

Ανάλυση II

Τμήμα Πληροφορικής - Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

9η Σειρά Ασκήσεων

Τριπλό ολοκλήρωμα - Αλλαγή μεταβλητών σε πολλαπλά ολοκλήρωματα

1. Δίνονται τα διαδοχικά ολοκλήρωματα:

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 f(x, y, z) dy dz dx, \quad I_2 = \int_1^2 \int_0^{z-1} \int_0^x f(x, y, z) dy dx dz.$$

(α) Σχεδιάστε τα αντίστοιχα στερεά χωρία ολοκλήρωσης B_1 και B_2 . Στη συνέχεια, γράψτε τα I_1, I_2 με σειρά ολοκλήρωσης $dz dy dx$.

(β) Υπολογίστε τον όγκο των στερεών B_1 και B_2 .

2. Υπολογίστε τα τριπλά ολοκλήρωματα:

(α) $\int \int \int_B x dx dy dz$, όπου B το στερεό που φράσσεται από το παραβολοειδές $y = x^2 + z^2$ και το επίπεδο $y = 1$.

(β) $\int \int \int_B y z dx dy dz$, όπου B το στερεό στο 1ο ογδομημόριο που φράσσεται από τα επίπεδα των συντεταγμένων και το ημισφαίριο $x = \sqrt{9 - (y^2 + z^2)}$.

3. Δίνεται το διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 (x^2 + y^2)^{3/2} dz dy dx.$$

Περιγράψτε ή σχεδιάστε το στερεό χωρίο ολοκλήρωσης. Στη συνέχεια υπολογίστε το ολοκλήρωμα εφαρμόζοντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών.

4. Βρείτε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 2y$, τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και το επίπεδο $z = 0$.

5. (α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ πάνω στον κύλινδρο $x^2 + y^2 \leq 2$, $-2 \leq z \leq 3$.

(β) Δείξτε ότι η επιφάνεια $z = x^2 + y^2$ χωρίζει τον κύλινδρο $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq a^2$, σε δύο στερεά χωρία που έχουν ίσους όγκους.

6. Υπολογίστε τα ολοκλήρωματα

$$I_1 = \int \int \int_S \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad I_2 = \int \int \int_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-(x^2 + y^2 + z^2)^2} dx dy dz,$$

όπου S είναι το στερεό που περιβάλλεται από τις σφαίρες $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ και $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ ($0 < a < b$).

7. Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες υπολογίστε τον όγκο του στερεού που αποκόπτεται από τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ ο κώνος $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$.

8. (α) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου E που περικλείεται από την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $x = au$, $y = bv$. Στη συνέχεια, υπολογίστε το ολοκλήρωμα πάνω στο E της συνάρτησης $f(x, y) = x^2$.

(β) Υπολογίστε τον όγκο του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό και στη συνέχεια σφαιρικές συντεταγμένες.