Συνεκτικά σύνολα

Έστω, $\mathrm{I} \subseteq R$ διάστημα και $f : \mathrm{I} \to R$ συνεχής, τότε η f έχει την ιδιότητα της ενδιαμέσου τιμής, δηλαδή, η f παίρνει κάθε τιμή μεταξύ δύο οποιονδήποτε διαφορετικών τιμών της, συνεπώς το $f(\mathrm{I})$ είναι διάστημα. Είναι χαρακτηριστική ιδιότητα των ανοικτών ή κλειστών διαστημάτων στο R ότι δεν μπορούν να γραφούν ως ένωση δύο ξένων ανοικτών ή κλειστών υποδιαστημάτων αντίστοιχα. Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται στον R^n και επιτρέπει να αποδείξουμε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα για συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών..

3.15 Ορισμός. Ένα σύνολο $\mathrm{A} \subseteq R^n$ λέγεται συνεκτικό αν δεν μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο ξένων μη κενών ανοικτών στο Α υποσυνόλων. Με άλλα λόγια ένα σύνολο $\mathrm{A} \subseteq R^n$ δεν είναι συνεκτικό αν υπάρχουν $U, V \subseteq R^n$ ανοικτά ώστε, $\mathrm{A} \cap U \neq \varnothing, \mathrm{A} \cap V \neq \varnothing, (\mathrm{A} \cap U) \cap (\mathrm{A} \cap V) = \varnothing$ και $(\mathrm{A} \cap U) \cup (\mathrm{A} \cap V) = \mathrm{A}$.

Προφανώς τα μονοσύνολα του R^n είναι συνεκτικά σύνολα.

Αποδεικνύεται το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα που χαρακτηρίζει τα συνεκτικά υποσύνολα του R.

.

3.16 Θεώρημα (Συνεκτικότητα των διαστημάτων). Τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα του R με περισσότερα από ένα στοιχεία είναι τα διαστήματα. (ανοικτά, κλειστά ,ημιανοικτά φραγμένα ή μη φραγμένα).

Απόδειξη: Παραλείπεται.

Υπενθύμιση. Αν Χ σύνολο και $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου Α είναι η συνάρτηση $x_{\mathrm{A}} : \mathrm{X} \to R : x_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathrm{A} \\ 0, x \notin \mathrm{A} \end{cases}$.

3.17 Λήμμα. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι για ένα σύνολο $\mathrm{A} \subseteq R^n$.

(ι) Το Α δεν είναι συνεκτικό.

(ιι) Υπάρχει $f : \mathrm{A} \to R$ συνεχής ώστε $f(\mathrm{A}) = \{0,1\}$.

Απόδειξη: (ι) $\Rightarrow$ (ιι) Το Α γράφεται ως $\mathrm{A} = (\mathrm{A} \cap U) \cup (\mathrm{A} \cap V)$ όπου U, V ανοικτά στο R^n με $\mathrm{A} \cap U \neq \varnothing$ $\mathrm{A} \cap V \neq \varnothing$ και $(\mathrm{A} \cap U) \cap (\mathrm{A} \cap V) = \varnothing$. Θέτουμε $f = x_{\mathrm{A} \cap U}$ και παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής με $f(\mathrm{A}) = \{0,1\}$.

(η f αντιστρέφει τα ανοικτά υποσύνολα του R σε σχετικά ανοικτά υποσύνολα του Α).

(ιι) $\Rightarrow$(ι) Τα σύνολα $\mathrm{A}_0 = f^{-1}(\{0\})$ και $\mathrm{A}_1 = f^{-1}(\{1\})$ είναι σχετικά ανοικτά υποσύνολα του Α σε τρόπο ώστε $\mathrm{A}_0 \cup \mathrm{A}_1 = \mathrm{A}, \mathrm{A}_0 \neq \varnothing, \mathrm{A}_1 \neq \varnothing$ και $\mathrm{A}_0 \cap \mathrm{A}_1 = \varnothing$. Έστω $U, V \subseteq R^n$ ανοικτά ώστε $\mathrm{A}_0 = U \cap \mathrm{A}$ και $\mathrm{A}_1 = V \cap \mathrm{A}$. Επομένως το Α δεν είναι συνεκτικό.

3.18 Πρόταση Έστω $\mathrm{A} \subseteq R^n$ συνεκτικό και $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ συνεχής τότε το $f(\mathrm{A})$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του R^m.

Απόδειξη: Αν το $f(\mathrm{A})$ δεν ήταν συνεκτικό τότε θα υπήρχε μια συνεχής συνάρτηση, $g : f(\mathrm{A}) \to \{0,1\} \subseteq R$ με $g\big(f(\mathrm{A})\big) = \{0,1\}$. Τότε η συνάρτηση $gof : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R$ θα ήταν συνεχής και $(gof)(\mathrm{A}) = \{0,1\}$. Επομένως το A δεν θα ήταν συνεκτικό, άτοπο.
Η έννοια της συνεκτικότητας οδηγεί στην ακόλουθη γενίκευση του θεωρήματος ενδιαμέσου τιμής του Λογισμού μιας μεταβλητής.

3.19 Θεώρημα (Ενδιαμέσου Τιμής) Έστω $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R$ συνεχής. Αν το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του R^n τότε το $f(\mathrm{A})$ είναι διάστημα του R, δηλαδή η f παίρνει κάθε τιμή μεταξύ δύο διαφορετικών τιμών της.

Απόδειξη: Έπεται προφανώς από το προηγούμενο αποτέλεσμα και τον χαρακτηρισμό των συνεκτικών υποσυνόλων του R.

3.20 Λήμμα. Έστω $\{\mathrm{A}_i : i \in I\}$ οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του R^n ώστε $\bigcap_{i\in I} \mathrm{A}_i \neq \varnothing$, τότε η ένωση $\mathrm{A} = \bigcup_{i\in I} \mathrm{A}_i$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του R^n. Επίσης η κλειστότητα ενός συνεκτικού συνόλου είναι σύνολο συνεκτικό.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $f : \mathrm{A} \to R$ συνεχής με $f(\mathrm{A}) = \{0,1\}$. Έστω $x \in \bigcap_{i\in I} \mathrm{A}_i$, υποθέτουμε ότι $f(x) = 1$. Επειδή το κάθε A_i είναι συνεκτικό και $x \in \mathrm{A}_i$, έπεται ότι $f(y) = f(x) = 1$ για κάθε $y \in \mathrm{A}_i$ και για κάθε $i \in I$. Συνεπώς η f δεν μπορεί να παίρνει την τιμή 0. (Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι αν $f(x) = 0$ τότε $f(y) = 0$ για κάθε $y \in \mathrm{A} = \bigcup_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο και άρα το A είναι συνεκτικό.
Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι αν $f : \overline{\mathrm{A}} \to R$ συνεχής (όπου $\mathrm{A} \subseteq R^n$ συνεκτικό) με $f(\overline{\mathrm{A}}) \subseteq \{0,1\}$, τότε η συνέχεια της f έπεται ότι αυτή δεν μπορεί να είναι επί του $\{0,1\}$. Πράγματι αν υπήρχαν $x_1, x_0 \in \overline{\mathrm{A}}$ με $f(x_1) = 1$ και $f(x_0) = 0$ τότε θα υπήρχαν ακολουθίες (x_n) και (y_n) στοιχείων του A ώστε $x_n \to x_1$ και $y_n \to x_0$. Συνεπώς $f(x_n) \to f(x_1) = 1$ και $f(y_n) \to f(x_0) = 0$. Επειδή $\big(f(x_n)\big)$ και $\big(f(y_n)\big)$ είναι ακολουθίες στοιχείων του $\{0,1\}$ έπεται ότι $f(x_n) = 1$ και $f(y_n) = 0$ για κάθε $n \geq N_0$ για κάποιο $N_0 \in N$. Συνεπώς $f(\mathrm{A}) = \{0,1\}$, άτοπο.

(*) 3.21 Ορισμός Έστω, $\mathrm{A} \subseteq R^n$ και $x \in \mathrm{A}$. Η συνεκτική συνιστώσα A_x του x στο A είναι η ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του A που περιέχουν το x.

Χρησιμοποιώντας τα δύο Λήμματα που αποδείξαμε παραπάνω (3.17 και 3.20) αποδεικνύεται εύκολα (αφήνεται ως άσκηση) η ακόλουθη.

(*) 3.22. Πρόταση. Έστω, $\mathrm{A} \subseteq R^n$ και $x \in \mathrm{A}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(ι) Η συνεκτική συνιστώσα A_x του x στο Α είναι <u>συνεκτικό</u> σύνολο και είναι ένα <u>μεγιστικό</u> συνεκτικό υποσύνολο του Α. (Αν $\mathrm{A}_x \subseteq \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ και Β συνεκτικό τότε $\mathrm{A}_x = \mathrm{B}$).

(ιι) Η συνεκτική συνιστώσα A_x του x στο Α είναι σύνολο <u>κλειστό στο Α</u>.

(ιιι) Το σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών των σημείων του Α συνιστά μια <u>διαμέριση του Α</u>, δηλαδή, κάθε δύο διαφορετικές συνιστώσες του Α είναι ξένες και η ένωσή τους ισούται με το Α.

(ιv) Μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to R$ είναι <u>σταθερή</u> πάνω σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του Α.

Παρατήρηση. Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός συνόλου Α δεν είναι απαραίτητα σύνολα ανοικτά στο Α. Για παράδειγμα οι συνεκτικές συνιστώσες των σημείων του Q είναι μονοσύνολα. Ένα άλλο παράδειγμα είναι το σύνολο $\mathrm{A} = \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} \bigcup \{0\} \subseteq R$. Οι συνεκτικές συνιστώσες του Α είναι οι:

το $\{1\}, \left\{\frac{1}{2}\right\}, \ldots, \left\{\frac{1}{n}\right\}, \ldots$ και το $\{0\}$, παρατηρούμε ότι το $\{0\}$ δεν είναι ανοικτό σχετικά με το A.

Από την άλλη μεριά αποδεικνύεται ότι οι συνεκτικές συνιστώσες ενός ανοικτού συνόλου $U \subseteq R^n$ είναι σύνολα ανοικτά στον R^n.

3.23 Ορισμός: (ι) Έστω, $a, b \in R^n$ το (προσανατολισμένο) <u>ευθύγραμμο τμήμα</u> από το a στο b είναι το σύνολο $[a,b] = \{(1-t)a + tb : t \in [0,1]\} \subseteq R^n$.

(ιι) Έστω, $a_1, \ldots, a_m$ σημεία του R^n. Η <u>πολυγωνική γραμμή</u> με κορυφές τα $a_1, \ldots, a_m$ είναι το σύνολο, $\mathrm{P} = [a_1, a_2] \bigcup [a_2, a_3] \bigcup \ldots \bigcup [a_{m-1}, a_m]$.

(ιιι) Ένα υποσύνολο $\mathrm{K} \subseteq R^n$ λέγεται <u>κυρτό</u> αν για κάθε $a, b \in \mathrm{K}$ ισχύει ότι $[a,b] \subseteq \mathrm{K}$.

Παρατηρούμε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα $[a,b] \subseteq R^n$ είναι κυρτό υποσύνολο του R^n

3.24 Πρόταση: (ι) Κάθε ευθύγραμμο τμήμα και γενικότερα κάθε πολυγωνική γραμμή στον R^n είναι σύνολα συνεκτικά.

(ιι) Κάθε κυρτό σύνολο στον R^n είναι σύνολο συνεκτικό.

Απόδειξη: (ι) Έστω, $a, b \in R^n$, τότε η απεικόνιση $\varphi : [0,1] \to [a,b] \subseteq R^n : \varphi(t) = (1-t)a + tb, t \in [0,1]$ είναι συνεχής και $\varphi([0,1]) = [a,b]$. Επομένως το $[a,b]$ είναι συνεκτικό.

Το γεγονός ότι μια πολυγωνική γραμμή Ρ με m - κορυφές είναι σύνολο συνεκτικό αποδεικνύεται με επαγωγή στον αριθμό των κορυφών της (για m=2 η Ρ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα στον R^n και άρα σύνολο συνεκτικό). Για το επόμενο βήμα της επαγωγής χρησιμοποιούμε το Λήμμα 3.20.

(ιι) Έστω Κ κυρτό και $a \in \mathrm{K}$. Επειδή το Κ είναι κυρτό ισχύει ότι $[a,x] \subseteq \mathrm{K}$ για κάθε $x \in \mathrm{K}$, επομένως $\mathrm{K} = \bigcup\{[a,x] : x \in \mathrm{K}\}$. Από το Λήμμα 3.20 έπεται το συμπέρασμα.

Παραδείγματα κυρτών συνόλων: 1) Κάθε ανοικτή ή κλειστή σφαίρα στον R^n είναι σύνολο κυρτό. Η απόδειξη είναι απλή (και διαισθητικά προφανής αν $n = 2$ ή 3).
2)Κάθε ημιεπίπεδο (ανοικτό ή κλειστό) είναι κυρτό σύνολο στον R^2 .
3) Το εσωτερικό ενός τριγώνου ή ενός παραλληλογράμμου είναι σύνολο κυρτό στον R^2 . Βέβαια και κάθε κλειστό τρίγωνο ή παραλληλόγραμμο (το εσωτερικό μαζί με το σύνορο) είναι κυρτό σύνολο.

Αποδεικνύεται ο ακόλουθος χαρακτηρισμός των ανοικτών και συνεκτικών υποσυνόλων του R^n .

3.25 Θεώρημα. Έστω, $U \subseteq R^n$ ανοικτό σύνολο. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(ι) Το U είναι συνεκτικό.
(ιι) Για κάθε $a,b \in U$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή $\mathrm{P} \subseteq U$ από το a στο b (το U είναι όπως λέμε πολυγωνικά συνεκτικό).
Απόδειξη: Παραλείπεται.
Ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του R^n θα ονομάζεται και <u>τόπος.</u>

Παραδείγματα: Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα ακόλουθα ανοικτά σύνολα είναι συνεκτικά:
1)Αν $F \subseteq R^n$ είναι πεπερασμένο σύνολο τότε το $R^n - F$ καθώς και το $\mathrm{B}(x,\varepsilon) - F$ είναι συνεκτικά σύνολα. (όπου $x \in R^n$, $\varepsilon > 0$ και $n \geq 2$).
2)Αν $x \in R^n$ και $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ τότε ο δακτύλιος $\mathrm{B}(x,\varepsilon_2) - \overline{\mathrm{B}}(x,\varepsilon_1)$ είναι σύνολο συνεκτικό.
3)Αν οι ανοικτές σφαίρες $\mathrm{B}(x_2,\varepsilon_2), \mathrm{B}(x_1,\varepsilon_1)$ τέμνονται τότε η ένωση τους είναι σύνολο συνεκτικό.
Η απόδειξη των (1), (2), (3) αφήνεται ως άσκηση.
Καθόσον αφορά τις συνεκτικές συνιστώσες ενός ανοικτού συνόλου του R^n αποδεικνύεται εύκολα το ακόλουθο.

(*) **3.26Θεώρημα**. Έστω U ανοικτό σύνολο στον R^n .
Τότε ισχύουν:
(ι) Κάθε συνεκτική συνιστώσα του U είναι σύνολο ανοικτό στον R^n .
(ιι) Το U έχει αριθμήσιμο πλήθος συνεκτικών συνιστωσών.

Η απόδειξη του (ι) ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση. Για τον (ιι) ισχυρισμό χρησιμοποιούμε τον πρώτο ισχυρισμό καθώς και το γεγονός ότι ο R^n περιέχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο, π.χ. το σύνολο Q^n (Q =το σύνολο των ρητών στο R).
Ένα υποσύνολο Α του R^n λέγεται ότι είναι πυκνό στον R^n αν, $\overline{\mathrm{A}} = R^n$.

Σημείωση: Για την απόδειξη των θεωρημάτων 3.16 και 3.25 καθώς και για πληρέστερη ενημέρωση επί της συνεκτικότητας παραπέμπουμε στην Βιβλιογραφία.

Ασκήσεις

1)Αποδείξτε χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό της συνεκτικότητας ότι τα ακόλουθα σύνολα δεν είναι συνεκτικά.

(α) Η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$ στον R^2.

(β) Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του R^n με τουλάχιστον δύο σημεία.

(γ) $\left\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ και } y \neq x+1\right\}$

(δ) Η ένωση των ανοικτών δίσκων $\mathrm{B}\left((0,0),\delta\right)$ και $\mathrm{B}\left((1,1),\delta\right)$, του R^2, όπου $\delta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2)Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του R^n. Αποδείξτε ότι το U είναι μη συνεκτικό αν και μόνο αν $U = \mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}$, όπου A, B μη κενά ανοικτά και ξένα υποσύνολα του R^n. Αποδείξτε το αντίστοιχο αποτέλεσμα αντικαθιστώντας παντού το επίθετο «ανοικτό» με το επίθετο «κλειστό».

3)Έστω $\left(\mathrm{A}_n\right)_{n\geq 1}$ ακολουθία συνεκτικών υποσυνόλων του R^n ώστε $\mathrm{A}_n \bigcap \mathrm{A}_{n+1} \neq \varnothing$ για κάθε $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$ είναι συνεκτικό στον R^n

[Υπόδειξη: Τα σύνολα $\mathrm{A}_1 \bigcup \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_1 \bigcup \mathrm{A}_2 \bigcup \mathrm{A}_3, ...$ είναι συνεκτικά].

4)Έστω $f : \mathrm{A} \subseteq R^n \to R^m$ συνεχής συνάρτηση όπου A συνεκτικό στον R^n. Αποδείξτε ότι το γράφημα της f, δηλαδή το σύνολο $G(f) = \left\{\left(x, f(x)\right) : x \in \mathrm{A}\right\}$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $R^n \times R^m$.

5)Αποδείξτε ότι η επιφάνεια $S^{n-1} = \left\{x \in R^n : \|x\| = 1\right\}$ της Ευκλείδειας μοναδιαίας σφαίρας $(n \geq 2)$, είναι σύνολο συνεκτικό στον R^n. [Υπόδειξη: Η απεικόνιση $x \in R^n - \{0\} \to \dfrac{x}{\|x\|} \in R^n$, είναι συνεχής].

6) Θεωρήστε μια οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων κάποιου ευκλείδειου χώρου τα οποία έχουν ανά δύο μια κενή τομή. Αποδείξτε ότι η ένωση των μελών της είναι συνεκτικό σύνολο.