

Συνεχείς συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Η Ευκλείδεια απόσταση που ορίσαμε στον R^n επιτρέπει (εκτός από τον ορισμό των ορίων συναρτήσεων και ακολουθιών) και τον ορισμό της συνέχειας συναρτήσεων της μορφής $f : A \subseteq R^n \rightarrow R^m$.

3.1 Ορισμός. Έστω, $f : A \subseteq R^n \rightarrow R^m$ συνάρτηση και $a \in A$, η f λέγεται συνεχής στο σημείο a , αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0 : x \in A$ και $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός αυτός είναι τελείως ανάλογος με τον ορισμό της συνέχειας στην περίπτωση $n = m = 1$ και ακόμη ότι είναι ισοδύναμος με τον ακόλουθο: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0 : f(A \cap B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$.

Η f λέγεται συνεχής στο A αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A .

3.2 Πρόταση. Έστω, $f : A \subseteq R^n \rightarrow R^m$ συνάρτηση και $a \in A$ ώστε a σημείο συσσώρευσης του A , τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

- (i) f συνεχής στο a
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Απόδειξη: Προφανής από τους ορισμούς των ορίων και της συνέχειας συναρτήσεων.

3.3 Παρατήρηση. Αν το $a \in A$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A (δηλαδή αν υπάρχει $\varepsilon > 0 : A \cap B(x, \varepsilon) = \{a\}$) τότε η f είναι προφανώς συνεχής στο a (γιατί;).

3.4 Θεώρημα. (Χαρακτηρισμός της συνέχειας με ακολουθίες).

Έστω, $f : A \subseteq R^n \rightarrow R^m$ και $a \in A$. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

- (i) f είναι συνεχής στο a
- (ii) Για κάθε ακολουθία $(x_k) \subseteq A$ με $x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a$ έπεται ότι $f(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(a)$.

Απόδειξη: Η απόδειξη αυτή είναι ανάλογη με την απόδειξη του χαρακτηρισμού των ορίων συναρτήσεων με ακολουθίες (θεώρημα 2.16). Μια άλλη απόδειξη προκύπτει συνδυάζοντας το θεώρημα 2.16 την πρόταση 3.2 και την παρατήρηση 3.3.

3.5 Θεώρημα. Έστω, $f, g : A \subseteq R^n \rightarrow R^m$ συναρτήσεις συνεχείς στο σημείο $a \in A$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) Οι συναρτήσεις $f + g$, λf , ($\lambda \in R$), $f \cdot g$ (εσωτερικό γινόμενο των f και g) είναι συνεχείς στο a . Έπεται ιδιαίτερα ότι αν $m = 1$ τότε η πραγματική συνάρτηση $f \cdot g$ είναι συνεχής στο a .

- (ii) Αν $m = 1$ και $g(a) \neq 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0 : g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A \cap B(a, \delta)$

και η συνάρτηση $\frac{1}{g}$ (ορισμένη στο $A \cap B(a, \delta)$) είναι συνεχής στο a .

(iii) Αν $h: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι συνάρτηση και $h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$, $x \in A$, τότε η h είναι συνεχής στο $a \in A$ αν και μόνο αν η κάθε μία από τις συνιστώσες συναρτήσεις h_1, \dots, h_m είναι συνεχής στο a .

Απόδειξη. Έπεται εύκολα με χρήση του χαρακτηρισμού της συνέχειας συναρτήσεων με ακολουθίες (θεώρημα 3.4) και τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων ακολουθιών. Για την (ii) χρησιμοποιούμε και τον ορισμό της συνέχειας της f στο a .

3.6 Πρόταση. Έστω, $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $g: B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ συναρτήσεις ώστε $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι συνεχής στο $a \in A$ και η g συνεχής στο $f(a)$ τότε η $g \circ f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ είναι συνεχής στο a .

Απόδειξη. Έστω $(x_n) \subseteq A$ με $\|x_n - a\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} a$. Επειδή η f είναι συνεχής στο a έπεται από το θεώρημα 3.4 ((i) \Rightarrow (ii)) ότι $f(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} f(a)$. Επειδή η g συνεχής στο $f(a)$ έπεται πάλι από την (i) \Rightarrow (ii) του θεωρήματος 3.4 ότι $g(f(x_n)) \xrightarrow{\|\cdot\|} g(f(a))$. Από την αντίστροφη συνεπαγωγή (ii) \Rightarrow (i) του θεωρήματος 3.4, έπεται ότι η $g \circ f$ συνεχής στο a .

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $V \subseteq A$, το σύνολο V λέγεται ότι είναι ανοικτό στο A (ή σχετικά ανοικτό υποσύνολο του A) αν υπάρχει $W \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό στο \mathbb{R}^n ώστε $V = A \cap W$.

Ένα υποσύνολο B του A λέγεται κλειστό στο A (ή σχετικά κλειστό υποσύνολο του A) αν υπάρχει ένα κλειστό υποσύνολο F του \mathbb{R}^n , ώστε $B = A \cap F$. Για παράδειγμα, αν $A = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, τότε το $V = \left[0, \frac{1}{2}\right)$ είναι ανοικτό στο A και το $B = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ είναι κλειστό στο A (γιατί;).

Παρατηρούμε ότι το $B \subseteq A$ είναι κλειστό στο A αν και μόνο αν το $A - B$ είναι ανοικτό στο A (γιατί;).

3.7 Πρόταση. Έστω, $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ συνάρτηση. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η f είναι συνεχής.

(ii) Για κάθε $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτό έπεται ότι το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο A . Ιδιαίτερα, αν το A είναι ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n τότε το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στον \mathbb{R}^n .

(iii) Για κάθε F κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^m έπεται ότι το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο A . Ιδιαίτερα αν A κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^n το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^n .

Απόδειξη. (i) \Rightarrow (ii) Έστω, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτό στον \mathbb{R}^m . Έστω, ακόμη $x \in f^{-1}(U)$ τότε $f(x) \in U$ και βέβαια $x \in A$. Έπεται ότι υπάρχει $\delta_x > 0: f(A \cap B(x, \delta_x)) \subseteq U$ (από τον ορισμό της συνέχειας και το γεγονός ότι U ανοικτό στον \mathbb{R}^m). Έτσι συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $f^{-1}(U)$ μπορεί να γραφεί ως ένωση ανοικτών στο A υποσυνόλων του A ως ακολούθως, $f^{-1}(U) = \bigcup \{A \cap B(x, \delta_x) : x \in f^{-1}(U)\} = A \cap \left[\bigcup \{B(x, \delta_x) : x \in f^{-1}(U)\} \right]$ και συνεπώς είναι σχετικά ανοικτό υποσύνολο του A . Είναι τώρα σαφές ότι αν το A

ανοικτό στον R^n τότε το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο R^n για κάθε U ανοικτό στον R^m .

(ii) \Rightarrow (i) Έστω $x \in A$ και $U = B(f(x), \varepsilon)$ τότε το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο A και $x \in f^{-1}(U)$, επομένως υπάρχει $\delta > 0: A \cap B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$, άρα $f(A \cap B(x, \delta)) \subseteq f(f^{-1}(U)) = U = B(f(x), \varepsilon)$ και η f είναι συνεχής στο x .

Η ισοδυναμία των ισχυρισμών (ii) και (iii) της πρότασης, έπεται αμέσως από το ακόλουθο στοιχειώδες συνολοθεωρητικό αποτέλεσμα: Αν X και Y σύνολα και $f: X \rightarrow Y$ συνάρτηση, τότε για κάθε $B \subseteq Y$ ισχύει: $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$.

3.8 Παρατήρηση. Έστω, $g: R^2 \rightarrow R$ συνάρτηση. Η απαίτηση ο περιορισμός της g πάνω σε κάθε ευθεία που διέρχεται από το $(0,0)$ να είναι συνεχής στο $(0,0)$ δεν είναι αρκετός ώστε να συνεπάγεται τη συνέχεια της g στο $(0,0)$. Πράγματι

$$\text{έστω, } g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Έστω, $a \in R$ τότε, για $x \neq 0$ έχουμε

$$g(x, ax) = \frac{x(ax)^2}{x^2 + (ax)^4} = \frac{a^2 x}{a^4 x^2 + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = g(0, 0). \text{ Επίσης } g(0, y) = 0 = g(0, 0) \text{ για}$$

κάθε $y \in R$ με $y \neq 0$. Από την άλλη μεριά παρατηρούμε ότι η g δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ όπως έπεται από τις σχέσεις,

$$g(\lambda t^2, t) = \frac{\lambda t^2 \cdot t^2}{(\lambda t^2)^2 + t^4} = \frac{\lambda t^4}{\lambda^2 t^4 + t^4} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \lambda \in R, t \neq 0 \text{ (Παρατηρούμε}$$

ότι, $2|\lambda| \leq \lambda^2 + 1, \forall \lambda \in R$).

Συνεπώς η g είναι σταθερή στις παραβολές $\{(x, y): x = \lambda y^2\}$ για $\lambda \in R, \lambda \neq 0$ και σε κάθε δίσκο $B((0,0), \varepsilon)$ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ $-\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}$ (γιατί;).

3.9 Ορισμός. Μια συνάρτηση $f: A \subseteq R^n \rightarrow R^m$ λέγεται ότι είναι φραγμένη αν υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f(x)\| \leq M$ για κάθε $x \in A$. Για παράδειγμα η συνάρτηση g

της προηγούμενης παρατήρησης είναι φραγμένη, αφού $|g(x, y)| \leq \frac{1}{2}, \forall (x, y) \in R^2$

(γιατί;).

Παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων

1) Κάθε Lipschitz συνάρτηση $f: A \subseteq R^n \rightarrow R^m$ είναι συνεχής (δηλαδή μια συνάρτηση $f: A \subseteq R^n \rightarrow R^m$ για την οποία υπάρχει σταθερά $K > 0$ ώστε $\|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\|$ για κάθε $x, y \in A$).

Πράγματι, δοθέντος του $\varepsilon > 0$, θέτουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, οπότε έχουμε $x, y \in A$ και

$$\|x - y\| \leq \delta \text{ τότε } \|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\| \leq K \cdot \delta = K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

2) Οι συναρτήσεις προβολές $\pi_k : R^n \rightarrow R, k = 1, 2, \dots, n$, ώστε $\pi_k(x) = x_k$, για $x = (x_1, \dots, x_n), k = 1, 2, \dots, n$, είναι Lipschitz και άρα συνεχείς. Πράγματι, αν $x, y \in R^n$ και $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ τότε $|\pi_k(x) - \pi_k(y)| = |x_k - y_k| \leq \|x - y\|$, για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$.

3) Γενικότερα κάθε γραμμική συνάρτηση $f : R^n \rightarrow R^m$ είναι Lipschitz (Υπενθυμίζουμε ότι οι προβολές είναι γραμμικές.).

Ας υπενθυμίσουμε πρώτα κάποιες ιδιότητες των γραμμικών συναρτήσεων:

(I) Έστω, $f : R^n \rightarrow R$ γραμμική συνάρτηση ($m = 1$), τότε υπάρχει $a = (a_1, \dots, a_n) \in R^n$ ώστε $f(x) = a \cdot x = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, όπου $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$. Για να το αποδείξουμε θεωρούμε την συνήθη βάση $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ του R^n και θέτουμε $a_k = f(e_k), k = 1, 2, \dots, n$, τότε

$$f((x_1, \dots, x_n)) = f(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1f(e_1) + \dots + x_nf(e_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n = a \cdot x$$

(II) Έστω, $f : R^n \rightarrow R^m$ γραμμική ($m \geq 2$). Θέτουμε $f_k = \pi_k \circ f, k = 1, 2, \dots, m$, οι συντεταγμένες συναρτήσεις f_1, \dots, f_m της f είναι βέβαια γραμμικές, αφού οι προβολές π_1, \dots, π_m είναι γραμμικές.

Έτσι μπορούμε να γράφουμε $f = (f_1, \dots, f_m) \Leftrightarrow f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ για $x \in R^n$.

Από το (I) έχουμε ότι, για κάθε $k = 1, 2, \dots, m$ υπάρχει $a_k \in R^n$ ώστε $f_k(x) = a_k \cdot x$ για $x \in R^n$, όπου $a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn})$. Έπεται ότι για $x \in R^n$,

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \|(a_1 \cdot x, \dots, a_m \cdot x)\| = \sqrt{(a_1 \cdot x)^2 + \dots + (a_m \cdot x)^2} \leq \sqrt{(\|a_1\| \cdot \|x\|)^2 + \dots + (\|a_m\| \cdot \|x\|)^2} \\ &= \|x\| \sqrt{\|a_1\|^2 + \dots + \|a_m\|^2}. \end{aligned}$$

Άρα θέτοντας, $K = \sqrt{\|a_1\|^2 + \dots + \|a_m\|^2} = \sqrt{\sum \{a_{k\lambda}^2 : 1 \leq k \leq m, 1 \leq \lambda \leq n\}}$,

συμπεραίνουμε ότι $\|f(x)\| \leq K\|x\|$, από όπου έπεται ότι $\|f(x-y)\| \leq K\|x-y\|$ για κάθε $x, y \in R^n$ και η f είναι συνάρτηση Lipschitz. (Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα Cauchy-Schwartz.)

Παρατήρηση. Έστω, $L(R^n; R^m)$ ο χώρος των γραμμικών απεικονίσεων $f : R^n \rightarrow R^m$ και $V(m \times n; R)$ ο χώρος των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

Είναι η παραπάνω ανάλυση που έγινε στο (II) που μας οδηγεί φυσιολογικά στην ταύτιση των δύο παραπάνω χώρων (που γίνονται διανυσματικοί χώροι επί του R ο καθένας με τις συνήθειες πράξεις). Η ταύτιση των δύο χώρων γίνεται μέσω του

γραμμικού ισομορφισμού $L(R^n; R^m) \xrightarrow{\Phi} V(m \times n; R): \Phi(f) = A$ όπου A είναι ο $m \times n$ πίνακας, $A = (a_{\kappa\lambda}) = (f_{\kappa}(e_{\lambda}))$, $\kappa = 1, 2, \dots, m, \lambda = 1, 2, \dots, n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (a_{\kappa\lambda} = f_{\kappa}(e_{\lambda}))$$

Θέτοντας $\|f\| = \sqrt{\sum \{a_{\kappa\lambda}^2 : \kappa = 1, 2, \dots, m, \lambda = 1, 2, \dots, n\}}$, ο διανυσματικός χώρος $L(R^n; R^m)$ αποκτά την δομή ενός Ευκλειδείου χώρου, ουσιαστικά ταυτιζόμενος με τον $R^{m \times n}$. Παρατηρούμε ότι, $f(x) = A \cdot x =$ πολλαπλασιασμός του πίνακα $A = (a_{\kappa\lambda})$

με το διάνυσμα στήλη $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$.

(*) 4) Οι πράξεις του διανυσματικού χώρου R^n είναι συνεχείς.

Εννοούμε με αυτό τις συναρτήσεις: $\Phi: (x, y) \in R^n \times R^n \rightarrow x + y \in R^n$ και $\varphi: (\lambda, x) \in R \times R^n \rightarrow \lambda x \in R^n$ (διανυσματική πρόσθεση και βαθμωτό γινόμενο αντίστοιχα). Παρατηρούμε καταρχήν ότι ο χώρος $R^n \times R^m$ ταυτίζεται φυσιολογικά με τον R^{n+m} μέσω της $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_m)) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ και η νόρμα του δίνεται από τον τύπο $\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$.

Για την συνέχεια της Φ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η Φ είναι γραμμική και άρα Lipschitz.

Για το βαθμωτό γινόμενο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον χαρακτηρισμό της συνέχειας με ακολουθίες: Έστω, $(\lambda_k, x_k), k = 1, 2, \dots$ ακολουθία στον $R \times R^n$ και $(\lambda, x) \in R \times R^n$ ώστε $(\lambda_k, x_k) \rightarrow (\lambda, x) \Leftrightarrow \lambda_k \rightarrow \lambda$ και $x_k \rightarrow x$. Έπεται ότι $\|\lambda_k x_k - \lambda x\| \leq \|\lambda_k x_k - \lambda x_k\| + \|\lambda x_k - \lambda x\| = \|x_k\| \cdot |\lambda_k - \lambda| + |\lambda| \|x_k - x\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 + 0 = 0$.

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η (x_k) είναι φραγμένη ως συγκλίνουσα.

5) Η συνάρτηση, $g: x \in R^n \rightarrow \|x\| \in R$ είναι συνεχής. Πράγματι, αν $x, y \in R^n$ τότε $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$, επομένως η g είναι συνάρτηση Lipschitz και άρα συνεχής

$$[g(x) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n]$$

6) Η συνάρτηση $x \in R^n - \{0\} \rightarrow \frac{x}{\|x\|} = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \right) \in R^n$ είναι συνεχής. Πράγματι, έστω $x \neq 0, x \in R^n$ και $(x_k) \subseteq R^n - \{0\}: x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ τότε $\|x_k\| \rightarrow \|x\|$ (παράδειγμα 5) και επειδή $\|x\| \neq 0$ έπεται ότι $\frac{1}{\|x_k\|} \rightarrow \frac{1}{\|x\|}$. Από την

συνέχεια του βαθμωτού γινομένου έπεται ότι $\frac{1}{\|x_k\|} \cdot x_k \rightarrow \frac{1}{\|x\|} \cdot x$. (Σημειώνουμε ότι η

απόδειξη αυτή δεν χρησιμοποιεί τις συντεταγμένες του χώρου R^n , πρβλ. επίσης το θεώρημα 3.5 ii).

7) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $(x_1, \dots, x_n) \in R^n \rightarrow P(x_1, \dots, x_n) \in R$ είναι συνεχής.

Μια συνάρτηση $P(x_1, \dots, x_n)$ λέγεται πολυωνυμική αν είναι γραμμικός συνδυασμός μονώνυμων δηλαδή συναρτήσεων της μορφής $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$, όπου k_1, \dots, k_n μη αρνητικοί ακέραιοι. Έστω, για απλότητα $n=2$, έτσι η $P(x, y)$ είναι πολώνυμο αν είναι γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων της μορφής $x^k \cdot y^\lambda$ με k, λ μη αρνητικούς ακέραιους. Τώρα κάθε μονώνυμο $x^k \cdot y^\lambda$ είναι συνεχής συνάρτηση όπως έπεται με χρήση του χαρακτηρισμού της συνέχειας με ακολουθίες και τις ιδιότητες των ορίων ακολουθιών (αν $(x_v, y_v) \xrightarrow{\|\cdot\|} (x, y) \Leftrightarrow x_v \rightarrow x$ και $y_v \rightarrow y$, τότε $x_v^k \rightarrow x^k$ και $y_v^\lambda \rightarrow y^\lambda$ άρα $x_v^k \cdot y_v^\lambda \rightarrow x^k \cdot y^\lambda$) ή εναλλακτικά με χρήση του παραδείγματος (2) του θεωρήματος 3.5 (i) και με επαγωγή στον βαθμό του (ο βαθμός του μονώνυμου $x^k \cdot y^\lambda$ είναι $k + \lambda$).

Εφόσον τα μονώνυμα είναι συνεχείς συναρτήσεις από το θεώρημα 3.5(i), έπεται ότι κάθε πολώνυμο πολλών μεταβλητών είναι συνεχής συνάρτηση.

Παρατηρούμε ότι το παράδειγμα αυτό γενικεύει το παράδειγμα (3), δεδομένου ότι κάθε γραμμική συνάρτηση είναι πολώνυμο πρώτου βαθμού.

8) Κάθε ρητή συνάρτηση $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{Q(x_1, \dots, x_n)}$, όπου $P(x_1, \dots, x_n), Q(x_1, \dots, x_n)$

πολώνυμα n -μεταβλητών και Q όχι ταυτοτικά μηδέν, είναι συνεχής συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της. Αυτό είναι προφανής συνέπεια του θεωρήματος 3.5. Έτσι για

παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x, y) = \frac{x^2 + 2xy - y^5 + 5x^2y}{x^2 - y^2}$ και

$g(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ είναι ρητές.

9) Η συνάρτηση εσωτερικό γινόμενο, $(x, y) \in R^n \times R^n \rightarrow x \cdot y \in R$ είναι συνεχής.

Πράγματι έστω, $(x_k, y_k), k \geq 1$ ακολουθία στον $R^n \times R^n$ ώστε $(x_k, y_k) \rightarrow (x, y) \in R^n \times R^n \Leftrightarrow x_k \rightarrow x$ και $y_k \rightarrow y$ τότε

$|x_k \cdot y_k - x \cdot y| \leq |x_k \cdot y_k - x \cdot y_k| + |x \cdot y_k - x \cdot y| = |y_k \cdot (x_k - x)| + |x \cdot (y_k - y)| \leq$ ανισότητα

Cauchy-Schwartz $\leq \|x_k - x\| \cdot \|y_k\| + \|y_k - y\| \cdot \|x\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ (Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η (y_k) είναι φραγμένη ως συγκλίνουσα ακολουθία). Από τον χαρακτηρισμό της συνέχειας με ακολουθίες έπεται το συμπέρασμα.

Ασκήσεις

1) Δείξτε ότι η συνάρτηση $x \in R^n \xrightarrow{\varphi} \frac{x}{1 + \|x\|} \in B(0, 1)$ είναι συνεχής 1-1 και επί

της $B(0, 1)$ με αντίστροφη την $y \in B(0, 1) \xrightarrow{\sigma} \frac{y}{1 - \|y\|} \in R^n$. Δείξτε επί πλέον ότι και

η σ είναι συνεχής. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον χαρακτηρισμό της συνέχειας με ακολουθίες]

2) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις: (α) $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$, (β) $g(x, y) = \frac{x^3 y - \cos(xy)}{x^2 + y^2}$

και $h(x, y, z) = \frac{x^3 - 2xyz + \log(xy)}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$ είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους τα οποία και να περιγράψετε.

3) Έστω $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ και $g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^6}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(α) Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη στο R^2 και ότι η g είναι μη φραγμένη σε κάθε σφαίρα $B((0, 0), \varepsilon)$.

(β) Αποδείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$, αλλά ο περιορισμός τόσο της f όσο και της g σε οποιαδήποτε ευθεία του R^2 είναι συνεχής συνάρτηση.

4) Προσδιορίστε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και β ώστε η διανυσματική

συνάρτηση, $f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \frac{2x^2 - x^2 y^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} \right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ (a, \beta), & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ να γίνεται

συνεχής στο $(0, 0)$.

5) Είναι η συνάρτηση $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ συνεχής στο $(0, 0)$;

6) Έστω $f: U \subseteq R^2 \rightarrow R$ συνάρτηση, όπου U ανοικτό σύνολο και $(a, b) \in U$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ ώστε $(a - \delta_1, a + \delta_1) \times (b - \delta_2, b + \delta_2) \subseteq U$.

(β) Δείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο (a, b) τότε οι συναρτήσεις $f_1(x) = f(x, b)$, $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1)$, $f_2(y) = f(a, y)$, $y \in (b - \delta_2, b + \delta_2)$ είναι συνεχείς στα a και b αντίστοιχα.

(γ) Γενικεύστε τα (α) και (β) για μια συνάρτηση n -μεταβλητών, $f: U \subseteq R^n \rightarrow R$.

(Το αποτέλεσμα αυτό μας λέει ότι μια συνεχής συνάρτηση n -μεταβλητών είναι συνεχής για κάθε μια μεταβλητή χωριστά).

7) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $(x, y) \rightarrow \max(x, y)$ και $(x, y) \rightarrow \min(x, y)$ είναι

συνεχείς στο R^2 . [Υπόδειξη: $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$ και

$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$]

8) Έστω $f_1, \dots, f_m: A \subseteq R^n \rightarrow R$ συναρτήσεις και $a \in A$. Θέτουμε $F(x) = \max(f_1(x), \dots, f_m(x))$ και $G(x) = \min(f_1(x), \dots, f_m(x))$, $x \in A$. Αποδείξτε ότι αν οι f_1, \dots, f_m είναι συνεχείς στο a , τότε και οι συναρτήσεις F και G είναι συνεχείς στο a . [Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την άσκηση (7) και επαγωγή στο m].

9) Δείξτε χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό των συνεχών συναρτήσεων με κλειστά σύνολα, ότι τα ακόλουθα σύνολα είναι κλειστά:

(α) $\{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2 \text{ και } x^3 - x \geq 0\}$

(β) $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ και γενικότερα η επιφάνεια $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ της μοναδιαίας σφαίρας του \mathbb{R}^n .

(γ) $\{x \in \mathbb{R}^n : a \cdot x \leq \|x\|\}$, όπου $a \in \mathbb{R}^n$ είναι δοσμένο διάνυσμα.

(δ) $\{(x, y) : x^4 + y^4 = 1\}$.

10) Έστω $a > 0$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = |x|^a$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0 χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας.

(β) Έστω $h(x) = |f(x)|^a$, $x \in A$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 αποδείξτε ότι η h είναι συνεχής στο x_0 .

(γ) Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο A τότε και η $h(x) = |f(x)|^a$, $x \in A$, είναι συνεχής χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό των συνεχών με ανοικτά σύνολα. (Βέβαια το (γ) έπεται προφανώς και από το (β).)

11) Προσδιορίστε αν το A είναι ανοικτό σχετικά με το S , κλειστό σχετικά με το S ή τίποτα από τα δύο στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $S = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b, x \neq c\}$, $A = [a, c)$, $a < c < b$

(β) $S = (0, 1]$, $A = \left\{\frac{1}{n} : n \geq 1\right\}$ (γ) $S = [0, 1]$, $A = \left\{\frac{1}{n} : n \geq 1\right\}$

(δ) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$, $A = \{(x, y) \in S : x^2 \geq y^2\}$.

(ε) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$, $A = \{(x, y) \in S : x^2 < y^2\}$

(*12) Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$. (α) Αποδείξτε ότι αν $\{B_i : i \in I\}$ είναι οικογένεια ανοικτών σχετικά με το A υποσυνόλων του A τότε το $\bigcup_{i \in I} B_i$ είναι ανοικτό σχετικά με το A

και ότι αν B_1, \dots, B_n ($n \in \mathbb{N}$) είναι (πεπερασμένη) οικογένεια ανοικτών σχετικά με το A υποσυνόλων του A τότε το $\bigcap_{k=1}^n B_k$ είναι ανοικτό σχετικά με το A .

(β) Αποδείξτε τις αντίστοιχες ιδιότητες για οικογένειες κλειστών σχετικά με το A υποσυνόλων του A .