Διπλά ολοκληρώματα

Ολοκλήρωμα πάνω από ορθογώνιο χωρίο:

Αν $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \quad c \le y \le d\}$

και η $f : R \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

(Θεώρημα Fubini)

Παράδειγμα 1

Αν $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 1\}$,

τότε

$$\iint_R (1-6x^2y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left[\int_0^2 (1-6x^2y)\,dx\right] dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[x - 2x^3y\right]_{x=0}^{2} dy = \int_{-1}^{1} (2-16y)\,dy$$

$$= \left[2y - 8y^2\right]_{-1}^{1} = 2-8+2+8 = 4$$

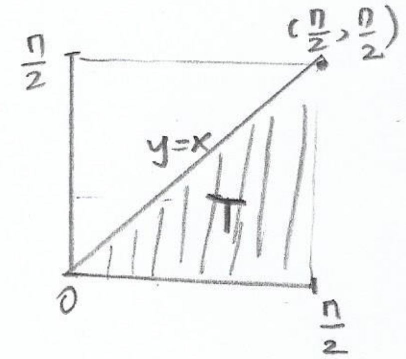
Επαληθεύστε ότι το αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο, αν ολοκληρώναμε πρώτα ως προς y και μετά ως προς x.

Ολοκλήρωμα ορισμένο σε μη ορθογώνιο χωρίο

Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\iint_T (x^3y+\cos x)\,dx\,dy,$$ όπου T το τρίγωνο:



Το T εκφράζεται

ως χωρίο τύπου 1:

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

$0 \le y \le x$

ή ως χωρίο τύπου 2:

$0 \le y \le \frac{\pi}{2}$

$y \le x \le \frac{\pi}{2}$

Επιλέγοντας την πρώτη έκφραση, έχουμε:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^x (x^3y+\cos x)\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{x^3y^2}{2}+y\cos x\right]_{y=0}^{x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x^5}{2}+x\cos x\right)dx \overset{*}{=} \left[\frac{x^6}{12}+x\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi^6}{64\cdot 12}+\frac{\pi}{2}-1$$

---

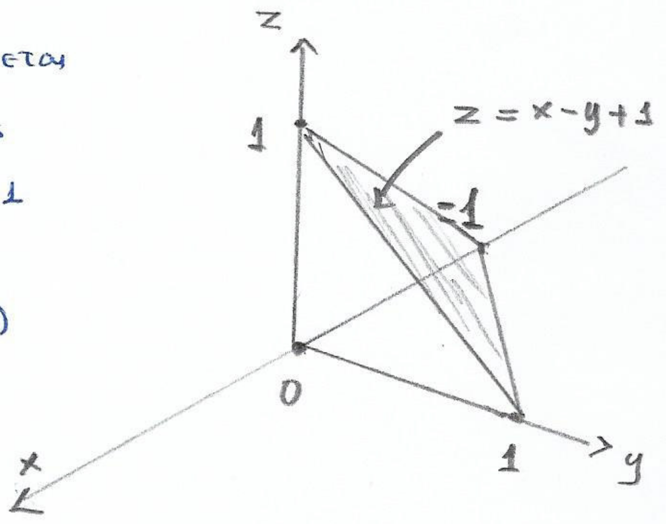
* Είναι με ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int x\cos x\,dx=\int x(\sin x)'\,dx = x\sin x-\int \sin x\,dx$$
$$= x\sin x+\cos x$$

Παράδειγμα 3

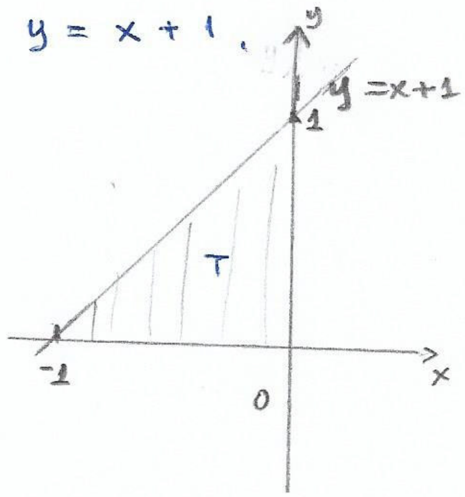
Βρείτε τον όγκο του τετραέδρου που φράσσεται από τα επίπεδα $y=0$, $z=0$, $x=0$ και $y-x+z=1$.

Λύση



Ο ζητούμενος όγκος δίνεται από το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y) = x - y + 1$ (της οποίας το γράφημα είναι το επίπεδο $P: y-x+z=1$) πάνω από το χωρίο T που ορίζεται από τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την τομή του επιπέδου P με το xy επίπεδο:

Για $z=0$ έχουμε $y = x+1$.



T: $-1 \le x \le 0$

$0 \le y \le x+1$

Άρα

$$E = \iint_T (1+x-y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{x+1}(1+x-y)\,dy\right)dx$$

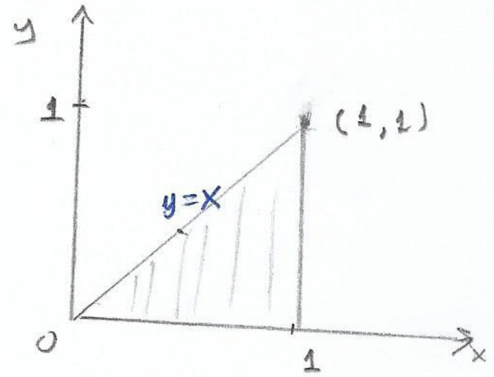
$$= \int_{-1}^{0}\left[y + xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{x+1} dx$$

$$= \int_{-1}^{0}\frac{(x+1)^2}{2}\,dx = \left[\frac{(x+1)^3}{6}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{6}$$

<u>Παράδειγμα</u> 4 (Η επιλογή της σειράς ολοκλήρωσης μπορεί να έχει σημασία).

Υπολογίστε το $\iint_R \frac{\sin x}{x}\, dx\, dy$ όπου

R το τρίγωνο :



<u>Λύση</u>

Το χωρίο R είναι τύπου 3.
Αν το δούμε ως τύπου 1 (x μεταξύ δύο σταθερών) και ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y και μετά ως προς x, βρίσκουμε:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{\sin x}{x} \cdot y \right]_{y=0}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \sin x\, dx = \left[-\cos x \right]_0^1 = 1 - \cos 1 .$$

Αν δούμε το R ως χωρίο τύπου 2, δηλαδή ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς x και μετά ως προς y, έχουμε

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{\sin x}{x}\, dx \right) dx .$$

Όμως, το $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$ * δεν μπορεί να εκφραστεί μέσω στοιχειωδών συναρτήσεων, οπότε <u>δεν μπορούμε να προχωρήσουμε.</u>

---

* δηλαδή η παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Αντιστροφή τη σειράς ολοκλήρωσης

Παράδειγμα 5

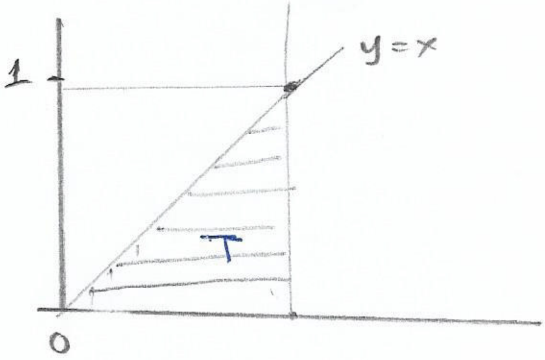
Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2} dx \right) dy$$

Το $\int e^{x^2} dx$ δεν εκφράζεται μέσω στοιχειωδών συναρτήσεων.

Δοκιμάζουμε να αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης.

Το χωρίο T πάνω από το οποίο ολοκληρώνουμε είναι το τρίγωνο:



$0 \le y \le 1$

$y \le x \le 1$

που εκφράζεται και ως:

$0 \le x \le 1$

$0 \le y \le x$

Άρα (με βάση το Θεώρημα του Fubini)

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left[e^{x^2} \cdot y \right]_{y=0}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \left[e^{x^2} \right]_0^1$$

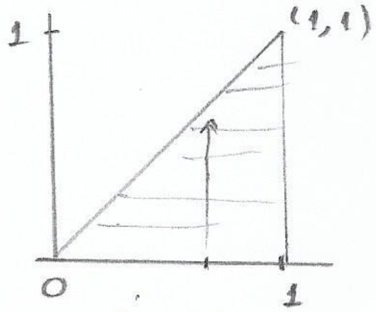
$$= \frac{1}{2} (e - 1).$$

Παράδειγμα 6

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 x^3 y \, e^{xy^2} dx \right) dy$$

Λύση



$0 \leq x \leq 1$

$0 \leq y \leq x$

Αντιστρέφοντας τη σειρά ολοκλήρωσης, υπολογίζεται ευκολότερα.
Σύμφωνα με το σχήμα είναι:

$$I = \int_0^1 \left(x^3 \int_0^x y \, e^{xy^2} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2x} \int_0^x 2xy \, e^{xy^2} dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \left[e^{xy^2} \right]_{y=0}^{x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^2 e^{x^3} - x^2 \right) dx = \frac{1}{6} \int_0^1 3x^2 \cdot e^{x^3} dx - \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

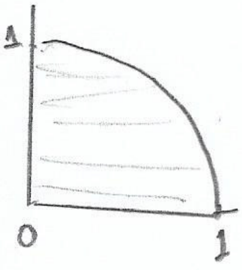
$$= \frac{1}{6} \left[e^{x^3} \right]_0^1 - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} (e - 2)$$

Παράδειγμα 7

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{3/2} \, dy \right) dx$$

Λύση



Απλοποιείται αν αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης.
Το χωρίο πάνω από το οποίο ολοκληρώνουμε είναι το τεταρτοκύκλιο στο 1ο τεταρτημόριο

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \qquad \text{ή} \qquad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$$

Άρα

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (1-y^2)^{3/2} \, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 (1-y^2)^{3/2} \sqrt{1-y^2} \, dy$$

$$= \int_0^1 (1-y^2)^2 \, dy = \int_0^1 (y^4 - 2y^2 + 1) \, dy$$

$$= \left[\frac{y^5}{5} - \frac{2y^3}{3} + y \right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{8}{15}$$

Παράδειγμα 8

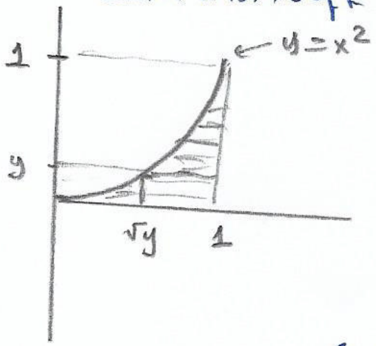
Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{y}{(1+x^5)^7}\, dx \right) dy$$

Λύση

Το χωρίο ολοκλήρωσης D δίνεται από τις ανισότητες : $0 \le y \le 1$ και $\sqrt{y} \le x \le 1$

Σχεδιάζουμε την καμπύλη $\sqrt{y} = x \iff y = x^2$ και $x \geq 0$



Άρα $D: \; 0 \le x \le 1$ και $0 \le y \le x^2$

οπότε

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{y}{(1+x^5)^7}\, dy \right) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^5)^7} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{x^2} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^4}{(1+x^5)^7}\, dx = \frac{1}{10} \int_0^1 \frac{5x^4}{(1+x^5)^7}\, dx$$

$$= \frac{1}{10} \left[-\frac{1}{6} \frac{1}{(1+x^5)^6} \right]_0^1 = -\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{2^6} + \frac{1}{60}$$

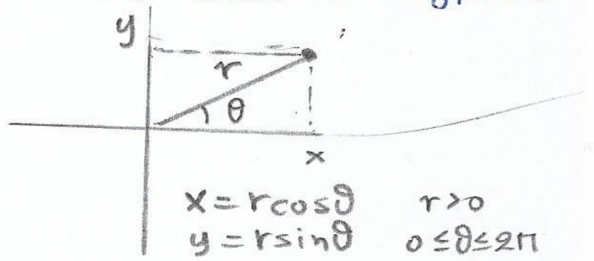
$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{60} \cdot \frac{63}{64}$$

Αλλαγή μεταβλητών
Διπλά ολοκληρώματα σε πολικές συντεταγμένες.

Αν το D είναι στοιχειώδες χωρίο στο επίπεδο και η $f : D \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, τότε

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

όπου D^* η έκφραση του χωρίου D σε πολικές συντεταγμένες.



$x = r\cos\theta \quad r>0$
$y = r\sin\theta \quad 0\le\theta\le 2\pi$

Παράδειγμα 1

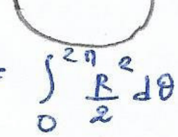
Το εμβαδόν του κύκλου.

Έχουμε δει ότι το εμβαδόν ενός χωρίου δίνεται από το (διπλό) ολοκλήρωμα της συνάρτησης 1 πάνω από το χωρίο αυτό. – Αυτό ισχύει γιατί το εμβαδόν του D ισούται με τον όγκο ενός «κυλίνδρου» βάσης D και ύψους 1.

Άρα $\quad E(D) = \iint_D 1\,dx\,dy$

Εδώ D είναι ο κύκλος ακτίνας R:
Εκφράζοντας τον κύκλο σε πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$D^*: \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad , \quad 0 \le r \le R$



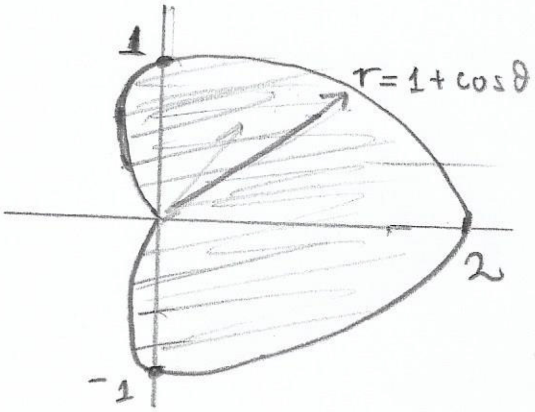
Άρα

$$E(D) = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{R} d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}\,d\theta$$

$$= 2\pi\frac{R^2}{2} = \pi R^2.$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου D που περικλείεται από την καρδιοειδή καμπύλη, η οποία σε πολικές συντεταγμένες έχει εξίσωση $r = 1 + \cos\theta$.



Λύση

Σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι

$$E(D) = \iint_{D^*} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{1+\cos\theta} r\, dr\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\theta)^2}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta + \int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta$$

$$= \pi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)\, d\theta + \left[\sin\theta\right]_0^{2\pi}$$

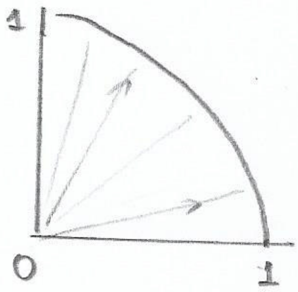
$$= \pi + \frac{1}{4}\cdot 2\pi + \frac{1}{8}\left[\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε τη ροπή αδράνειας ως προς την αρχή των αξόνων μιας λεπτής πλάκας πυκνότητας $\delta(x,y)=1$, η οποία φράσσεται από το τεταρτοκύκλιο $x^2+y^2=1$ στο πρώτο τεταρτημόριο.

(Ροπή αδράνειας ως προς την αρχή:
$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,\delta(x,y)\,dx\,dy \ )$$



Λύση

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$$

Κάνοντας αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, παίρνουμε:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{1} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\,d\theta = \frac{\pi}{8}.$$