Ο ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΧΩΡΟΣ R^n

Το εσωτερικό γινόμενο

Σε πολλές πρακτικές καταστάσεις, η τιμή μιας ποσότητας εξαρτάται από τις τιμές δύο ή περισσότερων άλλων ποσοτήτων. Για παράδειγμα η συνάρτηση $V = \pi r^2 h$ υπολογίζει τον όγκο ενός ορθού κυλίνδρου, από την ακτίνα της βάσης r και το ύψος του h. Η θερμοκρασία Τ ενός σημείου της επιφάνειας της γης εξαρτάται από τις συντεταγμένες, πλάτος x και μήκος y του σημείου, έτσι γράφουμε $\mathrm{T} = \mathrm{T}(x, y)$. Αυτές οι παρατηρήσεις οδηγούν φυσιολογικά στην μελέτη συναρτήσεων $f : \mathrm{A} \subseteq R^2 \to R, g : \mathrm{A} \subseteq R^3 \to R$ δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών. Η μελέτη αυτή οφείλει να είναι αντίστοιχη, με την μελέτη των συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, όπου εξετάζονται έννοιες, όπως όριο, συνέχεια, διαφορισιμότητα και ολοκληρωσιμότητα συνάρτησης.

Στον Απειροστικό Λογισμό (των συναρτήσεων μιας μεταβλητής) αυτό που επέτρεψε την μελέτη των παραπάνω οριακών διαδικασιών είναι η ύπαρξη μιας απόλυτης τιμής και άρα μιας απόστασης στην πραγματική ευθεία R.
Θα δούμε ευθύς αμέσως ότι το ίδιο μπορεί να γίνει και στο διανυσματικό χώρο $R^n, n \in N$. Υπενθυμίζουμε ότι τα $n-$διανύσματα $e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,0...,0),....., e_n = (0,0,....,0,1)$ του R^n συνιστούν μια αλγεβρική βάση την κανονική βάση του R^n και ότι γενικεύουν την συνήθη ορθοκανονική βάση i, j, k $(i = e_1, j = e_2, k = e_3)$ του R^3. Το τυχόν διάνυσμα $x = (x_1,...,x_n) \in R^n$ γράφεται (μοναδικά) ως $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$. Για δύο διανύσματα $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ του R^3, είναι γνωστό ότι μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο τους $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \in R$.

Ο ορισμός αυτός μπορεί εύκολα να επεκταθεί και στον R^n για τυχόν $n \in N$. Έτσι ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $x = (x_1,...,x_n)$ και $y = (y_1,...,y_n)$ του R^n με τον ανάλογο τρόπο, δηλαδή:

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n \ \ (= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i).$$

Σημείωση: Στον R^n χρησιμοποιούμε συχνά και τον συμβολισμό, $\langle x, y \rangle$ αντί του $x \cdot y$.

Συνεχίζοντας την αναλογία με τον R^3 ορίζουμε ως μήκος η Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος $x = (x_1,...,x_n)$ τον μη αρνητικό πραγματικό,

$$|x| = \|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \ \ (= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}).$$

Το ζεύγος $(R^n, \| \ \|)$ ονομάζεται ο Ευκλείδειος χώρος διάστασης n.

Η ακόλουθη απλή πρόταση περιγράφει τις βασικές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

1.1. Πρόταση . Αν $x, y, z \in R^n$ και $\alpha, \beta \in R$ τότε έχουμε:

(ι) $(\alpha x + \beta y)\cdot z = \alpha(x\cdot z) + \beta(y\cdot z)$

(ιι) $x\cdot y = y\cdot x$

(ιιι) $x\cdot x \geq 0$

(ιν) $x\cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Η απόδειξη της πρότασης είναι απλή εφαρμογή του ορισμού του εσωτερικού γινομένου.

Αποδεικνύουμε τώρα μια <u>σημαντική ανισότητα</u>, την **ανισότητα Cauchy-Schwarz**

1.2. Πρόταση. Έστω $x, y \in R^n$ τότε $|x\cdot y| \leq \|x\|\cdot\|y\|$

(ή $|x\cdot y| \leq \left(\sqrt{x\cdot x}\right)\cdot\left(\sqrt{y\cdot y}\right)$ όπου $x = (x_1, ..., x_n)$ και $y = (y_1, ..., y_n)$)

Απόδειξη: Αν $x = 0$ ή $y = 0$ τότε η ανισότητα ισχύει τετριμμένα ως ισότητα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x \neq 0 \neq y$

(Ι) Έστω ότι $\|x\| = 1 = \|y\|$. Τότε ισχύει $|x_i y_i| \leq \dfrac{x_i^2 + y_i^2}{2}, i = 1, 2, ..., n$

Άρα $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 + y_i^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Επομένως στην περίπτωση αυτή ισχύει η ανισότητα.

(ΙΙ) Γενική περίπτωση: Θέτουμε $x_i^{'} = \dfrac{x_i}{\|x\|}$ και $y_i^{'} = \dfrac{y_i}{\|y\|}, 1 \leq i \leq n$.

Από την περίπτωση (Ι) έπεται ότι: $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^{'} y_i^{'}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\|x\|}\cdot\frac{y_i}{\|y\|}\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|}{\|x\|}\cdot\frac{|y_i|}{\|y\|} \leq 1$, εφόσον $\sum_{i=1}^{n} x_i^{'2} = 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i^{'2}$. Έπεται ότι $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|x\|\cdot\|y\|$

Άσκηση. Αποδείξτε ότι ισότητα ισχύει στην ανισότητα Cauchy-Schwarz αν και μόνο αν τα διανύσματα x και y είναι συγγραμικά. Δηλαδή υπάρχει $\lambda \in R$ με $y = \lambda x$

Λύση: Αν $y = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in R$, τότε εύκολα διαπιστώνουμε την ισότητα στην ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Υποθέτουμε ότι $|x\cdot y| = \|x\|\cdot\|y\|$. Αν ένα από τα x και y έστω $x = 0$ τότε θέτουμε $\lambda = 0$ και παρατηρούμε ότι $x = \lambda y$. Έτσι υποθέτουμε επί πλέον ότι $x \neq 0$ και $y \neq 0$. Αν $x = (x_1, ..., x_n)$ και $y = (y_1, ..., y_n)$ τότε η ισότητα $|x\cdot y| = \|x\|\cdot\|y\|$ γράφεται ισοδύναμα ως $\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\|x\|}\cdot\frac{y_i}{\|y\|}\right| = 1$ και θέτοντας $x_i^{'} = \dfrac{x_i}{\|x\|}, y_i^{'} = \dfrac{y_i}{\|y\|}$ γράφεται ως $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}\cdot y_i^{'}\right| = 1$ όπου $\sum_{i=1}^{n} x_i^{'2} = 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i^{'2}$.

Επομένως $1 = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}\cdot y_i^{'}\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{'}\cdot y_i^{'}\right| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{'2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^{'2} = 1$ (1)

Συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $x_1^{'}y_1^{'},....,x_n^{'}y_n^{'}$ είναι <u>ομόσημοι</u> αφού ισχύει η ισότητα στην τριγωνική ανισότητα, δηλαδή $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}\cdot y_i^{'}\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{'}\cdot y_i^{'}\right|$. Επίσης από την (1) έπεται ότι αναγκαία: $\left|x_i^{'}y_i^{'}\right| = \frac{1}{2}x_i^{'2} + \frac{1}{2}y_i^{'2}, i = 1,2,...,n$ (2)

(α) Αν το κοινό πρόσημο των αριθμών $x_1^{'}y_1^{'},....,x_n^{'}y_n^{'}$ είναι θετικό τότε οι ισότητες (2) συμπεραίνουν ότι $x_i^{'}y_i^{'} = \frac{1}{2}\left(x_i^{'2} + y_i^{'2}\right) \Leftrightarrow \left(x_i^{'} - y_i^{'}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_i^{'} = y_i^{'}$ για κάθε $i = 1,2,..,n$ ή $\frac{x_i}{\|x\|} = \frac{y_i}{\|y\|} \Leftrightarrow x_i = \frac{\|x\|}{\|y\|}\cdot y_i \Leftrightarrow x = \frac{\|x\|}{\|y\|}\cdot y$ και $\lambda = \frac{\|x\|}{\|y\|}$.

(β) Αν το κοινό πρόσημο των $x_1^{'}y_1^{'},....,x_n^{'}y_n^{'}$ είναι αρνητικό τότε βρίσκουμε ότι $-x_i^{'}y_i^{'} = \frac{1}{2}\left(x_i^{'2} + y_i^{'2}\right) \Leftrightarrow \left(x_i^{'} + y_i^{'}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_i^{'} = -y_i^{'}$ για κάθε $i = 1,2,..,n$ συνεπώς $\frac{x_i}{\|x\|} = -\frac{y_i}{\|y\|} \Leftrightarrow x_i = -\frac{\|x\|}{\|y\|}\cdot y_i \Leftrightarrow x = -\frac{\|x\|}{\|y\|}\cdot y$ και $\lambda = -\frac{\|x\|}{\|y\|}$.

Παρατηρήση Αν $x_1,...,x_n \in R$ τότε $|x_1 + ... + x_n| = |x_1| + ... + |x_n| \Leftrightarrow$ οι $x_1,...,x_n$ είναι ομόσημοι.

Πράγματι για $n = 2$ έχουμε ότι $|x_1 + x_2| = |x_1| + |x_2| \Leftrightarrow \left(|x_1 + x_2|\right)^2 = \left(|x_1| + |x_2|\right)^2 \Leftrightarrow$ $\left(x_1 + x_2\right)^2 = \left(|x_1| + |x_2|\right)^2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| \Leftrightarrow x_1x_2 = |x_1x_2| \geq 0$ συνεπώς οι x_1, x_2 είναι ομόσημοι.

Αντίστροφα αν $x_1x_2 \geq 0$ τότε προφανώς $|x_1 + x_2| = |x_1| + |x_2|$.

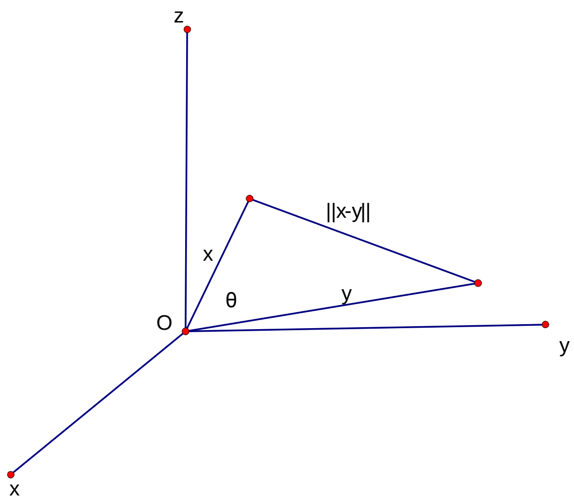
Το γενικότερο αποτέλεσμα έπεται τώρα με επαγωγή στο πλήθος n των αριθμών

<u>Γεωμετρική σημασία της ανισότητας Cauchy-Schwarz</u>**.**

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται ότι για μη μηδενικά διανύσματα x και y στον R^n το πηλίκο $\frac{x\cdot y}{\|x\|\cdot\|y\|}$ ανήκει στο διάστημα $[-1,1]$ δηλαδή $-1 \leq \frac{x\cdot y}{\|x\|\cdot\|y\|} \leq 1$.

Έτσι ορίζεται η γωνία θ μεταξύ των x και y με τον τύπο $\cos\theta = \frac{x\cdot y}{\|x\|\cdot\|y\|}, \theta \in [0,\pi]$.

Εξάλλου αν x και y ανήκουν στον R^3 τότε η ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται από τον <u>νόμο των συνημίτονων</u> της τριγωνομετρίας:



Από τον νόμο των συνημίτονων για το τρίγωνο με κορυφή το O(0,0,0) και πλευρές τα διανύσματα x και y βρίσκουμε ότι :

$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\theta$ (1) όπου θ η γωνία των x και y. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου η (1) μετά από πράξεις γίνεται: $x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cos\theta$.

Συνεπώς $|\cos\theta| = \dfrac{|x \cdot y|}{\|x\| \cdot \|y\|} \le 1 \Leftrightarrow |x \cdot y| \le \|x\| \cdot \|y\|$.

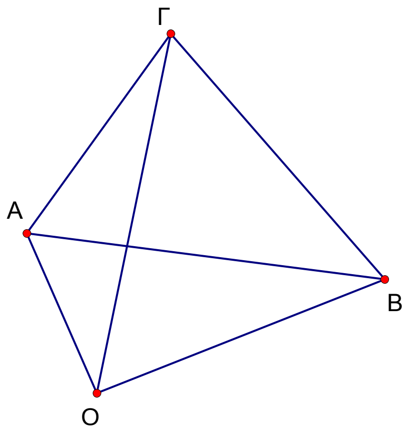
Αν τα x και y είναι συγγραμμικά, δηλαδή αν $y = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in R$ τότε $\theta = 0$ ή π, άρα $|\cos\theta| = 1$ και έτσι $|x \cdot y| = \|x\| \cdot \|y\|$.

Αν τα x και y δεν είναι συγγραμμικά (δηλαδή γραμμικά ανεξάρτητα) τότε $\theta \in (0, \pi)$ και άρα $|\cos\theta| < 1$, επομένως$|x \cdot y| < \|x\| \cdot \|y\|$

Έτσι καταλήγουμε στον τύπο για το εσωτερικό γινόμενο των μη μηδενικών διανυσμάτων $x, y \in R^n$, $x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta$, όπου $\theta \in [0, \pi]$ η μοναδική γωνία μεταξύ x και y.

Δύο διανύσματα $x, y \in R^n - \{0\}$ λέγονται ορθογώνια αν $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Παράδειγμα. Έστω ΑΒΓ το τρίγωνο με κορυφές $\mathrm{A}(1,1,8), \mathrm{B}(4,-3,-4)$ και $\Gamma(-3.1,5)$. Να βρεθεί η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$=α του τριγώνου. Παρατηρούμε ότι η ζητουμένη γωνία είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ όπου $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (4,-3,-4) - (1,1,8) = (3,-4,-12)$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-3,1,5) - (1,1,8) = (-4,0,-3)$ και $\mathrm{O} = (0,0,0) \in R^3$. Επομένως

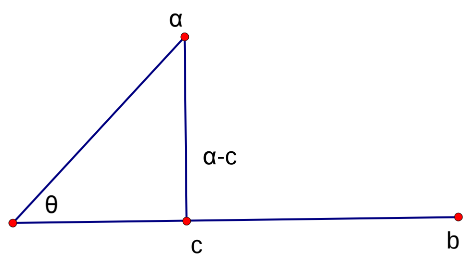


$$\cos a = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}{\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| \cdot \|\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\|} = \frac{3 \cdot (-4) + (-4) \cdot 0 + (-12) \cdot (-3)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-12)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{24}{\sqrt{169} \cdot \sqrt{25}} = \frac{24}{65}.$$

<u>Προβολές</u>

Έστω $a, b \in R^3$ μη μηδενικά διανύσματα όπως στο σχήμα



Θα υπολογίσουμε το διάνυσμα <u>προβολή c</u> του α επί του b με χρήση του εσωτερικού γινομένου.

Παρατηρούμε ότι $c = tb$ για κάποιο $t \in R$. Επειδή το διάνυσμα $a - c = a - tb$ είναι ορθογώνιο προς το b έχουμε

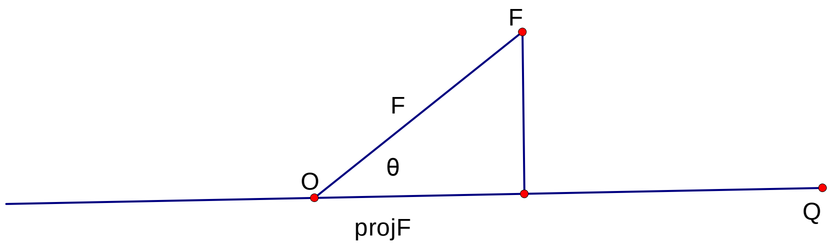
$(a-tb)\cdot b = 0 \Leftrightarrow a\cdot b - tb\cdot b = 0 \Leftrightarrow a\cdot b - t\|b\|^2 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{a\cdot b}{\|b\|^2}$. Συνεπώς

$$c = tb = \left(\frac{a\cdot b}{\|b\|^2}\right)b$$

Το διάνυσμα c συμβολίζεται με $proj_b a$, συνεπώς $proj_b a = \left(\dfrac{a\cdot b}{\|b\|^2}\right)b$

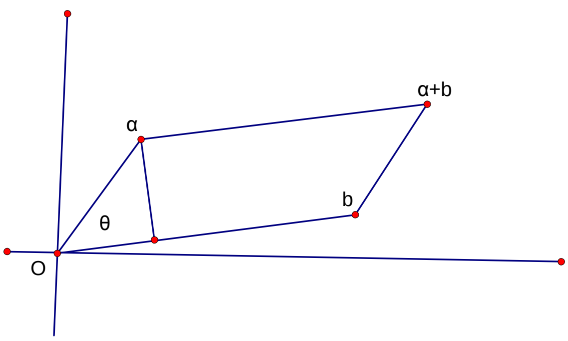
Παρατηρούμε ότι $proj_b a = \left(\dfrac{a\cdot b}{\|b\|^2}\right)b = \left(\dfrac{a\cdot b}{\|b\|}\right)\dfrac{b}{\|b\|}$ και το διάνυσμα $\dfrac{b}{\|b\|}$ είναι ομόρροπο με το b και έχει μήκος ίσο με 1. Ο αριθμός $\dfrac{a\cdot b}{\|b\|}$ ονομάζεται και <u>βαθμωτή προβολή</u> του a επί του b και συμβολίζεται με $comp_b a$. Έπεται ότι $comp_b a = \dfrac{a\cdot b}{\|b\|} = \dfrac{\|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos\theta}{\|b\|} = \|a\|\cdot\cos\theta$. Άρα το μήκος της προβολής του a επί του b ισούται με $|comp_b a| = \|a\|\cdot|\cos\theta|$

<u>Το έργο της δύναμης ως εσωτερικό γινόμενο</u>: Το έργο W που παράγεται από μια σταθερή δύναμη F η οποία δρα πάνω σε ένα αντικείμενο, το οποίο μετακινεί κατά μήκος της ευθείας (ε), από το σημείο O στο σημείο Q ορίζεται ως το εσωτερικό γινόμενο $W = \vec{F}\cdot\overrightarrow{OQ}$.



Επομένως $W = \|F\|\cdot\|OQ\|\cdot\cos\theta = (\|F\|\cdot\cos\theta)\cdot\|OQ\| = (comp_{OQ}F)\cdot\|OQ\|$

<u>Το εμβαδόν παραλληλογράμμου</u>:
Αν $a,b \in R^2 - \{(0,0)\}$, το παραλληλόγραμμο που παράγεται από τα διανύσματα a και b είναι το σύνολο $\Pi = \{\lambda a + \mu b : 0 \le \lambda, \mu \le 1\} \subseteq R^2$. Από το σχήμα έπεται ότι το εμβαδόν Ε του Π ισούται με $E = \|b\|\cdot\|a\|\cdot\sin\theta = \|b\|\cdot\|a\|\sqrt{1-\cos^2\theta} =$

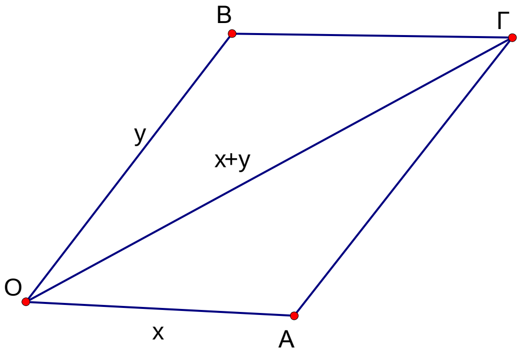


$$\|b\|\cdot\|a\|\sqrt{1-\left(\frac{a\cdot b}{\|a\|\cdot\|b\|}\right)^2} =$$

$$\frac{\|b\|\cdot\|a\|\sqrt{\|a\|^2\cdot\|b\|^2-(a\cdot b)^2}}{\|a\|\cdot\|b\|} =$$

$$\sqrt{\|a\|^2\cdot\|b\|^2-(a\cdot b)^2} \quad (1)$$

Αν $a=(a_1,a_2)$ και $b=(b_1,b_2)$ τότε επειδή ισχύει η ταυτότητα του Lagrange: $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2$. Έπεται σε συνδυασμό με την (1) ότι $\mathrm{E}=|a_1b_2-a_2b_1|=\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\right|$. Το ανάλογο αυτού του αποτελέσματος ισχύει και στις τρείς διαστάσεις, η απόδειξή του αφήνεται ως άσκηση.
Σημειώνουμε ότι η γενική μορφή της ταυτότητας Lagrange θα αποδειχθεί λίγο αργότερα (στην παράγραφο όπου ορίζεται το Εξωτερικό γινόμενο στον R^3).
Μια πολύ ενδιαφέρουσα συνέπεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz είναι η τριγωνική ανισότητα: $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ για κάθε $x,y\in R^n$. Η ανισότητα αυτή είναι γεωμετρικά προφανής στην περίπτωση του $R^2\,(n=2)$. Αφού η κάθε πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη του αθροίσματος των δύο άλλων. Γεωμετρικά έπεται ότι $\|\mathrm{O\Gamma}\|\le\|\mathrm{OA}\|+\|\mathrm{OB}\|$.



Δίνουμε τώρα μια αναλυτική απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας που βασίζεται στην ανισότητα Cauchy-Schwarz.

1.3. Πρόταση: Αν $x,y\in R^n$ τότε $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$.

Απόδειξη: Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε: $x\cdot y\le|x\cdot y|\le\|x\|\cdot\|y\|$
Έπεται ότι,
$\|x+y\|^2=(x+y)\cdot(x+y)=x\cdot x+x\cdot y+y\cdot x+y\cdot y=\|x\|^2+2x\cdot y+\|y\|^2\le$
$=\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$. Άρα παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες συμπεραίνουμε την ζητούμενη ανισότητα.

Άσκηση: Αποδείξτε ότι $\big|\|x\|-\|y\|\big|\le\|x-y\|$ για $x,y\in R^n$

Απόδειξη: Γράφουμε $x=(x-y)+y$ (1), $y=(y-x)+x$ (2)
Από την (1) έπεται ότι $\|x\|\le\|x-y\|+\|y\|$ και άρα $\|x\|-\|y\|\le\|x-y\|$ (3)
Ανάλογα από την (2) έπεται ότι $\|y\|\le\|y-x\|+\|x\|$ και συνεπώς $\|y\|-\|x\|\le\|x-y\|$ (4)
Από τις (3) και (4) έπεται η ζητούμενη ανισότητα.

Παρατήρηση: Συνοψίζοντας έχουμε ότι οι βασικές ιδιότητες της συνάρτησης «μήκους» $\|\cdot\|:R^n\to R$ που ορίσαμε στον R^n είναι οι ακόλουθες:
(α) $\|x\|\ge 0$ και $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$
(β) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|, \lambda\in R, x\in R^n$ και
(γ) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|, x,y\in R^n$ (τριγωνική ανισότητα).

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μήκους η Ευκλείδεια νόρμα στον R^n έχει ιδιότητες ανάλογες με αυτές της απόλυτης τιμής στον R (εξάλλου αν $n=1$ τότε $\|x\|=|x|$ για κάθε $x\in R$). Έτσι μπορούμε να ορίσουμε ως απόσταση μεταξύ δύο σημείων x και y του R^n το μήκος του διανύσματος $x-y$, δηλαδή $d(x,y)=\|x-y\|$. Η έννοια αυτή της απόστασης είναι που μας επιτρέπει, να ορίσουμε τις έννοιες, του ορίου ακολουθίας και γενικότερα, του ορίου συνάρτησης στον R^n κατά αναλογία με το R ($n=1$).

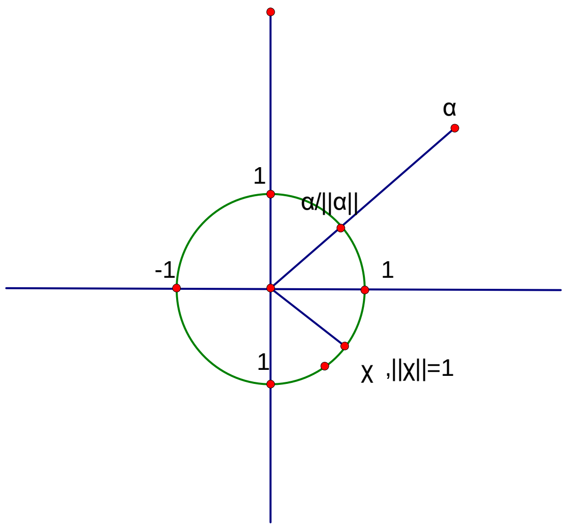
Παραδείγματα

1.Έστω $a=(a_1,...,a_n)\in R^n$. Να υπολογιστεί το $\sup\{a_1x_1+...+a_nx_n : x_1^2+...+x_n^2=1\}$.

Λύση : Από την ανισότητα C-S έχουμε: $a\cdot x\le|a\cdot x|\le\|a\|\cdot\|x\|\le\|a\|$, εφόσον $\|x\|=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}=1$. Έτσι το σύνολο $\mathrm{A}=\{a_1x_1+...+a_nx_n : x_1^2+...+x_n^2=1\}$ που δεν είναι κενό είναι άνω φραγμένο από τον αριθμό $\|a\|$ και συνεπώς $\sup\mathrm{A}=\mathrm{M}\le\|a\|$.

Αν $a=0\Leftrightarrow a_i=0$ για κάθε $i=1,2,...,n$ τότε βέβαια $\mathrm{A}=\{0\}$ και άρα $\mathrm{M}=\sup\mathrm{A}=0$.

Υποθέτουμε ότι $a\ne0$, τότε θέτουμε $x=\dfrac{a}{\|a\|}$ και παρατηρούμε ότι $\|x\|=\dfrac{\|a\|}{\|a\|}=1$, άρα



$a\cdot x=a\cdot\dfrac{a}{\|a\|}=\dfrac{\|a\|^2}{\|a\|}=\|a\|$. Έπεται ότι $\max\mathrm{A}=\|a\|$ δηλαδή $\mathrm{M}=\|a\|=\sqrt{a_1^2+...+a_n^2}$.

Σημείωση. Η βασική ιδέα εδώ είναι ότι ισότητα έχουμε στην ανισότητα C-S ακριβώς αν τα διανύσματα a και x είναι συγγραμμικά, δηλαδή αν $x=\lambda a$ για κάποιο $\lambda\in R$. Από εδώ προκύπτει και η τιμή του $\lambda\left(=\dfrac{1}{\|a\|}\right)$. (Εφόσον θα έχουμε $|x\cdot a|=|\lambda a\cdot a|=|\lambda|a\cdot a=|\lambda|\|a\|^2=\|x\|\cdot\|a\|$ $=1\cdot\|a\|=\|a\|\Rightarrow|\lambda|\|a\|^2=\|a\|\Rightarrow|\lambda|=\dfrac{1}{\|a\|}$)

Με παρόμοιους συλλογισμούς προκύπτει ότι: $minA=-||a||$.

2)Έστω $a=(a_1,...,a_n)\in R^n$. Να υπολογιστεί το $\sup\{a_1x_1+...+a_nx_n : \lambda_1x_1^2+...+\lambda_nx_n^2=1\}$, όπου $\lambda_i>0, i=1,2,...,n$ είναι δοσμένοι θετικοί αριθμοί.

Λύση. Αν $a=0\Leftrightarrow a_i=0$ για κάθε $i=1,2,...,n$ τότε το σύνολο $\mathrm{A}=\{a_1x_1+...+a_nx_n : \lambda_1x_1^2+...+\lambda_nx_n^2=1\}$ είναι προφανώς το μονοσύνολο $\mathrm{A}=\{0\}$ και συνεπώς $\sup\{0\}=0$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $a\ne0$. Θέτουμε

$y_i = \sqrt{\lambda_i} \cdot x_i = x_i \cdot \sqrt{\lambda_i}, i = 1, 2, ..., n \Leftrightarrow x_i = \dfrac{y_i}{\sqrt{\lambda_i}}, i = 1, 2, ..., n$. Έπεται ότι:
$y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2 = \left(x_1\sqrt{\lambda_1}\right)^2 + \left(x_2\sqrt{\lambda_2}\right)^2 + ... + \left(x_n\sqrt{\lambda_n}\right)^2 = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2 = 1$.
Παρατηρούμε ότι, $a_1 x_1 + ... + a_n x_n = a_1 \dfrac{y_1}{\sqrt{\lambda_1}} + ... + a_n \dfrac{y_n}{\sqrt{\lambda_n}} = \dfrac{a_1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot y_1 + ... + \dfrac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot y_n$. Άρα ζητούμε το supremum των ποσοτήτων $\dfrac{a_1}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot y_1 + ... + \dfrac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot y_n$ κάτω από την συνθήκη $y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2 = 1$. Από την προηγουμένη άσκηση το supremum αυτό ισούται με $\left\| \left(\dfrac{a_1}{\sqrt{\lambda_1}}, ..., \dfrac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right) \right\| = \sqrt{\dfrac{a_1^2}{\lambda_1} + ... + \dfrac{a_n^2}{\lambda_n}}$

Ασκήσεις

(1) Έστω $x, y \in R^n$ με $y \neq 0$. Αποδείξτε ότι $x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\|$ αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \geq 0$ ώστε $x = \lambda y$.

(2) Έστω $x_1, ..., x_m \in R^n$. Αποδείξτε ότι,

$$\|x_1 + ... + x_m\| \leq \|x_1\| + ...\|x_m\|.$$

Επιπλέον αποδείξτε ότι ισότητα ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει $y \neq 0$ και $\lambda_\kappa \geq 0, \kappa = 1, 2, ..., m$ ώστε $x_\kappa = \lambda_\kappa y, \kappa = 1, 2, ..., m$. [Υπόδειξη Εξετάστε πρώτα την περίπτωση $m = 2$ και προχωρήστε με επαγωγή].

(3) Αν $x, y \in R^n$, αποδείξτε ότι:
(ι) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$.
(ιι) $\|x + y\| \cdot \|x - y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$, με ισότητα αν και μόνο αν $x \cdot y = 0$
(ιιι) Συσχετίστε την ταυτότητα (ι) και την ανισότητα (ιι) με παραλληλόγραμμα.

(*) (4)Μια ορθοκανονική βάση του R^n είναι μια βάση $\{a_1, ..., a_n\}$ του R^n ώστε $a_\kappa \cdot a_\lambda = \delta_{\kappa\lambda}$, όπου $\delta_{\kappa\lambda} = 0$ αν $\kappa \neq \lambda$ και $\delta_{\kappa\lambda} = 1$ αν $\kappa = \lambda$, $\kappa, \lambda = 1, 2, ..., n$ (το δέλτα του Kronecker). Αποδείξτε ότι:
(ι) Η συνήθης βάση $\{e_1, ..., e_n\}$ του R^n είναι ορθοκανονική.
(ιι) Έστω $n = 4$ και $a_1 = \dfrac{1}{5}\left(3e_1 + 4e_3\right)$, $a_2 = \dfrac{1}{5}\left(4e_2 - 3e_4\right)$, $a_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{10}\left(-4e_1 + 3e_2 + 3e_3 + 4e_4\right)$. Δείξτε ότι τα a_1, a_2, a_3 είναι ανά δύο ορθογώνια διανύσματα νόρμας 1. Βρείτε ένα διάνυσμα a_4 ώστε τα a_1, a_2, a_3, a_4, σχηματίζουν μια ορθοκανονική βάση του R^4