Ανάλυση ΙΙ

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

8η Σειρά Ασκήσεων
Διπλό ολοκλήρωμα σε Καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες

1. Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy^2 dydx$$

Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης και γράψτε το ολοκλήρωμα με τη σειρά ολοκλήρωσης αντεστραμμένη. Στη συνέχεια υπολογίστε το I και με τους δύο τρόπους .

2. Υπολογίστε τα ολοκλήρωματα:

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{3/2} dydx \ , \quad I_2 = \int_0^1 \int_y^1 x^3 y e^{xy^2} dxdy$$

$$I_3 = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dydx \ , \qquad I_4 = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dydx}{y^4+1}$$

3. Βρείτε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από κάτω από το xy επίπεδο, από πάνω απο την επιφάνεια $z = 1 + x^2$ και από τα πλάγια από το επίπεδο $y = x$ και την επιφάνεια $y = 2 - x^2$.

4. Βρείτε τη ροπή αδράνειας ως προς την αρχή των αξόνων μιας λεπτής πλάκας πυκνότητας $\delta(x, y) = 1$, η οποία φράσσεται από το τεταρτοκύκλιο $x^2 + y^2 = 1$ στο πρώτο τεταρτημόριο. (Η ροπή αδράνειας μιας λεπτής πλάκας D ως προς την αρχή δίνεται από τον τύπο: $I = \int\int_D (x^2 + y^2)\delta(x, y)dxdy$.)

4. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα, μετατρέποντάς τα σε πολικές συντεταγμένες:

$$I_1 = \int\int_D \sin(x^2 + y^2) dxdy \ ,$$

όπου D το χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

$$I_2 = \int\int_K \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dxdy \ ,$$

όπου $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \ 1 \leq 2y \leq 2\}$.

$$I_3 = \int\int_T x dxdy \ ,$$

όπου $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1 \text{ και } \ y \geq x\}$.

5. (α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$J_R = \int\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \ ,$$

όπου D_R το χωρίο που ορίζεται από το τεταρτοκύκλιο $x^2 + y^2 = R^2$ στο πρώτο τεταρτημόριο.

(β) Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α), υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x^2} dx.$$

(*Υπόδειξη:* Αν $I_b = \int_0^b e^{-x^2} dx$, δείξτε ότι $I_b^2 = \int_0^b \int_0^b e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ και, στη συνέχεια, ότι $\lim\limits_{b \to +\infty} I_b^2 = \lim\limits_{R \to +\infty} J_R$.)