Ακολουθίες στον R^n

1.4. Ορισμός Έστω (x_k) ακολουθία διανυσμάτων στον R^n και $x \in R^n$, θα λέμε ότι η ακολουθία (x_k) συγκλίνει στο x και θα γράφουμε, $\overset{\|\cdot\|}{\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x}$ ή $x_k \overset{\|\cdot\|}{\to} x$ αν η ακολουθία πραγματικών $\|x_k - x\| \to 0$

Ισοδύναμα: $\overset{\|\cdot\|}{\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x} \Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0 = k_0(\varepsilon) \in N : k \geq k_0 \Rightarrow \|x_k - x\| < \varepsilon$.

Παραδείγματα: 1) Έστω $x_k = \left(\frac{1}{2^k}, \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right), k \geq 1$ ακολουθία στον R^2, τότε $x_k \overset{\|\cdot\|}{\to} (0, e)$.

Πράγματι, $\|x_k - (0,e)\| = \left\|\left(\frac{1}{2^k}, \left(1+\frac{1}{k}\right)^k - e\right)\right\| = \sqrt{\frac{1}{2^{2k}} + \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k - e\right)^2}$

Όμως $\frac{1}{2^{2k}} + \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k - e\right)^2 \to 0 + 0$ εφόσον $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \to e$.

Συνεπώς $\|x_k - (0,e)\| \to 0 \Leftrightarrow x_k \overset{\|\cdot\|}{\to} (0,e)$.

(2) Η ακολουθία $y_k = \left((-1)^k, \frac{1}{k}\right)$ του R^2 δεν είναι συγκλίνουσα. Πράγματι αν υπήρχε $y \in R^2 : y_k \overset{\|\cdot\|}{\to} y$ τότε η ποσότητα $\|y_k - y\|$ θα γινόταν οσοδήποτε μικρή για μεγάλο k, π.χ. $\|y_k - y\| < \frac{1}{4}$ για μεγάλο k. Έπεται τότε από την τριγωνική ανισότητα ότι για μεγάλα k και λ με $k \neq \lambda$ θα είχαμε, $\|y_k - y_\lambda\| \leq \|y_k - y\| + \|y_\lambda - y\| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Όμως $\|y_k - y_{k+1}\|^2 = \left\|\left((-1)^k - (-1)^{k+1}, \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right\|^2 =$

$$= \begin{cases} \left\|\left(+2, \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right\|^2 = (+2)^2 + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)^2 > 4 \text{ αν } k \text{ άρτιος} \\ \left\|\left(-2, \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right\|^2 = (-2)^2 + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)^2 > 4 \text{ αν } k \text{ περιττός} \end{cases}$$

Έτσι $\|y_k - y_{k+1}\| > 2$ για κάθε $k \in N$. Άρα η (y_k) δεν είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον R^2.

1.5Πρόταση Έστω $x_k=\left(x_k^1,...,x_k^n\right), k\ge 1$ ακολουθία στον R^n και $x=\left(x^1,...,x^n\right)\in R^n$. Τότε, $x_k \underset{k\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|}{\to}} x \Leftrightarrow x_k^\lambda \underset{k\to+\infty}{\to} x^\lambda$ για κάθε $\lambda=1,2,...,n$.

Απόδειξη: Θα χρειαστούμε την ακόλουθη ανισότητα:

Αν $a=\left(a_1,...,a_n\right)\in R^n$ τότε, $\max\limits_{1\le k\le n}|a_k|\le\|a\|\le\sqrt{n}\cdot\max\limits_{1\le k\le n}|a_k|$

Πράγματι, έστω $|a_\lambda|=\max\left(|a_1|,...,|a_n|\right)$ τότε $|a_\lambda|\le\sqrt{a_1^2+...+a_n^2}=\|a\|$ ή $\max\limits_{1\le k\le n}|a_k|\le\|a\|$.

Επίσης, $a_1^2+...+a_n^2\le\underbrace{|a_\lambda|^2+....+|a_\lambda|^2}_{n-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}=n|a_\lambda|^2\Rightarrow\|a\|\le\sqrt{n}\cdot\max\limits_{1\le k\le n}|a_k|$

Προχωρούμε τώρα στην απόδειξη της πρότασης. Παρατηρούμε ότι για κάθε $k\ge 1$, $\max\limits_{1\le\lambda\le n}\left|x_k^\lambda-x^\lambda\right|\le\|x_k-x\|\le\sqrt{n}\cdot\max\limits_{1\le\lambda\le n}\left|x_k^\lambda-x^\lambda\right|$. Από την ανισότητα αυτή έπεται αμέσως το συμπέρασμα.

Παρατηρήσεις (1). Η προηγούμενη πρόταση μας λέει ότι μια ακολουθία $\left(x_k\right)=\left(x_k^1,...,x_k^n\right), k\ge 1$ του R^n συγκλίνει στο $\left(x^1,...,x^n\right)\Leftrightarrow$ συγκλίνει κατά συντεταγμένες.

Έτσι ο έλεγχος της σύγκλισης μιας ακολουθίας $\left(x_k\right)=\left(x_k^1,...,x_k^n\right), k\ge 1$ του R^n ανάγεται στην σύγκλιση των « συνιστωσών» ακολουθιών πραγματικών αριθμών $\left(x_k^\lambda\right), k\ge 1,\ \lambda=1,2,....,n$

Για παράδειγμα η ακολουθία $y_k=\left(\left(-1\right)^k,\frac{1}{k}\right), k\ge 1$ του R^2 (βλέπε παράδειγμα (2) ανωτέρω), δεν είναι συγκλίνουσα καθώς , όπως γνωρίζουμε, η ακολουθία $\left(-1\right)^k, k\ge 1$ δεν είναι συγκλίνουσα στο R.

(2) Αν μια ακολουθία $\left(x_k\right)$ είναι συγκλίνουσα στον Ευκλείδειο χώρο R^n, τότε το όριό της είναι μοναδικό. Αυτό έπεται εύκολα χρησιμοποιώντας τριγωνική ανισότητα

<u>Άλγεβρα συγκλινουσών ακολουθιών στον $\mathbf{R^n}$:</u>

Αν $x_k\overset{\|\cdot\|}{\to}x$ και $y_k\overset{\|\cdot\|}{\to}y$ στον R^n τότε:

(α) $x_k+y_k\overset{\|\cdot\|}{\to}x+y$

(β) $\lambda x_k\overset{\|\cdot\|}{\to}\lambda x$ για κάθε $\lambda\in R$ και

(γ) $x_k\cdot y_k\overset{\|\cdot\|}{\to}x\cdot y$ (εσωτερικό γινόμενο)

Η απόδειξη των (α) και (β) είναι ανάλογη με την αντίστοιχη ιδιότητα των πραγματικών ακολουθιών και έτσι αφήνεται ως άσκηση. (Μπορεί να συναχθεί ακόμη από την πρόταση 1.5). Η απόδειξη της (γ) έπεται από την πρόταση 1.5 και την αντίστοιχη ιδιότητα, για το όριο του γινομένου πραγματικών ακολουθιών.

<u>Φραγμένες ακολουθίες στον $\mathbf{R^n}$</u>

1.6 Ορισμός. Μια ακολουθία $(x_k) \subseteq R^n$ λέγεται φραγμένη αν υπάρχει $\mathrm{M} > 0 : \|x_k\| \le \mathrm{M}$ για κάθε $k \ge 1$.

1.7 Πρόταση. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ του R^n είναι φραγμένη (αλλά όχι το αντίστροφο).

Απόδειξη Έστω $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x \Leftrightarrow \|x_k - x\| \to 0$. Η μηδενική ακολουθία πραγματικών αριθμών $\|x_k - x\|, k \ge 1$ είναι βέβαια φραγμένη, άρα υπάρχει $c > 0 : 0 \le \|x_k - x\| \le c$ για κάθε $k \ge 1$. Από την τριγωνική ανισότητα συμπεραίνουμε ότι
$\|x_k\| = \|(x_k - x) + x\| \le \|x_k - x\| + \|x\| \le c + \|x\|$. Θέτουμε $\mathrm{M} = c + \|x\|$

Το παράδειγμα της ακολουθίας $y_k = \left((-1)^k, \dfrac{1}{k} \right), k \ge 1$ (του παραδείγματος (2) ανωτέρω) η οποία <u>δεν</u> είναι συγκλίνουσα στον R^2, αλλά είναι φραγμένη. (Εφόσον $\|y_k\|^2 = (-1)^{2k} + \dfrac{1}{k^2} = 1 + \dfrac{1}{k^2} \le 2 \Leftrightarrow \|y_k\| \le \sqrt{2}$, για κάθε $k \ge 1$) μας πείθει ότι το αντίστροφο της προηγουμένης πρότασης <u>δεν</u> ισχύει .

Το θεμελιώδες θεώρημα του Bolzano για την πραγματική ευθεία ισχύει γενικότερα και για τον Ευκλείδειο χώρο R^n.

1.8 Θεώρημα (Bolzano). Έστω $x_k = (x_k^1, ..., x_k^n), k \ge 1$ φραγμένη ακολουθία στοιχείων του R^n τότε η (x_k) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στον R^n.

Απόδειξη: Υποθέτουμε για απλότητα ότι $n = 2$ έτσι $x_k = (x_k^1, x_k^2), k \ge 1$. Επειδή, $\max\limits_{1 \le \lambda \le 2} |x_k^\lambda| \le \|x_k\|$ για κάθε $k \in N$ έπεται ότι οι δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών (x_k^1) και (x_k^2) είναι φραγμένες. Έστω $(x_{k_l}^1)$ συγκλίνουσα υπακολουθία της (x_k^1) ώστε $x_{k_l}^1 \to x^1$ (θεώρημα Bolzano για το R).

Έπεται ότι η υπακολουθία $(x_{k_l}^2)_{l \ge 1}$ της (x_k^2) που είναι βέβαια φραγμένη έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία έστω $(x_{k_{l_m}}^2)_{m \ge 1}$ ώστε $x_{k_{l_m}}^2 \to x^2$ (επίσης με το θεώρημα Bolzano). Είναι τώρα σαφές ότι $x_{k_{l_m}}^1 \to x^1$ και από την πρόταση 1.5, έπεται ότι η υπακολουθία $(x_{k_{l_m}}^1, x_{k_{l_m}}^2)_{m \ge 1}$ της (x_k) είναι συγκλίνουσα και $x_{k_{l_m}} \underset{m \to +\infty}{\overset{\|\cdot\|}{\to}} x = (x^1, x^2)$.

Όπως και στην περίπτωση του R (ή ακόμη χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.5) , αποδεικνύεται και η ακόλουθη

1.9 Πρόταση: (α) Αν $(x_k) \subset R^n, x \in R^n$ και $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ τότε κάθε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_k) συγκλίνει στο ίδιο όριο ($x_{k_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} x$).

(β) Αν $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ τότε $\|x_k\| \to \|x\|$ στο R. ($\left|\|x_k\| - \|x\|\right| \le \|x_k - x\|$).

Παρατήρηση: Μπορούμε να ορίσουμε και την έννοια της ακολουθίας Cauchy (ή βασικής ακολουθίας) στον $\left(R^n, \|\cdot\|\right)$ και να αποδείξουμε (χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.5) ότι ο $\left(R^n, \|\cdot\|\right)$ είναι <u>πλήρης</u> χώρος, δηλαδή ότι κάθε ακολουθία Cauchy $(x_k) \subset R^n$ είναι συγκλίνουσα στον R^n. Ακόμη να αποδείξουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι Cauchy κλπ.

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της σειράς στον R^n και να αποδείξουμε αντίστοιχα αποτελέσματα όπως στον R. Για παράδειγμα η σειρά του R^2, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, όπου $x_n = \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{n^2}\right), n \ge 1$ είναι συγκλίνουσα στον R^2, εφόσον οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty, \left(= \frac{\pi^2}{6}\right)$. Συνεπώς $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \left(1, \frac{\pi^2}{6}\right)$ στον R^2.

Οι παραπάνω ορισμοί και αποδείξεις είναι ανάλογοι με τους αντίστοιχους ορισμούς και αποδείξεις στο R

Παραδείγματα:

1)Να υπολογιστούν τα όρια, αν υπάρχουν, $\lim_{n\to+\infty}\left(\eta\mu n, \sigma\upsilon\nu\frac{n\pi}{2}\right)$ και $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n^3+1}}{3^n}, \frac{\sqrt[n]{n^5-2n^4+5}}{2^n}\right)$

Λύση: Η ακολουθία $\left(\eta\mu n, \sigma\upsilon\nu\frac{n\pi}{2}\right), n \ge 1$ <u>δεν</u> είναι συγκλίνουσα στο R^2, εφόσον η ακολουθία πραγματικών $\sigma\upsilon\nu\frac{n\pi}{2}, n \ge 1$ <u>δεν</u> είναι συγκλίνουσα στο R. Πράγματι οι υπακολουθίες $\sigma\upsilon\nu\frac{4n\pi}{2} = \sigma\upsilon\nu(2n\pi) = 1, n \ge 1$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{(2n+1)\pi}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0, n \ge 1$ της ακολουθίας $\sigma\upsilon\nu\frac{n\pi}{2}, n \ge 1$ συγκλίνουν προφανώς σε διαφορετικά όρια.

Για την δεύτερη ακολουθία παρατηρούμε ότι: $\frac{\sqrt[n]{n^3+1}}{3^n} \to 0$ αφού $\sqrt[n]{n^3+1} \to 1$ και $3^n \to +\infty$ και ακόμη ότι $\frac{\sqrt[n]{n^5-2n^4+5}}{2^n} \to 0$ αφού $\sqrt[n]{n^5-2n^4+5} \to 1$ και $2^n \to +\infty$.

Έπεται ότι $\left(\dfrac{\sqrt[n]{n^3+1}}{3^n},\dfrac{\sqrt[n]{n^5-2n^4+5}}{2^n}\right)\xrightarrow{\|\cdot\|}(0,0)$

2)Να ελεγχθεί αν οι ακολουθίες,

(α) $x_n=\left(\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[n]{n}}{n},\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}}\right)$ και

(β) $y_n=\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu n}{n},\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2-\eta\mu n}}\right)$ συγκλίνουν και να βρεθούν τα όριά τους οποτεδήποτε υπάρχουν.

Λύση: Αρκεί σε κάθε περίπτωση να ελέγξουμε τις συντεταγμένες ακολουθίες:

(α) Η ακολουθία $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[n]{n}}{n}\to 1$, εφόσον $\sqrt[n]{n}\to 1$ από το Λήμμα Cesaro.

Η ακολουθία $1\le 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\le \underbrace{1+1+...+1}_{n-\text{φορές}}=n$ άρα

$1\le\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}}\le\sqrt[n]{n}\to 1$ συνεπώς $\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}}\to 1$.

Έπεται ότι $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}(1,1)$.

(β) $\dfrac{|\sigma\upsilon\nu n|}{n}\le\dfrac{1}{n}\to 0\Rightarrow\dfrac{\sigma\upsilon\nu n}{n}\to 0$

Παρατηρούμε ότι $1\le 2-\eta\mu n\le 3$ για κάθε $n\ge 1$. Άρα $1\le\sqrt[n]{2-\eta\mu n}\le\sqrt[n]{3}\to 1$ έπεται ότι $\sqrt[n]{2-\eta\mu n}\to 1$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2-\eta\mu n}}\to\dfrac{1}{1}=1$

Άρα $y_n\xrightarrow{\|\cdot\|}(0,1)$.

Παρατηρήσεις 1) Η ακολουθία $\eta\mu n, n\ge 1$ δεν είναι συγκλίνουσα. Αν συνέκλινε έστω $\eta\mu n\to a\in R$, τότε θα είχαμε με χρήση γνωστών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων: $0=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\eta\mu(n+2)-\eta\mu n\right)=2\eta\mu 1\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma\upsilon\nu(n+1)$ και συνεπώς $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma\upsilon\nu n=0$ (1), επίσης $0=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sigma\upsilon\nu(n+2)-\sigma\upsilon\nu n\right)=-2\eta\mu 1\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\eta\mu(n+1)$, άρα $\lim\limits_{n\to+\infty}\eta\mu n=0$ (2).

Οι (1) και (2) όμως αντιφάσκουν με την γνωστή ταυτότητα $\eta\mu^2 n+\sigma\upsilon\nu^2 n=1, n\in N$.

Υπενθυμίζουμε ότι: Αν $x,y\in R$ τότε:

$\eta\mu x-\eta\mu y=2\eta\mu\dfrac{x-y}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{x+y}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu y=-2\eta\mu\dfrac{x-y}{2}\cdot\eta\mu\dfrac{x+y}{2}$

2) Περαιτέρω σημειώνουμε ότι η ακολουθία $\eta\mu n, n\ge 1$ είναι πυκνή στο $[-1,1]$. Αυτό έπεται από το θεώρημα του Kronecker.

(Αν $\theta \in R-Q$ δηλαδή άρρητος αριθμός τότε η ακολουθία $z_n = e^{2\pi in\theta}, n \geq 1$ είναι πυκνή στο μοναδιαίο κύκλο $T = \{z \in C : |z| = 1\}$. Για $\theta = \dfrac{1}{2\pi}$ έχουμε ότι η $z_n = e^{in} = \eta\mu n + i\sigma\upsilon\nu n$ είναι πυκνή στον κύκλο Τ, από όπου έπεται ότι οι ακολουθίες $\eta\mu n$ και $\sigma\upsilon\nu n, n \geq 1$ είναι πυκνές στο $[-1,1]$. Σημειώνουμε ότι Q συμβολίζει το σύνολο των ρητών στο R). (Πρβλ. το [6], σελίδα 96-101.)

3) Το Λήμμα Cesaro ισχυρίζεται ότι, αν (x_n) είναι ακολουθία πραγματικών ώστε $x_n \to x$, με $-\infty \leq x \leq +\infty$, τότε $\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \to x$.

Ασκήσεις

1)Βρείτε τα όρια αν υπάρχουν των ακολουθιών:

(α) $\left(\dfrac{1+n}{1-4n}, \dfrac{2^n}{n!}, (0,1)^n \right)$, (β) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{2^n}, \dfrac{1}{2^n - \sqrt[n]{n^8+5}}, \sqrt[n^3]{5} \right)$

(γ) $\left(1 - \dfrac{1}{3^n}, \dfrac{2n^5 + 10^n}{n!}, \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)^n \right)$, (δ) $\left(\dfrac{n^3}{5n^2 + 8n + 4}, \sqrt[n]{n^8 - 100n^7 + n^2} \right)$

2)(α) Διατυπώστε τον ορισμό της ακολουθίας Cauchy (βασικής ακολουθίας) στον Ευκλείδειο χώρο R^n και αποδείξτε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι Cauchy.
(β) Αποδείξτε ότι ο Ευκλείδειος χώρος είναι πλήρης, δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy είναι συγκλίνουσα.

3)(α) Μια σειρά $\sum_{\kappa=1}^{\infty} x_\kappa$ στον R^n λέγεται απόλυτα συγκλίνουσα, αν η σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \|x_\kappa\|$ είναι συγκλίνουσα. Αποδείξτε ότι κάθε απόλυτα συγκλίνουσα σειρά είναι και συγκλίνουσα.
(β) Αν η σειρά $\sum_{\kappa=1}^{\infty} x_\kappa$ είναι συγκλίνουσα, αποδείξτε ότι η ακολουθία $x_\kappa \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$

[Υπόδειξη για το (α): Η ακολουθία $S_m = x_1 + ... + x_m, m \geq 1$, των μερικών αθροισμάτων είναι Cauchy].

4) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση (απόλυτη και απλή) τις σειρές:

(α) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^n}, \dfrac{1}{n!} \right)$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n^2}{n^2 - 4n}, \dfrac{n}{5^n} \right)$ και (γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\sin n^3}{n^2}, \dfrac{1}{n^5}, \dfrac{(-1)^n}{n} \right)$.