7η Σειρά Ασκήσεων

Υπενθύμιση

α) Έστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και f μια C^2 συνάρτηση

Τότε ο Εσσιανός πίνακας της f στο $x_0 \in U$ είναι ο

$$Hf(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{bmatrix}$$ και

είναι ο πίνακας των μερικών παραγώγων 2ης τάξης

Μάλιστα, αφού η f είναι C^2 ισχύει ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $\forall 1 \leq i, j \leq n$

Άρα ο $Hf(x_0)$ είναι συμμετρικός, δηλαδή $Hf(x_0) = Hf(x_0)^t$

β) Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f: U \to \mathbb{R}$ μια C^3 συνάρτηση και $x_0 \in U$ ένα κρίσιμο σημείο της f, δηλαδή $\nabla f(x_0) = 0$ $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$ $\forall 1 \leq i \leq n$

i) Αν ο $Hf(x_0)$ έχει όλες τις ιδιοτιμές του θετικές, τότε το x_0 είναι τοπικό ελάχιστο για την f

ii) Αν ο $Hf(x_0)$ έχει όλες τις ιδιοτιμές του αρνητικές, τότε το x_0 είναι τοπικό μέγιστο για την f

iii) Αν ο $Hf(x_0)$ έχει και θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές $\Rightarrow$ x_0 σαγματικό σημείο

γ) Αν $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f: U \to \mathbb{R}$ μια C^3 συνάρτηση και $\vec{x_0} \in U$ κρίσιμο σημείο της f, τότε έχουμε ότι

$$Hf(\vec{x_0}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x_0}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x_0}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x_0}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x_0}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx}(\vec{x_0}) & f_{xy}(\vec{x_0}) \\ f_{xy}(\vec{x_0}) & f_{yy}(\vec{x_0}) \end{bmatrix}$$

Συμβολίζουμε με $\Delta = \det Hf(\vec{x_0}) = f_{xx}(\vec{x_0}) f_{yy}(\vec{x_0}) - f_{xy}^2(\vec{x_0})$

i) Αν $f_{xx}(x_0) > 0$ και $\Delta > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $\vec{x_0}$

ii) Αν $f_{xx}(x_0) < 0$ και $\Delta > 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο $\vec{x_0}$

iii) Αν $\Delta < 0$, τότε η f έχει σαγματικό σημείο στο x_0

Άσκηση 1

Να βρεθούν και να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία της
$f(x,y) = x^3 + x^2 y - y^2 - 4y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Λύση

Η f είναι C^∞. Έχουμε ότι $f_x = 3x^2 + 2xy$, $f_y = x^2 - 2y - 4$,
$f_{xx} = 6x + 2y$, $f_{xy} = 2x$, $f_{yy} = -2$

Τώρα $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2xy = 0 \\ x^2 - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3x+2y) = 0 \\ x^2 - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} -3x = 2y \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x = -4 \\ y = 6 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$

Οπότε τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $(0,-2)$,
$(-4,6)$, $(1,-\frac{3}{2})$

Έχουμε $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+2y & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}$

i) <u>Για το $(0,-2)$</u>: $H_f(0,-2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Βλέπουμε ότι $-4 < 0$ και $\Delta = 8 > 0$. Οπότε το $(0,-2)$
είναι τοπικό μέγιστο για την f

ii) <u>Για το $(-4,6)$</u>: $H_f(-4,6) = \begin{pmatrix} -12 & -8 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$

Έχουμε ότι $-12 < 0$ και $\Delta = 24 - 64 = -40 < 0$
Οπότε το $(-4,6)$ είναι σαγματικό σημείο

iii) <u>Για το $(1,-\frac{3}{2})$</u>: $H_f(1,-\frac{3}{2}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

Έχουμε ότι $3 > 0$ και $\Delta = -6 - 4 = -10 < 0$
Οπότε το $(1,-\frac{3}{2})$ είναι σαγματικό σημείο

Άσκηση 2

Να βρεθούν και να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία της $f(x,y,z) = x^3 - 3x - y^3 + 9y + z^2$

Λύση

Έχουμε ότι η f είναι C^∞. Βρίσκουμε πρώτα τα κρίσιμα σημεία.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ -3y^2 + 9 = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm\sqrt{3} \\ z = 0 \end{cases}$$

Οπότε τα κρίσιμα σημεία είναι τα $(1, \sqrt{3}, 0)$, $(1, -\sqrt{3}, 0)$, $(-1, \sqrt{3}, 0)$, $(-1, -\sqrt{3}, 0)$

Εδώ είμαστε στον $\mathbb{R}^3$. Άρα θα δουλέψουμε με τις ιδιοτιμές του Εσσιανού

Έχουμε ότι $Hf(x_0,y_0,z_0) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} & f_{zx} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{zy} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} \Big|_{(x_0,y_0,z_0)} =$

$$= \begin{bmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & -6y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Big|_{(x_0,y_0,z_0)} = \begin{bmatrix} 6x_0 & 0 & 0 \\ 0 & -6y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

και οι ιδιοτιμές του είναι οι $6x_0$, $-6y_0$, 2 αφού είναι διαγώνιος

i) Για το $(1, \sqrt{3}, 0)$: Έχουμε ιδιοτιμές $6, -6\sqrt{3}, 2$, δηλαδή υπάρχουν και θετικές και αρνητικές. Άρα έχουμε σαγματικό σημείο

ii) Για το $(1, -\sqrt{3}, 0)$: Έχουμε ιδιοτιμές $6, 6\sqrt{3}, 2$, δηλαδή είναι όλες θετικές. Άρα έχουμε τοπικό ελάχιστο

iii) Για το $(-1, \sqrt{3}, 0)$: Έχουμε ιδιοτιμές $-6, -6\sqrt{3}, 2 \Rightarrow$ σαγματικό σημείο

iv) Για το $(-1, -\sqrt{3}, 0)$: Έχουμε ιδιοτιμές $-6, 6\sqrt{3}, 2 \Rightarrow$ σαγματικό σημείο

Άσκηση 3

Να βρεθούν και να μελετηθούν τα κρίσιμα σημεία των παρακάτω συναρτήσεων.

Λύση

α) $f(x,y)=e^{xy}$ Είναι C^{∞}

Έχουμε $f_x = y e^{xy}$, $f_y = x e^{xy}$. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y e^{xy}=0 \\ x e^{xy}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

Άρα έχουμε μοναδικό κρίσιμο σημείο το $(0,0)$

Τώρα $$Hf(x,y)=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x,y)} = \begin{bmatrix} y^2 e^{xy} & (1+xy)e^{xy} \\ (1+xy)e^{xy} & x^2 e^{xy} \end{bmatrix}$$

Οπότε $$Hf(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

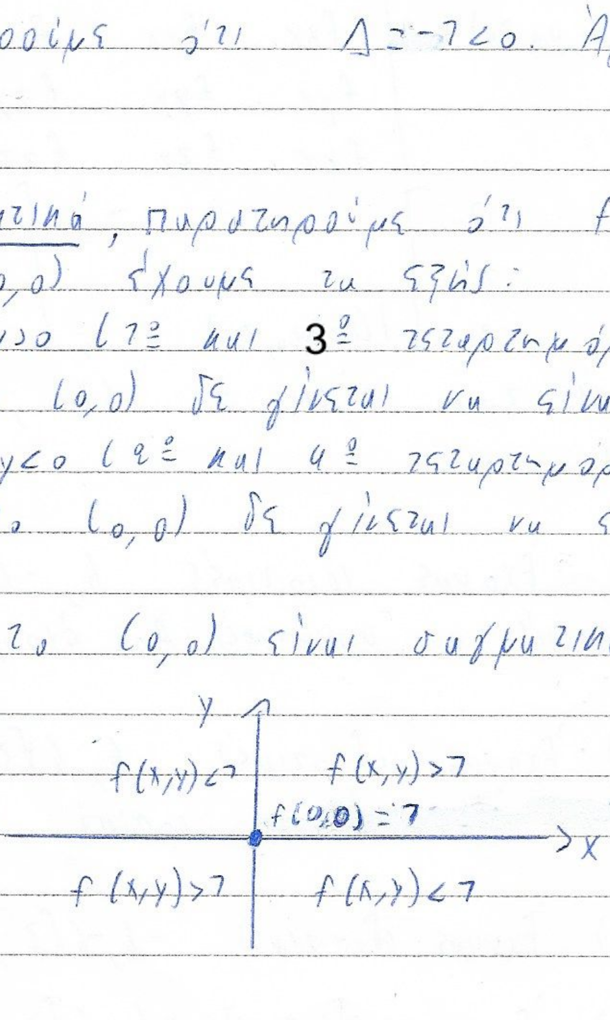
Παρατηρούμε ότι $\Delta=-1<0$. Άρα έχουμε σαγματικό σημείο

Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι $f(0,0)=1$ και κοντά στο $(0,0)$ έχουμε τα εξής:

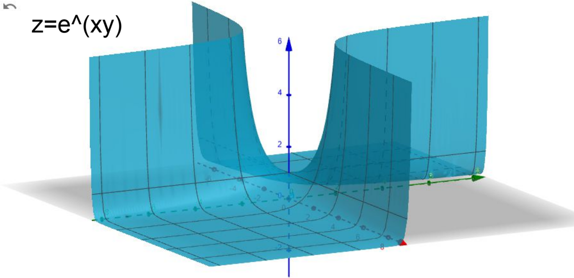
i) Αν $xy>0$ (1ο και 3ο τεταρτημόριο), τότε $f(x,y)=e^{xy}>1$
Άρα το $(0,0)$ δε γίνεται να είναι τοπικό μέγιστο

ii) Αν $xy<0$ (2ο και 4ο τεταρτημόριο), τότε $f(x,y)=e^{xy}<1$
Άρα το $(0,0)$ δε γίνεται να είναι τοπικό ελάχιστο

Οπότε το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο



z=e^(xy)



β) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 2xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0 \text{ ή } y=0\}$

που είναι C^∞

Έχουμε $f_x = -\frac{1}{x^2} + 2y$, $f_y = -\frac{1}{y^2} + 2x$. Βρίσκουμε κρίσιμα σημεία:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + 2y = 0 \\ -\frac{1}{y^2} + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2x^2} \\ -\frac{1}{y^2} + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2x^2} \\ -4x^4 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1 - 2x^3) = 0 \\ y = \frac{1}{2x^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x^3 = 1 \\ y = \frac{1}{2x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

Οπότε έχουμε μοναδικό κρίσιμο σημείο το $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

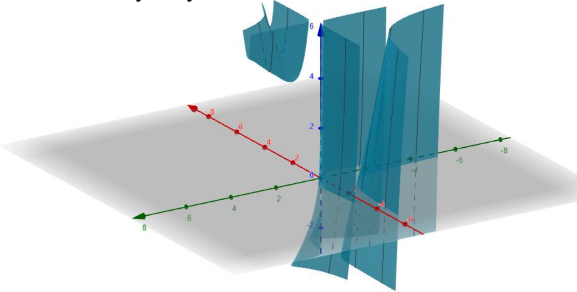
Έχουμε ότι $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{2}{x^3} & 2 \\ 2 & \frac{2}{y^3} \end{bmatrix}$

Οπότε $H_f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ και

βλέπουμε ότι $4 > 0$ και $\Delta = 16 - 4 = 12 > 0$

Οπότε το $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο

$z=1/x+1/y+2xy$



β) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{32}{xy}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ή } y = 0\}$

Είναι C^∞

Έχουμε $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{32}{x^2 y} = 0 \\ 2y - \frac{32}{x y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{16}{x^3} \\ x = \frac{16}{y^3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{16}{x^3} \\ x = \frac{16}{\frac{16^3}{x^9}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{16}{x^3} \\ x = \frac{x^9}{16^2} \end{cases} \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^8 = 16^2 \\ y = \frac{16}{x^3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^8 = 2^8 \\ y = \frac{16}{x^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$

Οπότε τα κρίσιμα σημεία είναι τα $(2,2)$, $(-2,-2)$

Έχουμε ότι $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{64}{x^3 y} & \frac{32}{x^2 y^2} \\ \frac{32}{x^2 y^2} & 2 + \frac{64}{x y^3} \end{pmatrix}$

i) Για το $(2,2)$: $H_f(2,2) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Βλέπουμε ότι $6 > 0$ και $\Delta = 36 - 4 = 32 > 0$. Οπότε έχουμε τοπικό ελάχιστο

ii) Για το $(-2,-2)$. $H_f(-2,-2) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ και έχουμε επίσης τοπικό ελάχιστο

Άσκηση 4
Δείξτε ότι η $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ έχει ένα κρίσιμο σημείο το οποίο δεν είναι τοπικό ακρότατο.
Περιγράψτε τις επιφάνειες στάθμης της f

Λύση
Έχουμε ότι f C^∞ και βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία

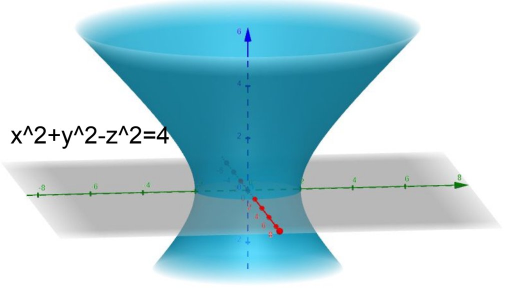
$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \\ f_z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \\ -2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

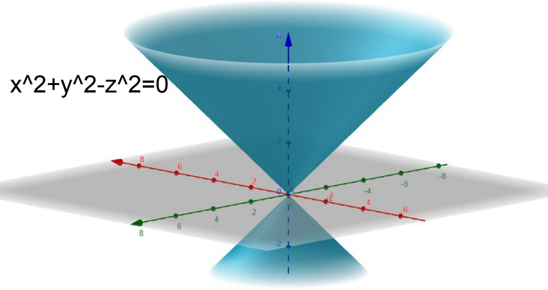
Άρα το $(0,0,0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο
Τώρα $H_f(x,y,z)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

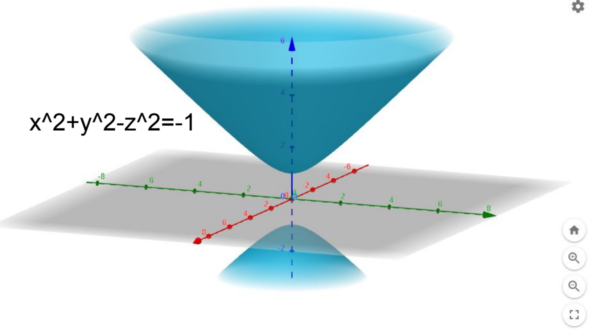
$\Rightarrow H_f(0,0,0)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ και έχουμε

Ιδιοτιμές $2, 2, -2$, δηλαδή και θετικές και αρνητικές
Οπότε το $(0,0,0)$ είναι σαγματικό σημείο, δηλαδή ~~ότε~~ δεν είναι τοπικό ακρότατο

Εναλλακτικά: Παρατηρούμε ότι π.χ κοντά στο $(0,0)$ έχουμε ότι $f(x,0,0)=x^2>0$ για $x\neq 0$ και αφού $f(0,0,0)=0$, τότε δεν γίνεται να έχουμε τοπικό μέγιστο στο $(0,0,0)$
Όμοια $f(0,0,z)=-z^2<0$ για $z\neq 0$ κοντά στο 0.
Άρα δε γίνεται να έχουμε τοπικό ελάχιστο στο $(0,0,0)$


x^2+y^2-z^2=4


x^2+y^2-z^2=0


x^2+y^2-z^2=-1

Άσκηση 5

Έστω $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$. Δείξτε ότι η f περιορισμένη σε κάθε ευθεία που διέρχεται από το $(0,0)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0,0)$. Δείξτε επίσης ότι το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο της f αλλά όχι τοπικό ελάχιστο αυτής.

Λύση

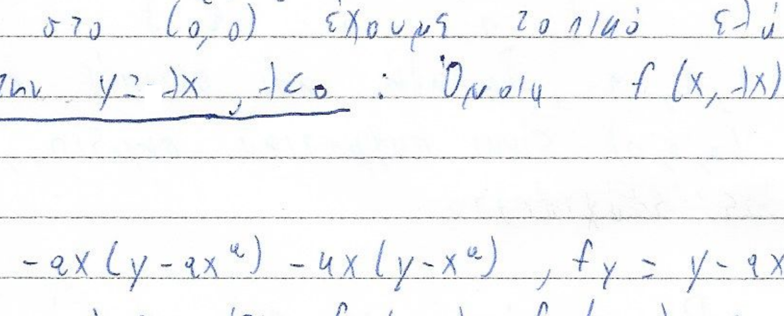
i) Ευθείες που διέρχονται από $(0,0)$: $x=0$, $y=\lambda x$, $\lambda\in\mathbb{R}$

- Για την $x=0$: $f(0,y)=y^2\geq 0=f(0,0)$ $\forall y\in\mathbb{R}$. Άρα στο $(0,0)$ έχουμε ολικό ελάχιστο πάνω στην $x=0$
- Για την $y=0$: $f(x,0)=(-x^2)(-2x^2)=2x^4\geq 0=f(0,0)$
Όμοια πάλι στο $(0,0)$ έχουμε ολικό ελάχιστο πάνω στην $y=0$
- Για την $y=\lambda x$, $\lambda>0$: $f(x,\lambda x)=(\lambda x-x^2)(\lambda x-2x^2)=x^2(\lambda-x)(\lambda-2x)$

Παρατηρούμε ότι $f(x,\lambda x)\geq 0$ στο $(-\infty,\frac{\lambda}{2})\cup(\lambda,+\infty)$
Άρα στο $(-\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2})$ έχουμε ότι $f(x,\lambda x)\geq 0=f(0,0)$.
Οπότε στο $(0,0)$ έχουμε τοπικό ελάχιστο

- Για την $y=\lambda x$, $\lambda<0$: Όμοια $f(x,\lambda x)\geq 0$ στο $(\frac{\lambda}{2},-\frac{\lambda}{2})$

ii) $f_x=-2x(y-2x^2)-4x(y-x^2)$, $f_y=y-2x^2+y-x^2$
Παρατηρούμε ότι $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. Άρα πράγματι το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο της f
Θα δείξουμε ότι δεν είναι τοπικό ελάχιστο
Πράγματι κοντά στο $(0,0)$ για $x\neq 0$, επιλέγοντας $y\in(x^2,2x^2)$, έχουμε ότι $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)<0=f(0,0)$ και αυτό μπορεί να γίνει οσοδήποτε κοντά στο $(0,0)$. Άρα δεν είναι τοπικό ελάχιστο



→ Πρόσημο f

Ορισμός
Ένα $F \subseteq \mathbb{R}^k$ θα λέγεται **κλειστό** αν το $\mathbb{R}^k \setminus F$ είναι ανοικτό

Παρατήρηση
Ένα $F \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι κλειστό $\Leftrightarrow$ $\forall$ $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο F με $\vec{x}_n \xrightarrow{n\to\infty} \vec{x}$ ισχύει ότι $\vec{x} \in F$

Ορισμός
Ένα $K \subseteq \mathbb{R}^k$ (με μετρική την συνήθη νόρμα $\|\cdot\|$ που εκφράζει την ευκλείδεια απόσταση δύο σημείων) θα λέγεται **συμπαγές** αν είναι κλειστό και φραγμένο (δηλαδή υπάρχει $M>0$ ώστε $\|\vec{x}\| \le M$ $\forall \vec{x} \in K$)

Πρόταση
Αν $f: K \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $K \subseteq \mathbb{R}^k$ συμπαγές, τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή

Υπενθύμιση
Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f: U \to \mathbb{R}$ C^1 συνάρτηση
Έστω ακόμη $g_1, \dots, g_k: U \to \mathbb{R}$ C^1 συναρτήσεις με $k<n$
και S η επιφάνεια που ορίζεται από τις εξισώσεις
$g_1(x_1,\dots,x_n)=c_1, \dots, g_k(x_1,\dots,x_n)=c_k$
Έστω $\vec{x_0} \in S$ ώστε τα $\nabla g_1(\vec{x_0}), \dots, \nabla g_k(\vec{x_0})$ να είναι γρ. ανεξάρτητα (αν $k=1$, αρκεί $\nabla g_1(\vec{x_0}) \neq 0$). Αν η f περιορισμένη στο S έχει τοπικό ακρότατο στο $\vec{x_0}$, τότε υπάρχουν $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{R}$ ώστε $\nabla f(\vec{x_0}) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{x_0}) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(\vec{x_0})$

Άσκηση 6

Βρείτε την ελάχιστη τιμή της $f(x,y)=x^2+y^2$, υπό τη συνθήκη $xy=1$

Λύση

α τρόπος) Έχουμε ότι $xy=1 \Rightarrow y=\frac{1}{x}$ $(x,y\neq 0)$

Οπότε με αυτή την αντικατάσταση ψάχνουμε το ελάχιστο της $g(x)=f(x,\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0$

Παραγωγίζουμε: $g'(x)=2x-\frac{2}{x^3}=2\frac{x^4-1}{x^3}=2\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^3}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
x^3		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Άρα παρατηρούμε ότι η ελάχιστη τιμή της g είναι το 2. Επιτυγχάνεται στα σημεία $(1,1)$, $(-1,-1)$ της $xy=1$

(Εδώ μπορούσαμε να λύσουμε μονοσήμαντα ως προς τη μία μεταβλητή και αναχθήκαμε εύκολα σε εύρεση ελαχίστου ~~μιας μεταβλητής~~ συνάρτησης μιας μεταβλητής. Αυτό ωστόσο δεν είναι πάντα εφικτό και εύκολο) β τρόπος) Με πολλαπλασιαστές Lagrange

Έχουμε $f(x,y) = x^2+y^2$ και $g(x,y) = xy$ και θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την f πάνω στην $g(x,y)=1$

Έχουμε ότι $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$ και $\nabla g(x,y) = (y, x)$

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο (x,y) με $g(x,y)=1$ και $\nabla g(x,y) \neq 0 \Leftrightarrow x\cdot y \neq 0$ (το έχουμε από την $g(x,y)=1$), τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda y \\ 2y = \lambda x \end{cases} \overset{\substack{x\neq 0 \\ \lambda \neq 0}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = \frac{2x}{\lambda} \\ \frac{4x}{\lambda} = \lambda x \end{cases} \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = \frac{2x}{\lambda} \\ \lambda^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ y = x \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} \lambda = -2 \\ y = -x \end{cases}$$

Όμως $g(x,y)=1$

i) Αν $\lambda = 2, y = x$: $g(x,x) = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1$

ii) Αν $\lambda = -2, y = -x$: $g(x,-x) = 1 \Leftrightarrow -x^2 = 1 \rightarrow$ αδύνατο

Παρατηρούμε ότι $f(1,1) = f(-1,-1) = 2$. Για να δείξουμε ότι όντως είναι το ελάχιστο της f, πρέπει να δείξουμε ότι $f(x,y) \geq 2 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $g(x,y)=1$

Για να το δείξουμε αυτό αναφερόμαστε πάλι στον προηγούμενο τρόπο

(Δε συμφέρει εδώ ούτε να χρησιμοποιήσουμε πολλαπλασιαστές Lagrange)

Δεν μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε εδώ τη θεωρία των συμπαγών συνόλων, διότι το $K = \{(x,y) \mid g(x,y)=1\}$ δεν είναι φραγμένο, αφού τα $(n, \frac{1}{n}) \in K \ \forall n \in \mathbb{N}$ και

$$\|(n, \tfrac{1}{n})\| = \sqrt{n^2 + \tfrac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

Άσκηση 7

Έστω $f(x,y,z)=x^2y^2z^2$. Δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της f στη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=R^2$ είναι $\frac{R^6}{27}$

Λύση

Θεωρώ $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Το σύνολο $\{(x,y,z) \mid g(x,y,z)=R^2\}$ είναι συμπαγές.

Πράγματι, αν $(x,y,z)\in K$, τότε $\|(x,y,z)\|=\sqrt{g(x,y,z)}=R$ και άρα είναι φραγμένο. Είναι επίσης κλειστό αφού αν $((x_n,y_n,z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο K με $(x_n,y_n,z_n)\xrightarrow{n\to\infty}(x,y,z)$, τότε $x_n^2+y_n^2+z_n^2=R^2 \xRightarrow{n\to\infty} x^2+y^2+z^2=R^2 \Rightarrow (x,y,z)\in K$

Αφού f συνεχής στο K, τότε η f παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο K

Έχουμε $\nabla f=(2xy^2z^2,\ 2x^2yz^2,\ 2x^2y^2z)$, $\nabla g=(2x,2y,2z)$

Αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο $(x,y,z)\in K$ με $\nabla g(x,y,z)\neq 0$ (δηλαδή $(x,y,z)\neq(0,0,0)\notin K$ → δε μας ενδιαφέρει) τότε υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ με $\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy^2z^2=\lambda x & (*)\\ x^2yz^2=\lambda y \\ x^2y^2z=\lambda z \end{cases}$$

- Αν $\lambda=0$, τότε $x=0$ ή $y=0$ ή $z=0 \Rightarrow f(x,y,z)=x^2y^2z^2=0$
- Αν $\lambda\neq 0$, τότε το σύστημα $(*)$ μας λέει ότι $x\neq 0$ και $y\neq 0$ και $z\neq 0$, διότι αλλιώς θα μηδενίζαν ~~και~~ τα αριστερά μέλη και στις 3 εξισώσεις και άρα και τα δεξιά

Οπότε διαιρώντας:
$$\begin{cases} y^2z^2=\lambda \\ x^2z^2=\lambda \\ x^2y^2=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2z^2=x^2z^2 \\ x^2y^2=y^2z^2 \end{cases} \xRightarrow{y\neq 0} \begin{cases} x^2=y^2 \\ x^2=z^2 \end{cases}$$

Οπότε $f(x,y,z)=x^2y^2z^2=x^6$. Όμως $g(x,y,z)=R^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=R^2 \Leftrightarrow 3x^2=R^2 \Leftrightarrow x^2=\frac{R^2}{3}$

Άρα $f(x,y,z)=\left(\frac{R^2}{3}\right)^3=\frac{R^6}{27}$ που είναι η μέγιστη τιμή της f στο K, αφού $\frac{R^6}{27}>0$ και η f παίρνει max και min στο K

Άσκηση 8

Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y,z)=x+y+z$ υπό τις συνθήκες $x^2+y^2=2$, $x+z=1$

Λύση

α τρόπος) $f(x,y,z)=x+y+z=1+y$, αφού δουλεύουμε στο $x+z=1$

Άρα η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f εξαρτώνται από τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του y στην $x^2+y^2=2$

Όμως $-\sqrt{2}\leq y\leq\sqrt{2}$ και $0^2+(\sqrt{2})^2=0^2+(-\sqrt{2})^2=2$

Οπότε $f(0,\sqrt{2},1)=1+\sqrt{2}=\max f$, $f(0,-\sqrt{2},1)=1-\sqrt{2}=\min f$

β τρόπος) Θέτουμε $g_1(x,y,z)=x^2+y^2$, $g_2(x,y,z)=x+z$

Το $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g_1(x,y,z)=2,\ g_2(x,y,z)=1\}$ ελέγχεται ότι είναι συμπαγές

(π.χ. για το κλειστό όπως πριν και για το φραγμένο, αν $(x,y,z)\in K$, τότε $x^2+y^2=2 \Rightarrow -\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$ και $x^2\leq 2$. Οπότε $z=1-x \Rightarrow 1-\sqrt{2}\leq z\leq 1+\sqrt{2} \Rightarrow z^2\leq(1+\sqrt{2})^2$

Συνεπώς $\|(x,y,z)\|^2=x^2+y^2+z^2=2+z^2\leq 2+(1+\sqrt{2})^2$)

Οπότε η f στο K έχει μέγιστο και ελάχιστο

Έχουμε ότι $\nabla f=(1,1,1)$, $\nabla g_1=(2x,2y,0)$, $\nabla g_2=(1,0,1)$

Παρατηρούμε ότι τα $\nabla g_1,\nabla g_2$ είναι πάντα γρ. ανεξάρτητα

Πράγματι, αν υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ με $\lambda_1\nabla g_1+\lambda_2\nabla g_2=0$ και $\lambda_1\neq 0$ ή $\lambda_2\neq 0$, τότε:

i) Αν $\lambda_2\neq 0$, τότε $\nabla g_2=-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\nabla g_1 \Rightarrow 1=-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot 0=0$ — άτοπο

ii) Αν $\lambda_2=0$, τότε $\lambda_1\nabla g_1=0 \Leftrightarrow (2\lambda_1 x,2\lambda_1 y,0)=(0,0,0) \overset{\lambda_1\neq 0}{\Rightarrow} x=y=0$. Όμως $x^2+y^2=2$ — άτοπο

Άρα $\lambda_1=\lambda_2=0$ και είναι γρ. ανεξάρτητα

Συνεπώς, αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο K, τότε υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ ώστε $\nabla f(x,y,z)=\lambda_1\nabla g_1(x,y,z)+\lambda_2\nabla g_2(x,y,z) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=2\lambda_1 x+\lambda_2 \\ 1=2\lambda_1 y \\ 1=\lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2=1 \\ 2\lambda_1 x=0 \\ 2\lambda_1 y=1 \end{cases} \overset{\lambda_1\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_2=1 \\ x=0 \\ 2\lambda_1 y=1 \end{cases}$$

Όμως έχουμε ότι $x+z=7 \Rightarrow z=7$ και $x^2+y^2=2 \Rightarrow$
$\Rightarrow y^2=2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$
Οπότε οι θέσεις μέγιστου και ελάχιστου της f στο
K είναι τα $(0,\sqrt{2},7)$, $(0,-\sqrt{2},7)$
Παρατηρούμε ότι $f(0,\sqrt{2},7)=\sqrt{2}+7>-\sqrt{2}+7=f(0,-\sqrt{2},7)$
Οπότε $\max_K f=\sqrt{2}+7$, $\min_K f=-\sqrt{2}+7$

Άσκηση 2

Βρείτε τη μέγιστη τιμή της $f(x,y,z)=xyz$ υπό τις συνθήκες $x^2+y^2=3$, $y=2z$

Λύση

Θεωρώ $g_1(x,y,z)=x^2+y^2$, $g_2(x,y,z)=y-2z$

Το $K=\{(x,y,z) \mid g_1(x,y,z)=3,\ g_2(x,y,z)=0\}$ είναι συμπαγές και f συνεχής. Άρα παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο K

Έχουμε ότι $\nabla f=(yz,xz,xy)$, $\nabla g_1=(2x,2y,0)$, $\nabla g_2=(0,1,-2)$

Παρατηρούμε όπως πριν ότι τα $\nabla g_1, \nabla g_2$ είναι γρ. ανεξάρτητα $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

Αν τώρα η f παρουσιάζει ακρότατο στο $(x,y,z)\in K$, τότε υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ με $\nabla f(x,y,z)=\lambda_1\nabla g_1(x,y,z)+\lambda_2\nabla g_2(x,y,z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} yz=2\lambda_1 x \\ xz=2\lambda_1 y+\lambda_2 \\ xy=-2\lambda_2 \end{cases}$$

- Αν $x=0$, τότε $y\cdot z=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \text{ ή } \Rightarrow x^2+y^2=0 \rightarrow \text{άτοπο} \\ z=0 \Rightarrow y=2\cdot 0=0 \rightarrow \text{άτοπο} \end{cases}$

Άρα $x\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1=\dfrac{yz}{x} \\ \lambda_2=-\dfrac{xy}{2} \\ xz=\dfrac{y^2z}{x}-\dfrac{xy}{2} \end{cases}$

Τώρα $xz=\dfrac{y^2z}{x}-\dfrac{xy}{2} \overset{z=\frac{y}{2}}{\underset{\cdot 2x}{\Leftrightarrow}} x^2y=y^3-x^2y \Leftrightarrow 2x^2y=y^3$

i) **Αν $y=0$**: $z=\dfrac{y}{2}=0$ και $x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

ii) **Αν $y\neq 0$**: $2x^2=y^2$. Οπότε $x^2+y^2=3 \Leftrightarrow 3x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Οπότε $y^2=2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{2} \Rightarrow z=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Άρα οι πιθανές θέσεις μεγίστου και ελαχίστου είναι τα σημεία $(\sqrt{3},0,0)$, $(-\sqrt{3},0,0)$, $(1,\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-1,\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(1,-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-1,-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$

Έχουμε ότι $f(\sqrt{3},0,0)=f(-\sqrt{3},0,0)=0$, $f(1,\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=$
$=f(1,-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=1$, $f(-1,-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=f(-1,\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=-1$

Οπότε $\max\limits_{K} f=1$, $\min\limits_{K} f=-1$

<u>Άσκηση 10</u>

Βρείτε τη μέγιστη τιμή της $f(x,y,z)=xy+xz$ υπό τις συνθήκες $2x+3z=5$, $xy=4$

<u>Λύση</u>

$$f(x,y,z)=xy+xz=4+xz=4+\frac{x}{3}(5-2x)=g(x)$$

Έχουμε ότι $g'(x)=\frac{5-2x}{3}-\frac{2x}{3}=\frac{5-4x}{3}$

Άρα

x	$-\infty$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Άρα $$\max_{\substack{2x+3z=5\\ xy=4}} f(x,y,z)=\max_{x\in\mathbb{R}} g(x)=g\left(\frac{5}{4}\right)=4+\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{2}=\frac{121}{24}$$