
$f_{xx}(x,y)=e^x \sin y \Rightarrow f_{xx}(0,0)=0$
$f_{xy}(x,y)=e^x \cos y \Rightarrow f_{xy}(0,0)=1$
$f_{yy}(x,y)=-e^x \sin y \Rightarrow f_{yy}(0,0)=0$

Οπότε $P_2(x,y)=0+y+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot xy \Leftrightarrow P_2(x,y)=y+xy$

Τώρα έχουμε ότι $f(x,y)=P_2(x,y)+R_2((x,y),(0,0))$, όπου $\dfrac{R_2((x,y),(0,0))}{x^2+y^2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

Όμως $R_2((x,y),(0,0))=\frac{1}{3!}\left[f_{xxx}(\xi)x^3+3f_{xxy}(\xi)x^2y+3f_{xyy}(\xi)xy^2+f_{yyy}(\xi)y^3\right]$
για κάποιο $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ στο ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των (x,y), $(0,0)$

Έχουμε ότι $f_{xxx}=e^x\sin y$, $f_{xxy}=e^x\cos y$, $f_{xyy}=-e^x\sin y$
Οπότε αν $|x|\leq 0.1$ και $|y|\leq 1$, τότε $|\xi_1|\leq 0.1$, $|\xi_2|\leq 1$
Άρα σφάλμα $=|f(x,y)-P_2(x,y)|=|R_2((x,y),(0,0))|\leq$

$$\leq \frac{1}{3!}\left[|f_{xxx}(\xi)||x|^3+3|f_{xxy}(\xi)||x^2y|+3|f_{xyy}(\xi)||xy|^2+|f_{yyy}(\xi)||y|^3\right]$$

$$\leq \frac{1}{3!}\left[e^{0.1}|x|^3+3e^{0.1}|x^2y|+3e^{0.1}|xy^2|+e^{0.1}|y|^3\right]\leq$$

$$\leq \frac{1}{3!}\left[10^{-3}e^{0.1}+3\cdot 10^{-2}e^{0.1}+3\cdot 10^{-1}e^{0.1}+e^{0.1}\right]=$$

$=\dfrac{1.331}{6}e^{0.1}$ =0.245 (μπορούσαμε να βρούμε και λίγο μικρότερο σφάλμα αν γράφαμε ότι $|f_{xxx}(\xi)|, |f_{xyy}(\xi)|\leq e^{0.1}\sin(1)$)

Άσκηση 8

Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^y - xy + y - 1}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0$

Λύση

Θεωρώ $f(x,y) = x^y$, $x, y > 0$ (μας ενδιαφέρει τι συμβαίνει κοντά στο $(1,1)$)

Έχουμε ότι $f(1,1) = 1$

$f_x(x,y) = y x^{y-1} \Rightarrow f_x(1,1) = 1$

$f_y(x,y) = x^y \ln x \Rightarrow f_y(1,1) = 0$

$f_{xx}(x,y) = y(y-1) x^{y-2} \Rightarrow f_{xx}(1,1) = 0$

$f_{xy}(x,y) = y x^{y-1} \ln x + x^{y-1} \Rightarrow f_{xy}(1,1) = 1$

$f_{yy}(x,y) = x^y (\ln x)^2 \Rightarrow f_{yy}(1,1) = 0$

Οπότε $P_2(x,y) = 1 + [1(x-1) + 0(y-1)] + \frac{1}{2}[0\cdot(x-1)^2 + 2\cdot 1 (x-1)(y-1) +$
$+ 0(y-1)^2] = 1 + x - 1 + (x-1)(y-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P_2(x,y) = xy - y + 1$

Έχουμε ότι $f(x,y) = P_2(x,y) + R_2((x,y),(1,1))$, όπου

$\dfrac{R_2((x,y),(1,1))}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \xrightarrow{(x,y)\to(1,1)} 0$

Τώρα $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^y - xy + y - 1}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{f(x,y) - P_2(x,y)}{(x-1)^2 + (y-1)^2} =$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{R_2((x,y),(1,1))}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0$

Άσκηση 9

Έστω $f(x,y,z) = e^x \cos(y) \cdot z$. Να βρεθούν $A, B, \Gamma, \Delta \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{(x,y,z) \to (0,\pi,1)} \frac{|f(x,y,z) - Ax - By - \Gamma z - \Delta|}{\sqrt{x^2 + (y-\pi)^2 + (z-1)^2}} = 0$$

Λύση

Έχουμε $f(0,\pi,1) = -1$

$f_x(x,y,z) = e^x \cos(y) \cdot z \Rightarrow f_x(0,\pi,1) = -1$

$f_y(x,y,z) = -e^x \sin(y) z \Rightarrow f_y(0,\pi,1) = 0$

$f_z(x,y,z) = e^x \cos(y) \Rightarrow f_z(0,\pi,1) = -1$

Οπότε $P_1(x,y,z) = -1 + [-(x-0) + 0(y-\pi) - (z-1)] =$

$= -1 - x - z + 1 \Leftrightarrow P_1(x,y,z) = -x - z$

Έχουμε ότι $f(x,y,z) = P_1(x,y,z) + R_1((x,y,z),(0,\pi,1))$

Τώρα $\displaystyle\lim_{(x,y,z) \to (0,\pi,1)} \frac{R_1(x,y,z)}{\sqrt{x^2 + (y-\pi)^2 + (z-1)^2}} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{(x,y,z) \to (0,\pi,1)} \frac{|R_1(x,y,z)|}{\sqrt{x^2 + (y-\pi)^2 + (z-1)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y,z) \to (0,\pi,1)} \frac{|f(x,y,z) - P_1(x,y,z)|}{\sqrt{x^2 + (y-\pi)^2 + (z-1)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y,z) \to (0,\pi,1)} \frac{|f(x,y,z) + x + z|}{\sqrt{x^2 + (y-\pi)^2 + (z-1)^2}}$$

Θέτουμε λοιπόν $A = -1$, $B = 0$, $\Gamma = -1$, $\Delta = 0$