Το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης

Έστω $\mathrm{I} \subseteq R$ ανοικτό διάστημα, $f : \mathrm{I} \to R$ διαφορίσιμη της κλάσης C^1 και $a \in \mathrm{I} : f'(a) \neq 0$. Τότε από την συνέχεια της f' υπάρχει $\delta > 0 : (a-\delta, a+\delta) \subseteq \mathrm{I}$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Συνεπώς, είτε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a-\delta, a+\delta)$ αν $f'(a) > 0$ ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a-\delta, a+\delta)$ αν $f'(a) < 0$. Έπεται ότι η f είναι $1-1$ στο $:(a-\delta, a+\delta)$ (γνήσια μονότονη στο $:(a-\delta, a+\delta)$) και ακόμη ότι η $g = f^{-1} \big| (a-\delta, a+\delta)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση και $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ για $x \in (a-\delta, a+\delta)$ και $y = f(x)$.

Δηλαδή η υπόθεση ότι η f είναι C^1 στο I και ότι $f'(a) \neq 0$ για κάποιο $a \in \mathrm{I}$ έπεται ότι η f είναι <u>τοπικά αντιστρέψιμη</u> στο a, με άλλα λόγια αν y «κοντά» στο $f(a)$ μπορούμε να λύσουμε μοναδικά την εξίσωση $y = f(x)$ για x «κοντά» στο a. Ο σκοπός μας είναι η παρουσίαση του αντίστοιχου αποτελέσματος στις πολλές μεταβλητές.

14.1 Θεώρημα (Αντίστροφης απεικόνισης). Έστω $D \subseteq R^n$ ανοικτό και $f : D \subseteq R^n \to R^n$ C^1 απεικόνιση. Αν $a \in D$ ώστε $\det\left(J_{f(a)}\right) \neq 0$, τότε η f είναι <u>τοπικά</u> αντιστρέψιμη στο a, δηλαδή υπάρχουν <u>ανοικτά</u> σύνολα $U, V \subseteq R^n$ με $a \in U$ και $b = f(a) \in V$, ώστε η $f \big| U$ να είναι $1-1$, $f(U) = V$ και η αντίστροφη απεικόνιση $g = f^{-1} : V \to U$ να είναι της κλάσης C^1. Επί πλέον για τον πίνακα Jacobi της g ισχύει:

$$J_{g(f(x))} = \left[J_{f(x)} \right]^{-1} \text{ για } x \in U .$$

Αν η f είναι της κλάσης C^p, $p \geq 1$, τότε το ίδιο είναι και η $g = f^{-1} \big| U$.

Σημείωση. Έστω $f = (f_1, ..., f_n)$, το συμπέρασμα με άλλα λόγια του θεωρήματος είναι το ακόλουθο.

Αν $y = (y_1, ..., y_n)$ είναι σημείο «κοντά» στο $b = f(a)$ τότε το σύστημα των εξισώσεων $\begin{cases} f_1(x_1, ..., x_n) = y_1 \\ f_2(x_1, ..., x_n) = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, ..., x_n) = y_n \end{cases}$ έχει ακριβώς μια λύση «κοντά» στο a. Επί πλέον η εξάρτηση των λύσεων $x_1 = x_1(y_1, ..., y_n), ..., x_n = x_n(y_1, ..., y_n)$ (ή $x_i = g_i(y), 1 \leq i \leq n$ όπου $g = f^{-1}$ και $g = (g_1, ..., g_n)$) από τα $y_1, ..., y_n$ είναι C^1 (ή C^p).

Καθόσον αφορά τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial g_i}{\partial y_i}, 1 \leq i \leq n$ των λύσεων $x_i = g_i(y), 1 \leq i \leq n$, παρατηρούμε ότι επειδή ο πίνακας Jacobi $J_{g(y)}, y = f(x)$ είναι αντίστροφος του $J_{f(x)}$, όπου $J_{g(y)} = \left(\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j} \right)_{1\le i,j\le n}$ και $J_{f(x)} = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1\le i,j\le n}$,οι μερικές παράγωγοι, $\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}(y), 1\le i, j\le n$ υπολογίζονται λύνοντας ένα γραμμικό σύστημα n^2 εξισώσεων με n^2 αγνώστους, το οποίο προκύπτει από την εξίσωση των πινάκων,

$$[\, J_{g(y)} \cdot J_{f(x)} = \mathrm{I},\, y = f(x),\, x \in U \,]$$

όπου $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ο ταυτοτικός πίνακας.

Συμβολισμός: Έστω $f : U \subseteq R^n \to R^m$ διαφορίσιμη συνάρτηση, $f = (f_1, ..., f_m)$. Αν $a \in U$ τότε ο πίνακας Jacobi $J_{f(a)}$ της f στο a μερικές φορές θα συμβολίζεται και με $J_{f(a)} = \dfrac{\partial(f_1, ..., f_m)}{\partial(x_1, ..., x_n)}(a)$ ($= \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$).

Παραδείγματα. 1) Η απεικόνιση $f : R^2 \to R^2$ που ορίζεται από την, $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, είναι τοπικά αντιστρέψιμη σε κάθε σημείο του R^2 αλλά δεν είναι $1-1$.

Λύση Θέτομε $u = e^x \cos y$ και $v = e^x \sin y$. Ο πίνακας Jacobi της f είναι ο

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = J_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

και η ορίζουσά του είναι η

$$\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right) = e^{2x}\left(\cos^2 y + \sin^2 y\right) = e^{2x} > 0 \text{ για κάθε } (x,y) \in R^2.$$

Έπεται προφανώς από το θεώρημα αντιστρόφου συναρτήσεως ότι η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη σε κάθε σημείο $(x, y) \in R^2$. Η f δεν είναι $1-1$, αφού $u(x, y+2\pi) = u(x, y)$ και $v(x, y+2\pi) = v(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in R^2$.

Παρατηρούμε ότι, το παράδειγμα που εξετάσαμε μας δείχνει ότι το ακόλουθο αποτέλεσμα (συνέπεια του θεωρήματος Darboux) από τον Λογισμό της μίας μεταβλητής δεν ισχύει για συναρτήσεις δύο μεταβλητών:

Έστω $\mathrm{I} \subseteq R$ ανοικτό διάστημα και $f : \mathrm{I} \to R$ διαφορίσιμη ώστε $f'(x) \ne 0$ για κάθε $x \in \mathrm{I}$, τότε είτε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathrm{I}$ ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathrm{I}$. Επομένως η f είναι γνήσια μονότονη και έτσι είναι $1-1$.

Σημείωση. Οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial v}$ υπολογίζονται λύνοντας το σύστημα:

$$J_f \cdot J_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{1}{\det J_f}, \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{\det J_f},$$

$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{1}{\det J_f}$ και $\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{1}{\det J_f}$, όπου $\det J_f = e^{2x}$.

Συνεπώς, $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\cos y}{e^x}$, $\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\sin y}{e^x}$, $\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\sin y}{e^x}$ και $\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\cos y}{e^x}$. (Θέτομε $g = f^{-1}$, οπότε, $g(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ και $J_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$).

Παράδειγμα 2 Θεωρούμε τις εξισώσεις, $\frac{x^4 + y^4}{x} = u$ και $\sin x + \cos y = v$. Κοντά σε ποια σημεία (x, y) μπορούν να επιλυθούν ως προς x, y αυτές οι εξισώσεις (εννοούμε να εκφράσουμε τα x και y ως $x = x(u,v)$ και $y = y(u,v)$);

Λύση Εδώ έχουμε την απεικόνιση, $f : D \subseteq R^2 \to R^2 : f = (u,v)$ με $u(x,y) = \frac{x^4 + y^4}{x}$ και $v(x,y) = \sin x + \cos y$.

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $D = \{(x,y) \in R^2 : x \neq 0\}$, που βέβαια είναι ανοικτό σύνολο. Ο πίνακας Jacobi της f στο $(x,y) \in D$ είναι,

$$J_f = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3x^4 - y^4}{x^2} & \frac{4y^3}{x} \\ \cos x & -\sin y \end{vmatrix}$$

και η ορίζουσά του:

$$\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y)} \right) = \frac{\sin y}{x^2}\left(y^4 - 3x^4\right) - \frac{4y^3}{x}\cos x$$

Σε εκείνα τα σημεία (x, y) όπου αυτή η έκφραση <u>ορίζεται</u> και <u>δεν</u> μηδενίζεται μπορούμε να επιλύσουμε τις εξισώσεις ως προς x και y. Επομένως μπορούμε να επιλύσουμε τις εξισώσεις κοντά σε εκείνα τα σημεία (x, y) για τα οποία $x \neq 0$ και επί πλέον, $\sin y\left(y^4 - 3x^4\right) \neq 4xy^3 \cos x$. (Τα σημεία αυτά συνιστούν ένα ανοικτό υποσύνολο του R^2 και άρα του D).

Για παράδειγμα, αν $x_0 = \frac{\pi}{2}$ και $y_0 = \frac{\pi}{2}$ τότε

$$\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y)} \right)(x_0, y_0) = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2}{4} \neq 0.$$

Επομένως μπορούμε να λύσουμε τις δοσμένες εξισώσεις ως προς x και y κοντά στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Σημείωση: Οι παράγωγοι των λύσεων, $\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial v}$ υπολογίζονται σύμφωνα με το θεώρημα αντιστρόφου συναρτήσεως, αντιστρέφοντας τον πίνακα Jacobi της f. Έτσι έχουμε: $J_f=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$, $J_g=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$.

(Γράφουμε, $g=f^{-1}$ και τότε, $g(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$). Άρα,

$J_f\cdot J_g=J_g\cdot J_f=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow \frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{1}{\det J_f}$,

$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{1}{\det J_f},\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{1}{\det J_f},\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{1}{\det J_f}$.

Έτσι βρίσκουμε: $\frac{\partial x}{\partial u}=-\sin y\cdot\frac{x^2}{\sin y\left(y^4-3x^4\right)-4xy^3\cos x}$,

$$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{4y^3}{x}\cdot\frac{x^2}{\sin y\left(y^4-3x^4\right)-4xy^3\cos x}=\frac{-4y^3x}{\sin y\left(y^4-3x^4\right)-4xy^3\cos x}.$$

Ανάλογα υπολογίζουμε και τις παραγώγους $\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial v}$.

Παρατηρούμε ότι οι παράγωγοι που βρήκαμε εκφράζονται μέσω των x και y και όχι των u και v. Ο υπολογισμός αυτών των παραγώγων σε ένα σημείο (x_0,y_0) δίνει την τιμή της παραγώγου στο $(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))$. Για παράδειγμα αν $x_0=y_0=\frac{\pi}{2}$ τότε

$u(x_0,y_0)=\frac{\pi^3}{4},v(x_0,y_0)=1$. Έτσι, $\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{\left(\frac{\pi^3}{4},1\right)}=\frac{-\left(x_0^2\sin y_0\right)}{\sin y_0\left(y_0^4-3x_0^4\right)-4y_0^3x_0\cos x_0}=\frac{2}{\pi^2}$.

(Θυμίζουμε ότι, $x=x(u,v),y=y(u,v)$ και $\left[J_{g(f(x_0,y_0))}\right]=\left[J_{f(x_0,y_0)}\right]^{-1}$, όπου $g=f^{-1}$ η τοπική αντίστροφη της f στο (x_0,y_0).

Παρατηρούμε ότι το θεώρημα αντιστρόφου συναρτήσεως μας υποδεικνύει την <u>ύπαρξη</u> λύσεων σε εξισώσεις και μας λέει πώς να διαφορίσουμε τις λύσεις αν και ενδέχεται να μην είναι δυνατόν να καταγράψουμε τις λύσεις αυτών των εξισώσεων.

3)Έστω $g:R^n\to R^n$ C^1 συνάρτηση, ώστε $\|g(x)\|\le \mathrm{M}\|x\|^2, x\in R^n$ για κάποια σταθερά $\mathrm{M}>0$. Αν $L:R^n\to R^n$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, τότε η συνάρτηση $f(x)=g(x)+L(x),\ x\in R^n$ είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο 0.

<u>Λύση</u> Παρατηρούμε ότι αν $T:R^n\to R^n$ η σταθερά συνάρτηση 0 ($T(x)=0$ για κάθε $x\in R^n$) τότε (παρατηρώντας ότι $g(0)=0$)

$\frac{\|g(x)-g(0)-T(x-0)\|}{\|x-0\|}=\frac{\|g(x)\|}{\|x\|}\le\frac{\mathrm{M}\cdot\|x\|^2}{\|x\|}=\mathrm{M}\|x\|$ για κάθε $x\neq 0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left\|g(x)-g(0)-T(x-0)\right\|}{\left\|x-0\right\|}\leq \lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{M}\cdot\left\|x\right\|\right)=0$. Έπεται ότι $Dg(0)=\mathrm{T}=0$.

Άρα για την C^1 συνάρτηση, $f=g+L$ έχουμε $Df(0)=Dg(0)+DL(0)=Dg(0)+L=L$.

Επειδή L γραμμικός ισομορφισμός ο πίνακας Jacobi $J_{f(0)}$ ο οποίος ταυτίζεται με τον πίνακα της γραμμικής L είναι αντιστρέψιμος, έτσι έχουμε το συμπέρασμα