Κανόνες παραγώγισης

Οι κανόνες παραγώγισης που ισχύουν για συναρτήσεις μιας μεταβλητής, (παραγώγιση, αθροίσματος, γινομένου , πηλίκου και σύνθετων συναρτήσεων) γενικεύονται και για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Παραθέτουμε πρώτα τους κανόνες παραγώγισης αθροισμάτων, γινομένων και πηλίκων.

5.5 Θεώρημα. Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό $a \in U$ και $f, g : U \to R^m$ συναρτήσεις διαφορίσιμες στο a, τότε ισχύουν τα ακόλουθα: (ι) Αν $\lambda \in R$ η συνάρτηση λf είναι διαφορίσιμη στο a και ισχύει, $D(\lambda f)(a) = \lambda \cdot Df(a)$

(ιι) Η συνάρτηση $f+g$ είναι διαφορίσιμη στο a και $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$

(ιιι) Έστω $m=1$, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι διαφορίσιμη στο a και

$$D(f \cdot g)(a) = g(a) \cdot Df(a) + f(a) \cdot Dg(a)$$

(ιν) Αν $m=1$ και $g(a) \neq 0$, τότε η συνάρτηση (η οποία ορίζεται σε μια σφαίρα $\mathrm{B}(a,\delta) \subseteq U$) $\frac{f}{g}$ είναι διαφορίσιμη στο a και

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{\left(g(a)\right)^2}.$$

Ιδιαίτερα η $\frac{1}{g}$ είναι διαφορίσιμη στο a και

$$D\left(\frac{1}{g}\right)(a) = -\frac{1}{\left(g(a)\right)^2} \cdot Dg(a)$$

Απόδειξη: Οι αποδείξεις των παραπάνω κανόνων είναι παρόμοιες με τις αντίστοιχες για διαφορίσιμες συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Αποδεικνύουμε ενδεικτικά τον ισχυρισμό (ιιι) Έστω $x \in U$, τότε έχουμε

$$\mathrm{A}(x) = \left|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a) - \left(g(a)Df(a) + f(a)Dg(a)\right)(x-a)\right| =$$

$$| f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a) - g(a)Df(a)(x-a) - f(a)Dg(a)(x-a) +$$

$$+ f(x)Dg(a)(x-a) - f(x)Dg(a)(x-a) + f(x)g(a) - f(x)g(a) | \leq$$

$$\leq \left|f(x)\right|\left|g(x) - g(a) - Dg(a)(x-a)\right| + \left|g(a)\right|\left|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\right| +$$

$$+ \left|\left(f(x) - f(a)\right) \cdot Dg(a)(x-a)\right|$$

Αν συμβολίσουμε την τελευταία παράσταση με $\mathrm{B}(x)$ τότε θα έχουμε: $\frac{\mathrm{A}(x)}{\|x-a\|} \leq \frac{\mathrm{B}(x)}{\|x-a\|}, x \in U, x \neq a$.

Η παράσταση $\frac{\mathrm{B}(x)}{\|x-a\|}$ έχει τρεις προσθετέους εκ των οποίων οι δύο πρώτοι τείνουν στο 0 καθώς $x \to a$, από τον ορισμό του διαφορικού συνάρτησης και το γεγονός ότι η f είναι συνεχής στο a. Για τον τρίτο προσθετέο παρατηρούμε ότι

$$\frac{\left|\left(f(x)-f(a)\right)\cdot Dg(a)(x-a)\right|}{\|x-a\|}\leq\frac{\left|f(x)-f(a)\right|\cdot\kappa\|x-a\|}{\|x-a\|}\leq\kappa\left|f(x)-f(a)\right|\xrightarrow[x\to a]{}0$$

, καθώς η γραμμική συνάρτηση $Dg(a)$ είναι Lipschitz και συνεπώς υπάρχει $\kappa>0:\left|Dg(a)(x-y)\right|\leq\kappa\|x-y\|, x,y\in R^n$.

Σημείωση Καθώς το διαφορικό μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών ταυτίζεται με τον αντίστοιχο πίνακα Jacobi, οι παραπάνω ισότητες μπορούν να ερμηνευθούν και ως ισότητες πινάκων αντικαθιστώντας τα διαφορικά με τους αντίστοιχους πίνακες Jacobi. Για παράδειγμα η (ι) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί και ως $J(\lambda f)(a)=\lambda J(f)(a), \lambda\in R$, (γινόμενο πίνακα με αριθμό) και η (ιι) $J(f+g)(a)=J(f)(a)+J(g)(a)$ (άθροισμα πινάκων).

<u>Παραδείγματα</u>: 1) Κάθε πολυώνυμο $P:(x_1,...,x_n)\in R^n\to P(x_1,...,x_n)\in R$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση στον R^n, μάλιστα οι μερικές παράγωγοί του είναι πάλι πολυώνυμα και συνεπώς συνεχείς συναρτήσεις στον R^n.
Επειδή ένα πολυώνυμο είναι εξορισμού γραμμικός συνδυασμός μονώνυμων (δηλαδή συναρτήσεων της μορφής $x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$, όπου $k_1,...,k_n\in N\bigcup\{0\}$) είναι αρκετό από τους κανόνες (ι) και (ιι) να αποδείξουμε τον ισχυρισμό για μονώνυμα. Έστω λοιπόν $f(x_1,...,x_n)=x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$, $k_i\geq 1$, $1\leq i\leq n$, παρατηρούμε ότι

$f(x_1,...,x_n)=(\pi_1(x))^{k_1}\cdot(\pi_2(x))^{k_2}...(\pi_n(x))^{k_n}$ όπου $x=(x_1,...,x_n)$ και $\pi_1,...,\pi_n$ οι προβολές του R^n στον R. Επειδή οι προβολές είναι γραμμικές συναρτήσεις και άρα διαφορίσιμες, από τον κανόνα (ιιι) (και με επαγωγή στον βαθμό του μονώνυμου) έπεται το συμπέρασμα. Το διαφορικό ενός μονώνυμου $f(x_1,...,x_n)=x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$ στη θέση $a=(a_1,...,a_n)\in R^n$ υπολογίζεται εύκολα αφού οι μερικές παράγωγοι του μονώνυμου μπορούν να υπολογιστούν και αυτές εύκολα:
$\frac{\partial f}{\partial x_j}=k_jx_1^{k_1}...x_j^{k_j-1}...x_n^{k_n}, 1\leq j\leq n$ (συνεχείς συναρτήσεις στον R^n).
Έπεται ότι,

$$Df(a)(h)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n=$$

$$\left(k_1a_1^{k_1-1}a_2^{k_2}...a_n^{k_n}\right)h_1+...+\left(k_na_1^{k_1}a_2^{k_2}...a_{n-1}^{k_{n-1}}a_n^{k_n-1}\right)h_n$$

όπου $h=(h_1,...,h_n)\in R^n$.
Ιδιαίτερα για ένα μονώνυμο δύο μεταβλητών, $f(x,y)=x^\kappa\cdot y^\lambda$ έχουμε: $Df(a_1,a_2)(h_1,h_2)=\kappa a_1^{\kappa-1}a_2^{\lambda}h_1+\lambda a_1^{\kappa}a_2^{\lambda-1}h_2$.
Είναι βέβαια τώρα σαφές ότι οι μερικές παράγωγοι ενός πολυωνύμου είναι και αυτές <u>πολυώνυμα</u> και άρα <u>συνεχείς</u> συναρτήσεις.

2)Οι ρητές συναρτήσεις, δηλαδή τα πηλίκα πολυωνύμων $f\left(x_1,...,x_n\right)=\dfrac{P\left(x_1,...,x_n\right)}{Q\left(x_1,...,x_n\right)}$, όπου $Q\neq 0$ είναι διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Σημειώνουμε κατ' αρχήν ότι το πεδίο ορισμού U μιας ρητής συνάρτησης όπως παραπάνω είναι ανοικτό υποσύνολο του R^n, αφού $U=R^n-Q^{-1}\left(\{0\}\right)$ και Q συνεχής στο R^n.

Έπεται αμέσως από τον κανόνα διαφόρισης (ιν) ότι η $f=\dfrac{P}{Q}$ είναι διαφορίσημη στο U ως πηλίκο διαφορισίμων συναρτήσεων.

Ο ίδιος κανόνας μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το διαφορικό της f στο U. Σημειώνουμε ακόμη ότι αντίστοιχος κανόνας για συναρτήσεις μιας μεταβλητής συμπεραίνει ότι οι μερικές παράγωγοι της f στο U είναι <u>συνεχείς</u> συναρτήσεις (αφού είναι ρητές συναρτήσεις).

Ας υπολογίσουμε το διαφορικό της ρητής συνάρτησης $\phi\left(x,y\right)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ στο πεδίο ορισμού της που είναι βέβαια το $U=R^2-\left\{\left(0,0\right)\right\}$. Έστω $a=\left(a_1,a_2\right)\in R^2$ με $a\neq\left(0,0\right)$.

Θέτομε $f\left(x,y\right)=xy$ και $g\left(x,y\right)=x^2+y^2$. Από τον κανόνα (ιν) έχουμε:

$$D\phi\left(a\right)\left(h\right)=\frac{g\left(a\right)Df\left(a\right)\left(h\right)-f\left(a\right)Dg\left(a\right)\left(h\right)}{\left(g\left(a\right)\right)^2}\quad(1),\quad h=\left(h_1,h_2\right).$$

Από το προηγούμενο παράδειγμα υπολογίζουμε, $Df\left(a\right)\left(h\right)=a_2h_1+a_1h_2, Dg\left(a\right)\left(h\right)=2a_1h_1+2a_2h_2$, $g\left(a\right)=a_1^2+a_2^2$ και $f\left(a\right)=a_1a_2$. Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε:

$$D\phi\left(a\right)\left(h\right)=\frac{\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(a_2h_1+a_1h_2\right)-2a_1a_2\left(a_1h_1+a_2h_2\right)}{\left(a_1^2+a_2^2\right)^2}=\frac{\left(a_1^2-a_2^2\right)\left(a_1h_2-a_2h_1\right)}{\left(a_1^2+a_2^2\right)^2}$$

3)Έστω $f\left(x,y,z\right)=x^2+y+z$. Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $x_0=\left(1,0,0\right)$ στην κατεύθυνση $h=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Λύση Η f είναι διαφορίσημη συνάρτηση στον R^3 ως πολυωνυμική. Οι μερικές παράγωγοι της f στον R^3 είναι οι $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial f}{\partial y}=1$ και $\dfrac{\partial f}{\partial z}=1$. Συνεπώς $\nabla f\left(x,y,z\right)=\left(2x,1,1\right)$ και $\nabla f\left(x_0\right)=\nabla f\left(1,0,0\right)=\left(2,1,1\right)$. Έπεται ότι,

$$D_hf\left(x_0\right)=Df\left(x_0\right)\left(h\right)=\nabla f\left(x_0\right)\cdot h=\left(2,1,1\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{3}.$$

Παρατηρούμε ότι ο έλεγχος της διαφορισιμότητας μιας συνάρτησης με χρήση του ορισμού (του διαφορικού) παρουσιάζει στην πράξη αρκετές δυσκολίες. Υπάρχει όμως ένα κριτήριο που διευκολύνει αυτή την διαδικασία που έχει να κάνει με την ύπαρξη και την <u>συνέχεια</u> των μερικών παραγώγων. Η διατύπωση αυτού του πολύ χρήσιμου κριτηρίου αλλά και άλλων αποτελεσμάτων που θα ακολουθήσουν διευκολύνεται από τον ακόλουθο ορισμό.

5.6 Ορισμός. Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό και $f : U \to R$ συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f είναι <u>συνεχώς διαφορίσιμη ή της κλάσης</u> $C^{(1)}$, αν όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}$ της f στο U υπάρχουν και είναι <u>συνεχείς</u> συναρτήσεις.

Αν $a \in R^n$, με τον όρο <u>περιοχή του a</u>, θα εννοούμε ένα σύνολο V ώστε να υπάρχει $\delta > 0$ με $\mathrm{B}(a, \delta) \subseteq V$. Ισοδύναμα, το V είναι περιοχή του a, αν $a \in \operatorname{int}(V)$

5.7 Θεώρημα. Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό, $a \in U$ και $f : U \to R$ συνάρτηση. Αν οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν σε μια περιοχή του a και είναι συνεχείς στο a, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο a. Ιδιαίτερα έπεται ότι αν η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο U τότε είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του U.

Απόδειξη Η απόδειξη χρησιμοποιεί το θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού. Έστω $\delta > 0 : \mathrm{B}(a, \delta) \subseteq U$ και ώστε όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}$ να ορίζονται στην σφαίρα $\mathrm{B}(a, \delta)$ και να είναι συνεχείς στο a. Πρέπει

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left| f(a+h) - f(a) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot h_k \right) \right|}{\|h\|} = 0 .$$

Έστω $h \in R^n$ με $h = (h_1, ..., h_n) \neq 0$ ώστε $\|h\| < \delta$, συνεπώς $a + h \in \mathrm{B}(a, \delta)$, $a = (a_1, ..., a_n)$.

Συνδέουμε τα σημεία $z_0 = a + h$ και $z_n = a$ με μία πολυγωνική γραμμή $\mathrm{P} = [z_0, z_1] \cup ... \cup [z_{n-1}, z_n] \subseteq \mathrm{B}(a, \delta)$ της οποίας οι πλευρές είναι παράλληλες με τους άξονες που ορίζουν τα διανύσματα $e_1, ..., e_n$ της κανονικής βάσης του R^n. Κατ' αυτόν τον τρόπο η f περιορισμένη στο καθένα από τα ευθύγραμμα τμήματα $[z_{k-1}, z_k], k = 1, ..., n$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση μιας μεταβλητής , από την υπόθεσή μας, αφού το $[z_{k-1}, z_k]$ είναι παράλληλο με την ευθεία $\{te_k : t \in R\}$. Έτσι θέτομε

$z_0 = a + h = (a_1 + h_1, ..., a_n + h_n)$,

$z_1 = (a_1, a_2 + h_2, ..., a_n + h_n)$,

$z_2 = (a_1, a_2, a_3 + h_3, ..., a_n + h_n)$

……………………………

$z_{n-1} = (a_1, ..., a_{n-1}, a_n + h_n)$

$z_n = (a_1, ..., a_n)$

Κατόπιν γράφουμε $f(a+h) - f(a) = f(z_0) - f(z_n) = \big(f(z_0) - f(z_1)\big) + \big(f(z_1) - f(z_2)\big) + \ldots + \big(f(z_{n-2}) - f(z_{n-1})\big) + \big(f(z_{n-1}) - f(z_n)\big)$(Αυτό λέγεται τηλεσκοπικό άθροισμα, γιατί κάθε όρος απαλείφεται με τον προηγούμενο ή τον επόμενό του, εκτός από τον πρώτο και τον τελευταίο).

Από το θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού αυτή η παράσταση μπορεί να γραφεί ως $f(a+h)-f(a)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1)h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(y_2)h_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(y_n)h_n$, όπου $y_1=(c_1,a_2+h_2,\ldots,a_n+h_n)$ και το c_1 είναι ανάμεσα στα a_1 και a_1+h_1

$y_2=(a_1,c_2,a_3+h_3,\ldots,a_n+h_n)$ και το c_2 είναι ανάμεσα στα a_2 και $a_2+h_2,\ldots,$

$y_n=(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},c_n)$ και το c_n είναι ανάμεσα στα a_n και a_n+h_n.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε,

$$\left|f(a+h)-f(a)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k\right)\right|=$$

$$\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right)h_1+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(y_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)h_n\right|.$$

Από την τριγωνική ανισότητα, αυτή η παράσταση είναι μικρότερη ή ίση από την

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right||h_1|+\ldots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(y_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right||h_n|\le$$

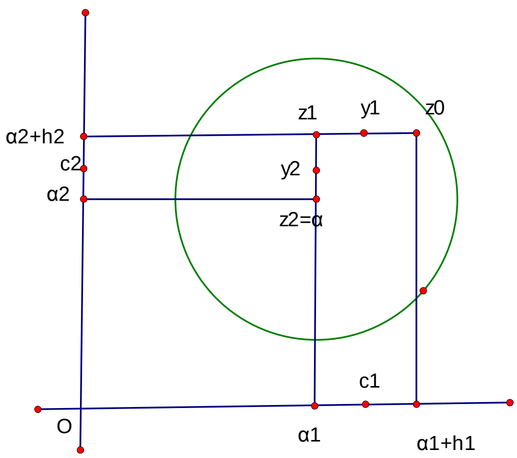
$$\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right|+\ldots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(y_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right|\right)\|h\|$$ αφού $|h_k|\le\|h\|$ για κάθε $k=1,2,\ldots,n$

Έπεται ότι

$$\frac{\left|f(a+h)-f(a)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k\right)\right|}{\|h\|}\le\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right|+\ldots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(y_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right|.$$

Αλλά οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς, από την υπόθεσή μας, στο σημείο a. Έπεται ότι το δεξιό μέλος της τελευταίας ανισότητας τείνει στο 0 όταν το $\|h\|\to 0$, επομένως και το αριστερό μέλος επίσης τείνει στο 0.

Παρατήρηση Η ιδέα της απόδειξης φαίνεται καλύτερα όταν $n=2$.



$z_0=a+h=(a_1+h_1,a_2+h_2)$

$z_1=(a_1,a_2+h_2)$

$z_2=(a_1,a_2)$

Η πολυγωνική γραμμή είναι η $\mathrm{P}=[z_0,z_1]\cup[z_1,z_2]$

Γράφουμε τότε

$$f(a+h)-f(a)=f(z_0)-f(z_2)=$$
$$(f(z_0)-f(z_1))+(f(z_1)-f(z_2))$$

Παραδείγματα και εφαρμογές.

1)Να εξεταστούν ως προς την διαφορισιμότητα οι συναρτήσεις (α) $f(x)=\|x\|$ και (β) $g(x)=\left(f(x)\right)^2=\|x\|^2, x\in R^n$.

Λύση Έστω $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$.

(α) Οι μερικές παράγωγοι της $f(x_1,...,x_n)=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$ είναι $\frac{\partial f}{\partial x_j}=\frac{x_j}{\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}}=\frac{x_j}{\|x\|}, j=1,2,...,n$ στο σύνολο $U=R^n-\{0\}$ και βέβαια είναι συνεχείς στο U. Επομένως η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο U και άρα διαφορίσιμη εκεί.

Αν $a=(a_1,...,a_n)\in U$ τότε $Df(a)(h)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j=\nabla f(a)\cdot h$, όπου $h=(h_1,...,h_n)\in R^n$.

Η δε κλίση της f στο a είναι $\nabla f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)=\left(\frac{a_1}{\|a\|},...,\frac{a_n}{\|a\|}\right)$.

Η εξίσωση του εφαπτόμενου επίπεδου του γραφήματος της f στο $(a, f(a))$ είναι:

$$z=f(a)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1-a_1)+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n-a_n)=$$

$$\|a\|+\frac{a_1}{\|a\|}(x_1-a_1)+...+\frac{a_n}{\|a\|}(x_n-a_n),\ x=(x_1,...,x_n)\in R^n.$$

Η f δεν είναι διαφορίσιμη στο 0. Πράγματι, αν $j\in\{1,2,...,n\}$ τότε $f(0,...,0,x_j,0,...,0)=|x_j|$ και η συνάρτηση αυτή (ως συνάρτηση της μεταβλητής x_j) δεν είναι διαφορίσιμη στο 0. Επομένως οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0,0,....,0)$ δεν υπάρχουν.

Παρατηρήση. α) Το γράφημα της f όταν $n=2$, οπότε γράφουμε $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},(x,y)\in R^2$ είναι ένας ανεστραμμένος ορθός κώνος με την κορυφή στο $(0,0,0)$. Ο κώνος αυτός σχηματίζεται με την περιστροφή μιας ημιευθείας που διέρχεται από το $(0,0,0)$ γύρω από τον άξονα $z'z$ σε γωνία $\frac{\pi}{4}(=45^0)$.

(β)Οι μερικές παράγωγοι της $g(x)=\|x\|^2=x_1^2+...+x_n^2$ είναι $\frac{\partial g}{\partial x_j}=2x_j, j=1,2,...,n$ οι οποίες είναι συνεχείς συναρτήσεις στον R^n. Έπεται ότι η g είναι συνεχώς διαφορίσιμη στον R^n και άρα διαφορίσιμη συνάρτηση στον R^n.

Αν $a=(a_1,...,a_n)$ τότε, $\nabla f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)=(2a_1,...,2a_n)$ και $Df(a)(h)=\nabla f(a)\cdot h=2a_1h_1+...+2a_nh_n=2a\cdot h$.

Η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο a είναι: $z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) =$

$\|a\|^2 + 2a_1(x_1 - a_1) + ... + 2a_n(x_n - a_n) = -\|a\|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$.

2)Η συνάρτηση εσωτερικό γινόμενο $g : R^n \times R^n \to R : g(x, y) = x \cdot y$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στον $R^n \times R^n \cong R^{2n}$.

Λύση Ο χώρος $R^n \times R^n$ ταυτίζεται φυσιολογικά με τον Ευκλείδειο χώρο R^{2n} μέσω της κανονικής απεικόνισης $((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) \in R^n \times R^n \to (x_1,...,x_n,y_1,...,y_n) \in R^{2n}$.

Έτσι έχουμε $g((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) = g(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$

Συνεπώς $\frac{\partial g}{\partial x_j} = y_j$ και $\frac{\partial g}{\partial y_j} = x_j,\ j = 1,2,...,n$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι βέβαια συνεχείς στον R^n αφού είναι γραμμικές (η $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ ταυτίζεται με την j προβολή του R^{2n} και $\frac{\partial g}{\partial y_j}$ με την $j+n$ προβολή του R^{2n}. Έτσι η g είναι συνεχώς διαφορίσιμη στον R^{2n}.

Αν $(a_1, a_2) = (a_{11},...,a_{1n},a_{21},...,a_{2n}) \in R^n \times R^n$ τότε $\nabla g(a_1, a_2) = (a_2, a_1) = (a_{21},...,a_{2n},a_{11},...,a_{1n})$ και $Dg(a_1,a_2)(h_1,h_2) = a_2 \cdot h_1 + a_1 \cdot h_2, (h_1,h_2) \in R^n \times R^n$.

Παρατήρηση. Για $n = 1$ η g συμπίπτει με το συνηθισμένο γινόμενο πραγματικών αριθμών: $g(x, y) = xy, (x, y) \in R^2$. Συνεπώς, $\frac{\partial g}{\partial x} = y, \frac{\partial g}{\partial y} = x$ και $Dg(a_1,a_2)(h_1,h_2) = a_2h_1 + a_1h_2$ όπου $(a_1,a_2) \in R^2$ και $(h_1,h_2) \in R^2$.

Σημειώνουμε ακόμη ότι το διαφορικό του εσωτερικού γινομένου $g(x, y) = x \cdot y, (x, y) \in R^n \times R^n$ μπορεί να βρεθεί και με ένα απευθείας υπολογισμό (αφού γνωρίζουμε τις μερικές παραγώγους) με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz.

3) Έστω $f : U \subseteq R^n \to R^n$ διαφορίσιμη συνάρτηση στο $a = (a_1,...,a_n) \in U$. Αν το διαφορικό $Df(a) : R^n \to R^n$ της f στο a είναι $1-1$ συνάρτηση (δηλαδή ο πίνακας Jacobi $Jf(a)$ της f στο a είναι αντιστρέψιμος), τότε η ρίζα a της εξίσωσης, $f(x) = f(a), x \in U$ είναι μεμονωμένη. Δηλαδή, υπάρχει $\delta > 0 : \mathrm{B}(a,\delta) \subseteq U$ και αν $x \in \mathrm{B}(a,\delta)$ τότε, $f(x) = f(a) \Rightarrow x = a$.

Λύση. Θέτομε $\mathrm{T} = Df(a) : R^n \to R^n$. Η Τ είναι $1-1$ και γραμμική άρα είναι και επί του R^n και η αντίστροφή της είναι <u>συνεχής</u> αφού είναι γραμμική. Θέτομε για $h \in R^n - \{0\}$ με $h + a \in U, \varepsilon_a(h) = f(a+h) - f(a) - \mathrm{T}(h)$.

Η διαφορισιμότητα της f στο a ισοδυναμεί με $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left\|\varepsilon_a\left(h\right)\right\|}{\|h\|}=0\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varepsilon_a\left(h\right)}{\|h\|}=0$ (1)

Έπεται ότι, $\mathrm{T}^{-1}\left(\dfrac{\varepsilon_a\left(h\right)}{\|h\|}\right)=\dfrac{1}{\|h\|}\mathrm{T}^{-1}\left(\varepsilon_a\left(h\right)\right)\xrightarrow[h\to 0]{}0$, αφού η T^{-1} είναι συνεχής στο 0.

Έστω $\delta>0:0<\|h\|<\delta\Rightarrow\dfrac{\left\|\mathrm{T}^{-1}\left(\varepsilon_a\left(h\right)\right)\right\|}{\|h\|}<\dfrac{1}{2}$. . Υποθέτουμε ότι το δ είναι αρκετά μικρό ώστε $\|h\|<\delta\Rightarrow a+h\in U$.

Παρατηρούμε ότι $\|h\|<\delta\Rightarrow\left\|\mathrm{T}^{-1}\left(\varepsilon_a\left(h\right)\right)\right\|\le\dfrac{1}{2}\|h\|$, (3)

Έστω ότι για κάποιο $h\in R^n:0<\|h\|<\delta$, ισχύει ότι $f\left(a+h\right)=f\left(a\right)$ ($\Leftrightarrow f\left(x\right)-f\left(a\right)=0$ για κάποιο $x\in\mathrm{B}\left(a,\delta\right)$). Τότε, $\varepsilon_a\left(h\right)=f\left(a+h\right)-f\left(a\right)-\mathrm{T}\left(h\right)=-\mathrm{T}\left(h\right)$. Άρα από την (3) θα έχουμε, $\left\|\mathrm{T}^{-1}\left(\varepsilon_a\left(h\right)\right)\right\|=\left\|\mathrm{T}^{-1}\left(-\mathrm{T}\left(h\right)\right)\right\|=\|h\|<\dfrac{1}{2}\|h\|$ άτοπο.

Συνεπώς $x\in\mathrm{B}\left(a,\delta\right)$ και $f\left(x\right)=f\left(a\right)\Rightarrow x=a$.

4) Έστω $p\in R$ με $p>1$ και $f\left(x,y\right)=\left(|x|^p+|y|^p\right)^{\frac{1}{p}},\left(x,y\right)\in R^2$. Να αποδειχθεί ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο $R^2-\left\{\left(0,0\right)\right\}$ και <u>δεν</u> είναι διαφορίσιμη στο $\left(0,0\right)$.

Λύση Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $g\left(x\right)=|x|^p, x\in R$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο R, εφόσον $g'\left(x\right)=\begin{cases}p|x|^{p-1}, x>0\\ 0, x=0\\ -p|x|^{p-1}, x<0\end{cases}$

(μάλιστα η g' είναι γνήσια αύξουσα στο R και άρα η g γνήσια κυρτή).

Έπεται ότι οι μερικές παράγωγοι της f στο $R^2-\left\{\left(0,0\right)\right\}$ είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\left(|x|^p+|y|^p\right)^{\frac{1}{p}-1}\cdot|x|^{p-1}, x>0, y\in R\\ -\left(|x|^p+|y|^p\right)^{\frac{1}{p}-1}\cdot|x|^{p-1}, x<0, y\in R\\ 0, x=0, y\in R-\left\{0\right\}\end{cases}$$

Ανάλογα, $$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}\left(|x|^p+|y|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot|y|^{p-1}, y>0, x\in R\\ -\left(|x|^p+|y|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot|y|^{p-1}, y<0, x\in R\\ 0, y=0, x\in R-\left\{0\right\}\end{cases}$$

Οι μερικές παράγωγοι στο $(0,0)$ έχουν ως εξής: Αν $x \in R$ και $x \neq 0$ τότε $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{\left(|x|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, x>0 \\ -1, x<0 \end{cases}$. Άρα η $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ δεν υπάρχει.

Ανάλογα, η $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ δεν υπάρχει.

Έτσι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Επειδή όπως εύκολα εξακριβώνεται η $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $R^2 - \{(0,0)\}$ η f είναι $C^{(1)}$ στο $R^2 - \{(0,0)\}$ και άρα διαφορίσιμη εκεί.

Επίσης η f είναι συνεχής συνάρτηση στο R^2 αφού είναι σύνθεση συνεχών.

Παρατήρηση. Ανάλογα αντιμετωπίζεται και η συνάρτηση $f(x) = \|x\|_p = \left(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, όπου $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ και $p > 1$. Η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη $\left(C^{(1)}\right)$ στον $R^n - \{0\}$ και δεν έχει μερικές παραγώγους στο $(0,\ldots,0)$. Σημειώνουμε ότι η $\|\cdot\|_p : R^n \to R$ είναι μια ισοδύναμη νόρμα στον R^n.

5)Έστω $f_1, \ldots, f_n : R \to R$ διαφορίσιμες στα σημεία $a_1, \ldots, a_n$ του R αντίστοιχα. Ορίζουμε, $f : R^n \to R$: $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n)$. Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $a = (a_1, \ldots, a_n) \in R^n$ και $Df(a)(h) = f_1'(a_1) \cdot h_1 + \ldots + f_n'(a_n) \cdot h_n$, όπου $h = (h_1, \ldots, h_n) \in R^n$. Ιδιαίτερα έπεται ότι, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f_k'(a_k), k = 1, 2, \ldots n$

Λύση. Θέτομε $\mathrm{T}(h_1, \ldots, h_n) = f_1'(a_1) \cdot h_1 + \ldots + f_n'(a_n) \cdot h_n$, $(h_1, \ldots, h_n) \in R^n$.

Τότε έχουμε ότι: αν $h = (h_1, \ldots, h_n) \neq 0$: $\frac{|f(a+h) - f(a) - \mathrm{T}(h)|}{\|h\|} =$

$$= \frac{\left|\left(f_1(a_1+h_1) - f_1(a_1) - f_1'(a_1)h_1\right) + \ldots + \left(f_n(a_n+h_n) - f_n(a_n) - f_n'(a_n)h_n\right)\right|}{\|h\|} \leq$$

$$\frac{\left|f_1(a_1+h_1) - f_1(a_1) - f_1'(a_1)h_1\right|}{\|h\|} + \ldots + \frac{\left|f_n(a_n+h_n) - f_n(a_n) - f_n'(a_n)h_n\right|}{\|h\|} \leq$$

$$\frac{\left|f_1(a_1+h_1) - f_1(a_1) - f_1'(a_1)h_1\right|}{|h_1|} + \ldots + \frac{\left|f_n(a_n+h_n) - f_n(a_n) - f_n'(a_n)h_n\right|}{|h_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Συνεπώς $Df(a) = \mathrm{T}$.

Παρατήρηση Από την άσκηση αυτή προκύπτει εύκολα ότι

1)Αν οι $f_1, \ldots, f_n$ είναι διαφορίσιμες στο R τότε και η $f : R^n \to R$ είναι διαφορίσιμη στον R^n.

2) Αν οι $f_1, \ldots, f_n$ είναι διαφορίσιμες στο R και κάποια από αυτές δεν έχει συνεχή παράγωγο στο R π.χ. η f_1 τότε η f είναι μεν διαφορίσιμη στον R^n αλλά δεν έχει όλες τις μερικές παραγώγους της συνεχείς στο R.

Πράγματι από την προηγούμενη (5) έπεται ότι: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,...,a_i,...,a_n)=f_i'(a_i)$, $a=(a_1,...,a_n)\in R^n$, $i=1,2,...,n$. Άρα η $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ δεν είναι συνεχής στο R^n εφόσον η f_1' δεν είναι συνεχής στο R.(Ακριβέστερα έχουμε ότι, $f_i'\circ\pi_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}, i=1,2,...,n$, απ' όπου έπεται ότι η $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ είναι συνεχής στο R^n ακριβώς όταν η f_i' είναι συνεχής στο R)

Με βάση την παρατήρηση (2) μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε παραδείγματα συναρτήσεων $f:R^n\to R$ οι οποίες είναι διαφορίσιμες αλλά όχι με συνεχείς μερικές παραγώγους. Για παράδειγμα έστω $f_1(x)=\begin{cases}x^2\cdot\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ και $f_2(x)=x^2, x\in R$. Η $f_2(x)=x^2$ είναι βέβαια συνεχώς διαφορίσιμη στο $R^2,(f_2'(x)=2x)$, όμως $f_1'(x)=\begin{cases}2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ η οποία <u>δεν</u> είναι συνεχής στο 0. Έπεται ότι, η συνάρτηση, $f(x,y)=f_1(x)+f_2(y)=\begin{cases}x^2\cdot\sin\frac{1}{x}+y^2, x\neq 0, y\in R\\ y^2, x=0, y\in R\end{cases}$ είναι μεν διαφορίσιμη στο R^2, αλλά <u>δεν</u> έχει συνεχείς μερικές παραγώγους (η $\frac{\partial f}{\partial x}$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$).

Ένα άλλο τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x,y)=f_1(x)+f_1(y),(x,y)\in R^2$

6)Έστω $f:U\subseteq R^n\to R^m$ διαφορίσιμη στο $a\in U$ (U ανοικτό στο R^n).
Τότε υπάρχουν $\delta>0$ ώστε $\mathrm{B}(a,\delta)\subseteq U$ και $\kappa>0:0<\|h\|<\delta\Rightarrow\|f(a+h)-f(a)\|<\kappa\|h\|$.

Λύση Έστω $\varepsilon=1$. Από τον ορισμό του διαφορικού υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε αν $0<\|h\|<\delta$ τότε $\|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)\|<\varepsilon\|h\|=\|h\|$.

Έπεται ότι αν $\|h\|<\delta$ τότε,

$$\|f(a+h)-f(a)\|=\|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)+Df(a)(h)\|\leq$$
$$\|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)\|+\|Df(a)(h)\|<\|h\|+\mathrm{M}\cdot\|h\|=(1+\mathrm{M})\cdot\|h\|.$$

Θέτομε κ=1+Μ και έχουμε το συμπέρασμα. Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα Lipschitz της γραμμικής συνάρτησης $Df(a):R^n\to R^m$. Το γεγονός ότι οι γραμμικές απεικονίσεις είναι Lipschitz έχει αποδειχθεί προηγουμένως.

Παρατήρηση. Πρέπει να είναι σαφές ότι η ανισότητα αυτή συμπεραίνει και την <u>συνέχεια</u> της f στο a.

7) Έστω $\mathrm{T}: R^n \to R^m$ γραμμική συνάρτηση. Υποθέτομε ότι: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\|\mathrm{T}(h)\|}{\|h\|}=0$ τότε $\mathrm{T}=0$ (δηλαδή $\mathrm{T}(x)=0$ για κάθε $x\in R^n$).

Λύση. Έστω $\mathrm{T}=(\mathrm{T}_1,...,\mathrm{T}_m)$, τότε κάθε $\mathrm{T}_i, 1\le i\le m$ είναι γραμμική και αν $h\neq 0$ τότε: $\dfrac{|\mathrm{T}_i(h)|}{\|h\|}\le\dfrac{\|\mathrm{T}(h)\|}{\|h\|}\le\sqrt{m}\,\dfrac{\max\{|\mathrm{T}_i(h)|:1\le i\le m\}}{\|h\|}$ (Πρβλ. την απόδειξη της μοναδικότητας του διαφορικού καθώς και την απόδειξη της Πρότασης 1.5).
Έπεται ότι αν αποδείξουμε το αποτέλεσμα για πραγματικές γραμμικές συναρτήσεις $(m=1)$, τότε θα ισχύει και για κάθε γραμμική $\mathrm{T}: R^n \to R^m$.
Υποθέτομε λοιπόν ότι $m=1$. Τότε θα έχουμε ότι υπάρχει $a=(a_1,...,a_n)\in R^n : \mathrm{T}(h)=a\cdot h=a_1h_1+...+a_nh_n$ για κάθε $h=(h_1,...,h_n)\in R^n$. Έστω λοιπόν $h=(h_1,...,h_n)\neq 0$ τότε $\dfrac{\mathrm{T}(h)}{\|h\|}=\dfrac{a_1h_1+...+a_nh_n}{\|h\|}$ (1).

Αν $h_1\neq 0$ και $h_2=...=h_n=0$ τότε από την (1) έπεται ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\mathrm{T}(h)}{\|h\|}=\dfrac{a_1h_1}{|h_1|}\xrightarrow[h_1\to 0]{}0$ άρα κατ' ανάγκη $a_1=0$ εφόσον $\dfrac{a_1h_1}{|h_1|}=\begin{cases}a_1, & \text{αν } h_1>0\\ -a_1, & \text{αν } h_1<0\end{cases}$.
Ανάλογα θέτοντας $h_1=0=h_3=...=h_n=0$ και $h_2\neq 0$ λαμβάνουμε $a_2=0$, και τελικά (με τον ίδιο τρόπο) $a_1=a_2=...=a_n=0$. Συνεπώς $\mathrm{T}=0$.

Παρατηρήσεις. (α) Έπεται ιδιαίτερα από την άσκηση αυτή ότι: αν $a,\beta\in R$ τότε: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{ax+\beta y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \Rightarrow a=\beta=0.$ Ανάλογη παρατήρηση ισχύει και για οποιονδήποτε αριθμό μεταβλητών $x_1,...,x_n$.
(β) Το επιχείρημα που αποδεικνύει την παραπάνω άσκηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη της μοναδικότητας του διαφορικού συνάρτησης.

8) Έστω $f: U\subseteq R^2\to R$ συνάρτηση και $a\in U$ ώστε οι $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a),\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ υπάρχουν. Υποθέτουμε ότι το όριο ($h=(h_1,h_2)$)
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)-\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot h_1+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot h_2\right)}{\|h\|}=l$ υπάρχει στο R. Αποδείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο a. (δηλαδή ότι $l=0$).

Λύση Έπεται από την υπόθεσή μας ότι τα όρια
$$\lim_{h_1\to 0}\frac{f(a+(h_1,0))-f(a)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)h_1}{|h_1|}=l=\lim_{h_2\to 0}\frac{f(a+(0,h_2))-f(a)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)h_2}{|h_2|}$$
υπάρχουν και είναι ίσα με l, όμως από την πρώτη υπόθεσή μας τα όρια αυτά είναι ίσα με $l=0$ (εφόσον οι μερικές παράγωγοι στο a υπάρχουν).

9) Να εξετασθεί ως προς την διαφορισιμότητα (ύπαρξη και συνέχεια μερικών παραγώγων, διαφορικού κ.λ.π.) η συνάρτηση $f(x,y)=|x|+|y|,(x,y)\in R^2$.

Λύση Είναι εύκολο να δούμε ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο <u>ανοικτό</u> υποσύνολο $U=\{(x,y)\in R^2 : x\neq 0 \text{ και } y\neq 0\}=R^2-\{(x,y)\in R^2 : \text{ είτε } x=0 \text{ ή } y=0\}$. Πράγματι, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $x>0$ και $y>0$, τότε $f(x,y)=x+y$, άρα η f είναι <u>γραμμική</u> στο $U_1=\{(x,y): x>0 \text{ και } y>0\}\subseteq U$ και $Df(a,b)=f$ για κάθε $(a,b)\in U_1$.

Οι μερικές παράγωγοι της f στο U_1 είναι $\frac{\partial f}{\partial x}=1=\frac{\partial f}{\partial y}$ άρα συνεχείς εκεί ($Df(a,b)(h_1,h_2)=h_1+h_2, a>0$ και $b>0$).

(β) $x<0$ και $y>0$, τότε $f(x,y)=y-x$ και η f είναι γραμμική στο $U_2=\{(x,y): x<0 \text{ και } y>0\}$. $Df(a,b)=f$ για κάθε $(a,b)\in U_2$ και $\frac{\partial f}{\partial x}=-1,\frac{\partial f}{\partial y}=1$ στο U_2. Επομένως $Df(a,b)(h_1,h_2)=-h_1+h_2$.

(γ) $x<0$ και $y<0$, τότε $f(x,y)=-x-y$, η f είναι γραμμική στο $U_3=\{(x,y): x<0 \text{ και } y<0\}$ και $Df(a,b)=f$ για κάθε $(a,b)\in U_3$ δηλαδή $Df(a,b)(h_1,h_2)=-h_1-h_2$ και $\frac{\partial f}{\partial x}=-1=\frac{\partial f}{\partial y}$ στο U_3.

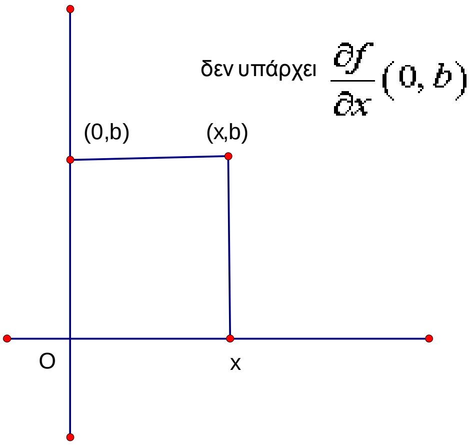
(δ) $x>0$ και $y<0$, τότε $f(x,y)=x-y$, η f είναι γραμμική στο $U_4=\{(x,y): x>0 \text{ και } y<0\}$ και $Df(a,b)=f$ για κάθε $(a,b)\in U_4$ δηλαδή $Df(a,b)(h_1,h_2)=h_1-h_2,(h_1,h_2)\in R^2$. $\frac{\partial f}{\partial x}=1,\frac{\partial f}{\partial y}=-1$ στο U_4.

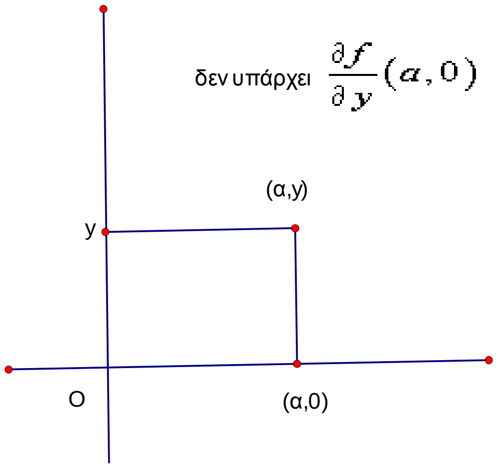
Έστω τώρα $(a,b)\in R^2$, με $a=0$ ή $b=0$ θα εξετάσουμε την ύπαρξη των $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ στο (a,b). Υποθέτουμε ότι $a=0$ τότε αν $x\neq 0, \frac{f(x,b)-f(0,b)}{x-0}=\frac{|x|+|b|-|b|}{x}=\frac{|x|}{x}$

Έτσι το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f(x,b)-f(0,b)}{x-0}$ και άρα η $\frac{\partial f}{\partial x}(0,b)$ <u>δεν</u> υπάρχει.

Έστω τώρα $b=0$. Τότε αν $y\neq 0, \frac{f(a,y)-f(a,0)}{y-0}=\frac{|a|+|y|-|a|}{y}=\frac{|y|}{y}$

Έτσι το όριο $\lim_{y\to 0}\frac{f(a,y)-f(a,0)}{y-0}$ αυτό και άρα η $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0)$ <u>δεν</u> υπάρχει.



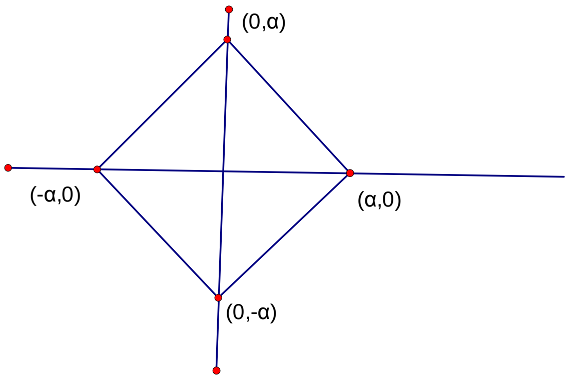


Έπεται ότι στα σημεία (a,b) των αξόνων <u>δεν</u> υπάρχουν είτε η $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ (αν $a=0$) ή η $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ (αν $b=0$).

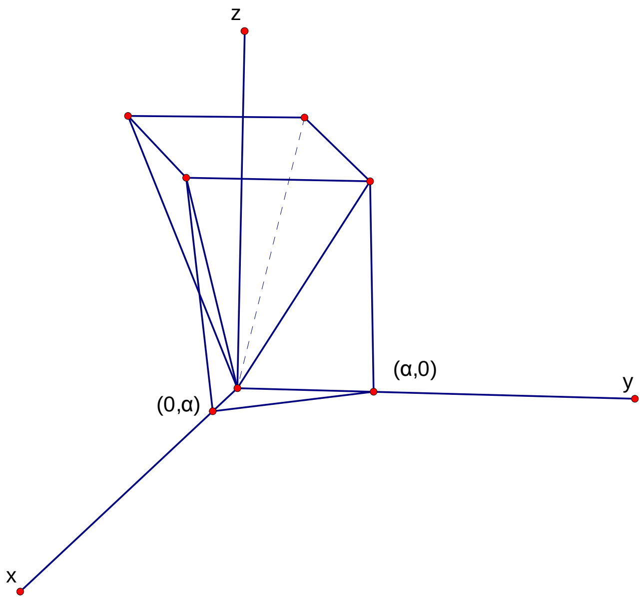
Έτσι η f δεν έχει διαφορικό στα σημεία των αξόνων.

(Ας σημειωθεί ότι αν $b\neq 0$ και $a=0$ η $\frac{\partial f}{\partial y}(0,b)$ υπάρχει και αν $a\neq 0$ και $b=0$ η $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0)$ υπάρχει. Αν $a=0=b$ τότε <u>δεν</u> υπάρχουν ούτε η $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ ούτε η $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$).

Παρατήρηση. Αν $a>0$ τότε το σύνολο $\{(x,y)\in R^2 : |x|+|y|=a\}$ είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,a),(-a,0),(0,-a),(a,0)$.



Έπεται ότι το γράφημα της $f(x)=|x|+|y|$ είναι μια ανεστραμμένη τετραγωνική πυραμίδα με κορυφή στο $(0,0,0)$



10) Να εξεταστεί ως προς την διαφορισιμότητα (ύπαρξη και συνέχεια μερικών παραγώγων, διαφορικού κτλ) η συνάρτηση $f : R^2 \to R : f(x,y) = \sqrt[3]{xy} = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$

Λύση Η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο ανοικτό σύνολο $U = \{(x,y) \in R^2 : x \neq 0 \text{ και } y \neq 0\} = R^2 - \{(x,y) : \text{ είτε } x = 0 \text{ ή } y = 0\}$.
Πράγματι, εύκολα υπολογίζουμε ότι στα σημεία του U έχουμε,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}}.$$

Επειδή η $f(x,0) = 0, x \in R$ έπεται ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = 0$ για κάθε $a \in R$ και επειδή $f(0,y) = 0, y \in R$ έπεται ότι $\frac{\partial f}{\partial y}(0,b) = 0$ για κάθε $b \in R$.

Στα σημεία $(a,0)$ με $a \neq 0$ η $\frac{\partial f}{\partial y}$ δεν υπάρχει, πράγματι αν $y \neq 0$, τότε

$$\frac{f(a,y) - f(a,0)}{y-0} = \frac{a^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}}{y} = a^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} \xrightarrow[y \to 0]{} \pm\infty$$

($+\infty$ αν $a > 0$ και $-\infty$ αν $a < 0$).

Αναλόγως αν $b \neq 0$ τότε η $\frac{\partial f}{\partial x}$ δεν υπάρχει στο σημείο $(0,b)$.

Οι μερικές παράγωγοι στο $(0,0)$ υπάρχουν όπως διαπιστώσαμε και $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Όμως η f δεν διαφορίζεται στο $(0,0)$. Πράγματι το διαφορικό της f στο $(0,0)$ αν υπήρχε θα ήταν η σταθερά γραμμική συνάρτηση μηδέν, (αφού $Df\left(0,0\right)\left(h_1,h_2\right)=0\cdot h_1+0\cdot h_2=0, \quad \left(h_1,h_2\right)\in R^2$). Συνεπώς το όριο $\lim\limits_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}}\dfrac{f\left(\left(0,0\right)+\left(h_1,h_2\right)\right)-f\left(0,0\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ θα έπρεπε να ισούται με μηδέν. Όμως

$$\frac{f\left(\left(0,0\right)+\left(h_1,h_2\right)\right)-f\left(0,0\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\frac{h_1^{\frac{1}{3}}h_2^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}, \qquad \left(h_1,h_2\right)\neq\left(0,0\right).$$

Αν θέσουμε $h=h_1=h_2>0$, τότε θα έχουμε ότι το παραπάνω πηλίκο γίνεται,

$\dfrac{h^{\frac{1}{3}}\cdot h^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2h^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{h^{\frac{2}{3}}}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{h^{\frac{1}{3}}}\xrightarrow[h\to 0]{}+\infty$. Έπεται ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $\left(0,0\right)$.

Ασκήσεις

1)Να εξετασθούν ως προς την διαφορισιμότητα οι συναρτήσεις $f\left(x,y\right)=\max\left(\left|x\right|,\left|y\right|\right)$ και $g\left(x,y\right)=\sqrt{\left|x\right|\cdot\left|y\right|}$, όπου $\left(x,y\right)\in R^2$

2)Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $f\left(x,y\right)=\log\sqrt{x^2+y^2},\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)$ και $g\left(x,y\right)=e^x\left(\cos y,\sin y\right),\left(x,y\right)\in R^2$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Να βρεθούν η κλίση της f στο $\left(a,b\right)\neq\left(0,0\right)$ και ο πίνακας Jacobi της g στο $\left(a,b\right)\in R^2$.

3)Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις: $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\left\|x\right\|}, x\in R^n-\left\{0\right\}$ και

$g\left(x\right)=\dfrac{x}{\left\|x\right\|}, x\in R^n-\left\{0\right\}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους και υπολογίστε την κλίση στο σημείο $a=\left(a_1,...,a_n\right)\in R^n-\left\{0\right\}$ της f και τον πίνακα Jacobi της g στο ιδιο σημειο.

4)Να εξεταστούν ως προς την διαφορισιμότητα η συνάρτηση $f:R^n\to \mathrm{B}\left(0,1\right)=\left\{y\in R^n:\left\|y\right\|<1\right\}$: $f\left(x\right)=\dfrac{x}{1+\left\|x\right\|}$ καθώς και η αντίστροφή της

$g:\mathrm{B}\left(0,1\right)\to R^n:g\left(y\right)=\dfrac{y}{1-\left\|y\right\|}$

(Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα τις f και $g=f^{-1}$, στην περίπτωση που $n=1$ ή $n=2$)

5)Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση εξωτερικό γινόμενο

$\varphi:R^3\times R^3\to R^3:\varphi\left(a,b\right)=a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}k$ είναι διαφορίσιμη στον $R^3 \times R^3 \cong R^6$ και να υπολογισθεί ο πίνακας Jacobi της f στο $(a,b) \in R^3 \times R^3$

($a=(a_1,a_2,a_3), b=(b_1,b_2,b_3)$ και i, j, k η ορθοκανονική βάση του R^3, δηλαδή $i=(1,0,0)$, $j=(0,1,0)$ και $k=(0,0,1)$).

6)Έστω $f_1, f_2, ..., f_n : R \to R$ διαφορίσιμες συναρτήσεις. Εξετάστε ως προς την ύπαρξη μερικών παραγώγων και διαφορικού την συνάρτηση $F : R^n \to R$ ώστε $F(x_1,...,x_n) = f_1(x_1)....f_n(x_n), x=(x_1,...,x_n) \in R^n$.

7) Δείξτε ότι για τις ακόλουθες συναρτήσεις υπάρχουν όλες οι κατευθυνόμενες παράγωγοι στο (0.0) αλλά δεν είναι συνεχείς εκεί:

α) $f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ αν } 0 < y < \chi^2 \\ 0, \text{ διαφορετικά} \end{cases}$,

β) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y}, \text{ αν } x^2+y \neq 0 \\ 0, \text{ διαφορετικά} \end{cases}$.