Το θεώρημα Taylor στις πολλές μεταβλητές

Ο σκοπός αυτής της παραγράφου είναι η απόδειξη ενός θεωρήματος τύπου Taylor για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Το θεώρημα για μια μεταβλητή θα είναι ειδική περίπτωση του γενικότερου αποτελέσματος. Σημειώνουμε ότι στην πραγματικότητα γνωρίζουμε ήδη μια μορφή του Taylor για διαφορίσιμες συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Πράγματι, αν $f:U\subseteq R^n\to R$ (U ανοικτό στον R^n) είναι διαφορίσιμη στο $a\in U$ και θέσουμε $R_1(x,a)=f(x)-f(a)-Df(a)(x-a), x\in U$ τότε $f(x)=f(a)+Df(a)(x-a)+R_1(x,a), x\in U$ και από τον ορισμό της διαφορισιμότητας έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{R_1(x,a)}{\|x-a\|}=0$ (Δες και την παράγραφο την σχετική με τον ορισμό της διαφορίσιμης συνάρτησης).

Έτσι το ανάπτυγμα Taylor της f <u>πρώτης τάξης</u> γράφεται ως εξής: $f(a+h)=f(a)+\sum\limits_{i=1}^{n}h_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)+R_1(h,a)$ με $\dfrac{R_1(h,a)}{\|h\|}\xrightarrow[h\to 0]{}0$, όπου έχουμε θέσει, $h=x-a, h=(h_1,...,h_n)$ και $R_1(h,a)=R_1(x,a)$.

Θα αποδείξουμε ότι το ανάπτυγμα Taylor <u>δεύτερης τάξης</u> έχει ως εξής:

Αν η $f:U\subseteq R^n\to R$ είναι της κλάσης C^3, τότε μπορούμε να γράφουμε,

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}h_ih_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)+R_2(h,a)$$

όπου

$\dfrac{R_2(h,a)}{\|h\|^2}\xrightarrow[h\to 0]{}0$ (στο δεύτερο άθροισμα υπάρχουν n^2 όροι).

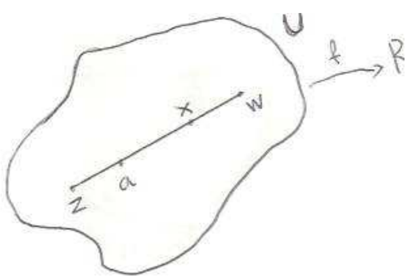
Σημειώνουμε ότι για την απόδειξη του θεωρήματος όπως διατυπώνεται εδώ, αρκεί η f να είναι της κλάσης C^2, η υπόθεση ότι η f είναι της κλάσης C^3 εξασφαλίζει μια πιο εύχρηστη μορφή του υπολοίπου. Για να αποδείξουμε το παραπάνω αποτέλεσμα (καθώς και τις μορφές του αναπτύγματος Taylor ανώτερης τάξης) στηριζόμαστε στην αντίστοιχη θεωρία της μιας μεταβλητής. Ουσιαστικά περιορίζουμε την f στην τομή του U με την ευθεία $\ell(t)=a+t(x-a)=a+th$, και εφαρμόζουμε στην συνάρτηση $h(t)=f(a+th)$ την θεωρία του αναπτύγματος Taylor μιας μεταβλητής.

Έστω $U\subseteq R^n$ ανοικτό, $f:U\subseteq R^n\to R$ συνάρτηση της κλάσης $C^{m+1}, m\geq 0$. Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα $[z,w]\subseteq U$ ($z\neq w$) και $a\in(z,w)$. Έστω ακόμη $x\in(z,w)$ και $\sigma(t)=(1-t)a+tx, t\in R$ η ευθεία που διέρχεται από τα a,x. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν $t_1<0$ και $t_2>1$ ώστε $\sigma(t_1)=z$ και $\sigma(t_2)=w$ και βέβαια $\sigma[0,1]=[a,x]$

Περιορίζουμε την f στο $[z,w]$ και έστω

$h(t)=f(\sigma(t)), t\in[t_1,t_2]$

$$\underbrace{[t_1,t_2]\xrightarrow{\sigma}U\xrightarrow{f}R}_{h=fo\sigma}$$



Επειδή η $\sigma : R \to U$ είναι βέβαια C^∞ διαφορίσιμη συνάρτηση η $h = fo\sigma : [t_1, t_2] \to R$ είναι C^{m+1} συνάρτηση. (Προφανώς, $[0,1] \subseteq [t_1, t_2]$.)

Έπεται ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Taylor στην h με κέντρο το 0. Έτσι έχουμε: (1) $h(0) = f(\sigma(0)) = f(a), h(1) = f(\sigma(1)) = f(x)$ και

(2) $$h(t) = h(0) + h'(0)t + \frac{h''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{h^{(m)}(0)}{m!}t^m + R_m(t,0), t \in [0,1]$$ όπου,

$R_m(t,0) = \frac{1}{m!}\int_0^t (t-y)^m \cdot h^{(m+1)}(y)dy$ (ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου)

$= \frac{1}{(m+1)!}h^{(m+1)}(\xi_t)t^{m+1}, \xi_t \in (0,t)$ (μορφή Lagrange του υπολοίπου)

Έπεται ιδιαίτερα ότι:

(3) $$h(1) = h(0) + h'(0) + \frac{h''(0)}{2!} + \ldots + \frac{h^{(m)}(0)}{m!} + R_m(1,0),$$

$$R_m(1,0) = \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-y)^m h^{(m+1)}(y)dy = \frac{1}{(m+1)!}h^{(m+1)}(\xi), \xi \in (0,1).$$

Έστω $a = (a_1, \ldots, a_n), x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \ldots, \sigma_n(t))$ όπου $\sigma_k(t) = (1-t)a_k + tx_k, 1 \le k \le n$.

Ας υποθέσουμε για απλότητα ότι η f είναι της κλάσης $C^3 (m = 2)$. Θα βρούμε το ανάπτυγμα Taylor της f στο a δεύτερης τάξης.

Έτσι έχουμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους $h'(0), h''(0)$ και $h'''(\xi)$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα αλυσίδας για την συνάρτηση $h = fo\sigma : [0,1] \to R$.

Έτσι έχουμε: $h'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\sigma(t))\frac{d\sigma_i}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\sigma(t)) \cdot (x_i - a_i), t \in [0,1]$, (4)

Άρα, $$h'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i), \quad 4(\alpha)$$

Χρησιμοποιώντας πάλι τον κανόνα αλυσίδας για τις συναρτήσεις, $t \in [0,1] \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(\sigma(t)), 1 \le i \le n$ και παραγωγίζοντας την (4) υπολογίζουμε:

$$h''(t) = \frac{dh'}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma(t)) \cdot (x_i - a_i)\right) = \sum_{i=1}^n \left[(x_i - a_i)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\sigma(t))\right)\right] =$$

$$\sum_{i=1}^n \left[(x_i - a_i)\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\sigma(t)) \cdot \frac{d\sigma_j}{dt}(t)\right)\right] = \sum_{i=1}^n \left[(x_i - a_i)\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\sigma(t)) \cdot (x_j - a_j)\right] =$$

$$\sum_{i=1, j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\sigma(t)) \cdot (x_i - a_i) \cdot (x_j - a_j)$$

Το τελευταίο άθροισμα έχει τυπικά n^2 όρους, επειδή όμως έχουμε υποθέσει την συνέχεια των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης είναι ίσο με,

$$h''(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\sigma(t)) \cdot (x_i - a_i)^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\sigma(t))(x_i - a_i)(x_j - a_j), \quad (5)$$

Είναι σαφές ότι το άθροισμα αυτό αναπτύσσεται σύμφωνα με τη γνωστή αλγεβρική ταυτότητα $\left(z_1+z_2+...+z_n\right)^2=\sum_{i=1}^{n} z_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n} z_i z_j \qquad \left(=\sum_{i,j=1}^{n} z_i z_j\right)$

(Ένα άθροισμα με $n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$ όρους).

Έπεται ότι: $h''(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)\cdot\left(x_i-a_i\right)^2+2\sum_{1\le i<j\le n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\left(x_i-a_i\right)\left(x_j-a_j\right)$, (5α)

Πρέπει τώρα να έχει γίνει σαφές πως θα προχωρήσουμε.
Έτσι με χρήση του κανόνα αλυσίδας και παραγωγίζοντας την (5) υπολογίζουμε:

$$h'''(t)=\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}\left(\sigma(t)\right)\cdot\left(x_i-a_i\right)\left(x_j-a_j\right)\left(x_k-a_k\right), \quad (6)$$

Το άθροισμα έχει τυπικά n^3 όρους, επειδή όμως έχουμε υποθέσει την συνέχεια των μερικών παραγώγων της f τρίτης τάξης αναπτύσσεται σύμφωνα με την ταυτότητα,

$$\left(z_1+z_2+...+z_n\right)^3=\sum_{i,j,k=1}^{n} z_i\cdot z_j\cdot z_k=\sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_n=3\\ k_1,...,k_n\ge 0}}\frac{3!}{k_1!...k_n!}z_1^{k_1}...z_n^{k_n}, \quad 6(\alpha)$$

Έπεται από την (3) για $m=2$ και από τις 4(α) και 5(α) ότι:

$$h(1)=h(0)+h'(0)+\frac{h''(0)}{2!}+R_2(1,0) \text{ ή } f(x)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\left(x_i-a_i\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)\left(x_i-a_i\right)^2+2\sum_{1\le i<j\le n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\left(x_i-a_i\right)\cdot\left(x_j-a_j\right)\right]+R_2(1,0). \quad (7)$$

Η ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου είναι:

$$R_2(1,0)=\frac{1}{2}\int_0^1(1-y)^2\cdot h^{(3)}(y)\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_0^1(1-y)^2\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}\left((1-y)a+yx\right)\left(x_i-a_i\right)\left(x_j-a_j\right)\left(x_k-a_k\right)dy, \quad 7(\alpha)$$

Η μορφή Lagrange του υπολοίπου είναι:

$R_2(1,0)=\frac{1}{3!}h^{(3)}(\xi)=\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j x_i}(\xi)\cdot\left(x_i-a_i\right)\left(x_j-a_j\right)\left(x_k-a_k\right)$, 7(β) όπου ξ σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $[a,x]$, δηλαδή $\xi=(1-t)a+tx$ για κάποιο $t\in[0,1]$.

Θέτουμε τώρα $R_2(x,a)=R_2(1,0)$. Από την ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου και επειδή η ολοκληρούμενη συνάρτηση είναι συνεχής ως προς y θα είναι φραγμένη στο $[0,1]$ από κάποια σταθερά $\mathrm{M}>0$.

Επομένως

$$\left|R_2(x,a)\right|\le\frac{1}{2}\mathrm{M}\cdot\sum_{i,j,k=1}^{n}\left|x_i-a_i\right|\left|x_j-a_j\right|\left|x_k-a_k\right|=\frac{1}{2}\mathrm{M}\left[\left|x_1-a_1\right|+...+\left|x_n-a_n\right|\right]^3\le$$

$\le\frac{1}{2}\mathrm{M}\cdot n^{\frac{3}{2}}\cdot\left\|x-a\right\|^3$. Εδώ χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα: $\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|\le\sqrt{n}\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$

καθώς και την ταυτότητα 6(α). (Η ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα Cauchy-Schwartz για τα διανύσματα $\kappa=\left(|x_1|,\ldots,|x_n|\right)$ και $(1,1,\ldots,1)$ του R^n.)

Έπεται ότι, $$\frac{|R_2(x,a)|}{\|x-a\|^2}\le\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}\mathrm{M}\|x-a\|\xrightarrow[x\to a]{}0.$$

Συμπέρασμα: $$\lim_{x\to a}\frac{R_2(x,a)}{\|x-a\|^2}=0.$$

Τις ίδιες εκτιμήσεις βρίσκουμε και με την χρήση της μορφής Lagrange του υπολοίπου Taylor. (Δες επίσης την παρατήρηση (2) μετά το θεώρημα Taylor δηλ. το θεώρημα 12.1).

Εφαρμογή. Έστω $U\subseteq R^2$ ανοικτό, $\vec{a}=(a,\beta)$ και $\vec{x}=(x,y)$ σημεία του U ώστε $\left[\vec{a},\vec{x}\right]\subseteq U$ και $f:U\to R$ συνάρτηση της κλάσης C^3. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\vec{\xi}=(\xi,n)\in\left[\vec{a},\vec{x}\right]$ ώστε: $f(x,y)=f(a,\beta)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,\beta)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,\beta)(y-\beta)+$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,\beta)(x-a)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,\beta)(x-a)(y-\beta)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,\beta)(y-\beta)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{3!}[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\xi,n)(x-a)^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(\xi,n)(x-a)^2(y-\beta)+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(\xi,n)(x-a)(y-\beta)^2$$

$$+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\xi,n)(y-\beta)^3].$$

Ο παραπάνω τύπος έπεται αμέσως από τους τύπους 7 και 7(β) για $n=2$. Σημειώνουμε ότι επειδή $n=2$ η $h^{(3)}(\xi)$ υπολογίζεται σύμφωνα με το ανάπτυγμα της ταυτότητας: $(z_1+z_2)^3=z_1^3+z_2^3+3z_1z_2^2+3z_1^2z_2$

Επίσης σημειώνουμε ότι για το υπόλοιπο Taylor έχουμε $\lim_{(x,y)\to(a,\beta)}\frac{R_2\left((x,y),(a,\beta)\right)}{\|(x,y)-(a,\beta)\|^2}=0$, όπου $R_2\left((x,y),(a,\beta)\right)=R_2(1,0)=\frac{1}{3!}h^{(3)}(\xi)$.

Παρατήρηση: Αν η $f:U\subseteq R^n\to R$ είναι C^2 συνάρτηση και $a\in U$. Τότε η ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου Taylor τάξης 1 είναι $R_1(a,x)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^1(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\left((1-y)a+yx\right)(x_i-a_i)(x_j-a_j)dy$ και η μορφή Lagrange είναι, $R_1(a,x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\xi)(x_i-a_i)(x_j-a_j)$ όπου $\xi\in[a,x]\subseteq U$.

Με την εισαγωγή κατάλληλου συμβολισμού για τα διαφορικά ανώτερης τάξης μιας συνάρτησης $f:U\subseteq R^n\to R$ της κλάσης C^{m+1}, το ανάπτυγμα Taylor της f τάξης m λαμβάνει μια (πιο ευκολομνημόνευτη) μορφή που μας απαλλάσσει από το να σκεφτόμαστε με συντεταγμένες. Έτσι ορίζουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις.

$$D_l f(a):R^n\to R,\qquad l=1,2,\ldots,m+1,\qquad a\in U$$

$$D_1 f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i, \qquad h = (h_1, ..., h_n) \in R^n$$

$$D_2 f(a)(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i \cdot h_j$$

$$D_3 f(a)(h) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) \cdot h_i \cdot h_j \cdot h_k$$

……………………………………………….

$$D_{m+1} f(a)(h) = \sum_{k_1,...,k_{m+1}=1}^{n} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{k_1} ... \partial x_{k_{m+1}}}(a) \cdot h_{k_1} \cdot ... \cdot h_{k_{m+1}}$$

Οι συναρτήσεις $D_l f(a), l = 1, 2, ..., m+1$ ονομάζονται διαφορικά ανώτερης τάξης της f στο a.

Για παράδειγμα για $n = 3$ και $m = 2$ έχουμε:

$$D_1 f(a)(h_1, h_2, h_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(a) h_3$$

$$D_2 f(a)(h_1, h_2, h_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) h_3^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) h_1 h_2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a) h_1 h_3 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a) h_2 h_3.$$

$$D_3 f(a)(h_1, h_2, h_3) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a) h_1^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a) h_2^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(a) h_3^3 +$$

$$+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a) h_1^2 h_2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}(a) h_1^2 h_3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a) h_1 h_2^2 +$$

$$+3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}(a) h_2^2 h_3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}(a) h_1 h_3^2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}(a) h_2 h_3^2 + 6\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(a) h_1 h_2 h_3.$$

Με την βοήθεια των διαφορικών ανώτερης τάξης, το πλήρες θεώρημα Taylor για πολλές μεταβλητές, διατυπώνεται (και αποδεικνύεται με την μέθοδο που αναπτύξαμε πριν για $m = 2$) με τον ακόλουθο τρόπο.

12.1 Θεώρημα (Taylor). Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό, $a \in U$ και $f: U \to R$ συνάρτηση της κλάσης $C^{m+1} (m \geq 0)$. Αν $x \in U (x \neq a)$ με $[a, x] \subseteq U$ τότε υπάρχει $c \in (a, x)$ ώστε:

$$f(x) = f(a) + D_1 f(a)(x-a) + \frac{1}{2!} D_2 f(a)(x-a) + ... + \frac{1}{m!} D_m f(a)(x-a) + R_m(x,a)$$

, όπου $R_m(x,a) = \dfrac{1}{(m+1)!} D_{m+1} f(c)(x-a)$ και $\dfrac{R_m(x,a)}{\|x-a\|^m} \xrightarrow[x \to a]{} 0$ είναι το υπόλοιπο Taylor στο a τάξης m της f στην μορφή Lagrange.

Παρατηρήσεις: 1) Η συνάρτηση, $D_l f(a)(h) = \sum_{k_1,...,k_l}^{n} \dfrac{\partial^l f}{\partial x_{k_1} ... \partial x_{k_l}}(a) \cdot h_{k_1} \cdot ... \cdot h_{k_l}$,

$h = (h_1, ..., h_n)$, αναπτύσσεται σύμφωνα με την ταυτότητα,

$$\left(z_1+z_2+...+z_n\right)^l = \sum_{k_1,...,k_l=1}^{n} z_{k_1}\cdot z_{k_2}\cdot ...\cdot z_{k_l},\left(1\le l\le m\right).$$

Έτσι τυπικά μπορούμε να γράφουμε: $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n\right)^l = \sum_{k_1,...,k_l=1}^{n}\frac{\partial^l f}{\partial x_{k_1}...\partial x_{k_l}}(a)h_{k_1}...h_{k_l}$ (Δες και τις ασκήσεις (1) και (2) αυτής της παραγράφου)

2)Αν $a_1,...,a_n\in R$ και $m\in N$ τότε: $\lim\limits_{(x_1,...,x_n)\to(0,0,...,0)}\frac{\left(a_1x_1+...+a_nx_n\right)^m}{\left(\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}\right)^{m-1}}=0$

Πράγματι, θέτουμε $a=\left(a_1,...,a_n\right)$ και $x=\left(x_1,...,x_n\right)$. Από την ανισότητα Cauchy – Schwarz έπεται ότι αν $x\neq 0$ τότε:

$$\frac{\left(\left|a_1x_1+...+a_nx_n\right|\right)^m}{\left(\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}\right)^{m-1}}\le\frac{\|a\|^m\cdot\|x\|^m}{\|x\|^{m-1}}=\|a\|^m\cdot\|x\|\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

Με χρήση αυτού του ορίου αποδεικνύεται ότι, $\lim\limits_{x\to a}\frac{R_m\left(x,a\right)}{\|x-a\|^m}=0$.

Πράγματι αν $x=\left(x_1,...,x_n\right)$ και $a=\left(a_1,...,a_n\right)$ τότε επειδή οι μερικές παράγωγοι τάξης $m+1$ της f είναι συνεχείς συναρτήσεις στο (U και άρα στο) συμπαγές σύνολο $\left[a,x\right]\subseteq U$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες. Επομένως, υπάρχει $\mathrm{M}>0$ ώστε,

$$\left|R_m\left(x,a\right)\right|=\frac{1}{\left(m+1\right)!}\left|D_{m+1}f\left(c\right)\left(x-a\right)\right|\le\frac{\mathrm{M}}{\left(m+1\right)!}\left(\left|x_1-a_1\right|+...+\left|x_n-a_n\right|\right)^{m+1}\Rightarrow$$

$$\frac{\left|R_m\left(x,a\right)\right|}{\|x-a\|^m}\le\frac{\mathrm{M}}{\left(m+1\right)!}\frac{\left(\left|x_1-a_1\right|+...+\left|x_n-a_n\right|\right)^{m+1}}{\|x-a\|^m}\xrightarrow[x\to a]{}0$$

3) Η μοναδικότητα των συντελεστών του αναπτύγματος Taylor αποδεικνύεται, κατά τρόπο ανάλογο με την περίπτωση των συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. (Δες και τις ασκήσεις (3) και (4), αυτής της παραγράφου).

4) Έστω $f:U\subseteq R^n\to R$ C^∞ διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν $a\in U$ τότε μπορούμε πάλι όπως και στην μία μεταβλητή να σχηματίσουμε την αντίστοιχη <u>σειρά Taylor της</u> f με κέντρο το a, δηλαδή τη σειρά,

$$f\left(a\right)+D_1f\left(a\right)\left(x-a\right)+...+\frac{1}{m!}D_mf\left(a\right)\left(x-a\right)+...$$

Η σειρά Taylor της f συγκλίνει στο $f\left(x\right)$ για εκείνα τα $x\in U$ με $\left[a,x\right]\subseteq U$ για τα οποία ισχύει, $\lim\limits_{m\to\infty}R_m\left(x,a\right)=0$.

Παραδείγματα: 1)Να βρεθούν τα αναπτύγματα Taylor δεύτερης τάξης των συναρτήσεων: (α) $f\left(x,y\right)=\left(x+y\right)^2$ και (β) $f\left(x,y\right)=\frac{1}{x^2+y^2+1}$ στο $a=\left(0,0\right)$.

Λύση Η συνάρτηση $f(x,y)=(x+y)^2$ είναι C^{∞} διαφορίσιμη στο R^2. Αν $(x,y)\in R^2-\{(0,0)\}$ τότε (δες και εφαρμογή στην σελίδα 118) έχουμε $f(x,y)=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y+\frac{1}{2}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\cdot x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\cdot x\cdot y+$ $+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\cdot y^2]+R_2((x,y),(0,0))$, όπου $\frac{R_2((x,y),(0,0))}{x^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$,

$\frac{\partial f}{\partial x}=2(x+y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2(x+y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2$.

Άρα $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=2$. Επίσης $f(0,0)=0$.

Επομένως,

$f(x,y)=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+4xy)+R_2((x,y),(0,0))=x^2+y^2+2xy+R_2((x,y),(0,0))$.

Επειδή, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=0$, βρίσκουμε $R_2((x,y),(0,0))=0$.

Τελικά, $f(x,y)=x^2+y^2+2xy$, που ήταν αναμενόμενο καθώς η f είναι πολυωνυμική.

Για το παράδειγμα (β) εργαζόμαστε αναλόγως.

2)Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης για την $f(x,y)=(1+x)^y$ με κέντρο το $(a,\beta)=(0,2)$.

Λύση Η f είναι C^{∞} διαφορίσιμη στο ανοικτό $D=(-1,+\infty)\times R\subseteq R^2$.

Παρατηρούμε ότι, $\frac{\partial f}{\partial x}=y(1+x)^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=(1+x)^y\cdot\log(1+x)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(y-1)(1+x)^{y-2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\log(1+x)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(1+x)^y=\log^2(1+x)(1+x)^y$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(1+x)^y\cdot\log(1+x)+(1+x)^y\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\log(1+x))=y(1+x)^{y-1}\cdot\log(1+x)+$ $(1+x)^{y-1}$ (Επίσης, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(y)(1+x)^{y-1}+y\frac{\partial}{\partial y}(1+x)^{y-1}=(1+x)^{y-1}+y(1+x)^{y-1}\cdot\log(1+x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, όπως βέβαια ήταν αναμενόμενο).

Έπεται ότι, $f(0,2)=(1+0)^2=1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)=2(1+0)^{2-1}=2$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,2)=(1+0)^2\cdot\log(1)=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,2)=2(2-1)(1+0)^0=2$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,2)=\log(1+0)\cdot(1+0)^2=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,2)=2(1+0)^{2-1}\cdot\log(1+0)+(1+0)^{2-1}=1$.

Συνεπώς, $f(x,y)= f(0,2)+\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,2)(y-2)\right]+$

$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,2)(x-0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,2)(x-0)(y-2)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,2)(y-2)^2\right]+$

$R_2((x,y),(0,2))=1+2x+0\cdot(y-2)+\frac{1}{2}[2x^2+2\cdot 1\cdot x(y-2)+0\cdot(y-2)^2]+$

$+R_2((x,y),(0,2))=1+2x+\frac{1}{2}\left(2x^2+2x(y-2)\right)+R_2((x,y),(0,2))=$

$1+2x+x^2+x(y-2)+R_2((x,y),(0,2))$, όπου, $\frac{R_2((x,y),(0,2))}{x^2+(y-2)^2}\xrightarrow[(x,y)\to(0,2)]{}0$.

3). Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor με κέντρο το $(0,0)$ η συνάρτηση $f(x,y)=e^{x+y},(x,y)\in R^2$.

Λύση Η f είναι βέβαια C^∞ διαφορίσιμη συνάρτηση.

Πράγματι, $\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x+y}=\frac{\partial f}{\partial y}$ στο R^2. Επομένως $\frac{\partial^m f}{\partial^k x\partial^l y}=e^{x+y}=f(x,y)$ για κάθε $m\geq 1$ και $l\geq 0,k\geq 0:k+l=m$.

Έπεται ότι αν $a=(a_1,a_2),h=(h_1,h_2)$ τότε,

$$D_1 f(a)(h)=\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2=e^{a_1+a_2}\cdot h_1+e^{a_1+a_2}\cdot h_2=e^{a_1+a_2}(h_1+h_2)$$

$$D_2 f(a)(h)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)h_2^2=e^{a_1+a_2}(h_1+h_2)^2$$

…………………………………………………………………………..

$$D_m f(a)(h)=.....................................=e^{a_1+a_2}(h_1+h_2)^m$$

Επομένως, αν $\vec{x}=(x,y)\in R^2-\{(0,0)\}$ και $a=(0,0)$ τότε

$$f(x,y)=f(0,0)+D_1 f(0,0)(\vec{x})+\frac{1}{2!}D_2 f(0,0)(\vec{x})+...+\frac{1}{m!}D_m f(0,0)(\vec{x})+R_m((x,y),(0,0))$$

όπου, $R_m((x,y),(0,0))=\frac{1}{(m+1)!}D_{m+1}f(c)(x,y)$ για κάποιο $c\in((0,0),(x,y)),c=(c_1,c_2)$.

Άρα

$$f(x,y)=e^{x+y}=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^2+...+\frac{1}{m!}(x+y)^m+\frac{1}{(m+1)!}e^{c_1+c_2}(x+y)^{m+1}.$$

Επειδή η $f(t(x,y)),t\in[0,1]$ είναι φραγμένη στο $[0,1]$ ως συνεχής, υπάρχει $\mathrm{M}>0:0\leq e^{c_1+c_2}\leq\mathrm{M}$ για κάθε $c=(c_1,c_2)\in[(0,0),(x,y)]$.

Έπεται ότι, $\frac{1}{(m+1)!}e^{c_1+c_2}(x+y)^{m+1}\leq\mathrm{M}\frac{(x+y)^{m+1}}{(m+1)!}\xrightarrow[m\to\infty]{}0$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι,

$$e^{x+y}=1+(x+y)+...+\frac{(x+y)^m}{m!}+...=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(x+y)^m}{m!},(x,y)\in R^2$$

Σημειώνουμε ότι η $f(x,y)=e^{x+y},(x,y)\in R^2$, μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor με κέντρο το $(0,0)$ ευκολότερα, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της $g(z)=e^z, z\in R$ (και την μοναδικότητα των συντελεστών της σειράς Taylor).

Πράγματι, θέτουμε $z=x+y$ και έχουμε $e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+...+\frac{z^n}{n!}+...$

Συνεπώς, $e^{x+y}=1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2!}...+\frac{(x+y)^n}{n!}+...$

Ασκήσεις

1)Αποδείξτε την ταυτότητα: $(z_1+z_2+...+z_n)^N=\sum_{\substack{k_1,...,k_n\geq 0\\ k_1+...+k_n=N}}\frac{N!}{k_1!...k_n!}z_1^{k_1}...z_n^{k_n}, n\geq 2, N\geq 1$

[**Υπόδειξη:** Για $n=2$, έχουμε το γνωστό μας διώνυμο του Newton. Προχωρήστε με επαγωγή στο n]

2)Έστω $U\subseteq R^n$ ανοικτό, $a\in U$ και $f:U\to R$ συνάρτηση της κλάσης $C^N\ (N\geq 1)$. Αποδείξτε ότι για το διαφορικό $m-$τάξης της f στο $a\ (1\leq m\leq N)$ ισχύει: Αν $h=(h_1,...,h_n)\in R^n$ τότε, $D_m f(a)(h)=\sum_{j_1,...,j_m=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1}...\partial x_{j_m}}(a)\cdot h_{j_1}...h_{j_m}=$

$$=\sum_{\substack{k_1,...,k_n\geq 0\\ k_1+...+k_n=m}}\frac{m!}{k_1!...k_n!}h_1^{k_1}h_2^{k_2}...h_n^{k_n}\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}(a)$$

3)Έστω $P(x,y)$ πολυώνυμο βαθμού $\leq m\,(m\in N)$. Αποδείξτε ότι η σχέση $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{P(x,y)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m}=0$ έπεται ότι το P είναι ταυτοτικά μηδέν.

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό αποδείξτε την μοναδικότητα των συντελεστών του αναπτύγματος Taylor για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών.

4)Έστω $P(x_1,...,x_n)$ πολυώνυμο βαθμού $\leq m$. Αποδείξτε ότι αν, $\lim_{x\to 0}\frac{P(x_1,...,x_n)}{\|x\|^m}=0$

($x=(x_1,...,x_n)$ και $\|x\|=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$), τότε το πολυώνυμο είναι ταυτοτικά μηδέν. Αποδείξτε τώρα την μοναδικότητα των συντελεστών του αναπτύγματος Taylor για μια συνάρτηση $n-$ μεταβλητών