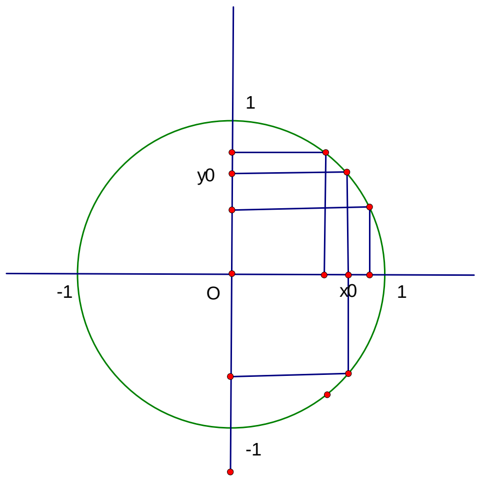
Το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

Έστω $F: D \subseteq R^2 \to R$ μια (τουλάχιστον) C^1 συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό D και $(x_0, y_0) \in D$ ώστε $F(x_0, y_0) = 0$. Ενδιαφερόμαστε για την ύπαρξη μοναδικής διαφορίσιμης συνάρτησης f ορισμένης σε μια περιοχή V του x_0 ώστε $y_0 = f(x_0)$ και επιπλέον $F(x, f(x)) = 0$ για κάθε $x \in V$. Το ενδιαφέρον μας αυτό δικαιολογείται και από το γεγονός ότι οι επίπεδες καμπύλες ορίζονται συνήθως από εξισώσεις της μορφής $F(x, y) = 0$. Έτσι θα θέλαμε να γνωρίζουμε, αφενός αν οι καμπύλες αυτές είναι <u>τοπικά</u> γραφήματα διαφορίσιμων συναρτήσεων , δηλαδή αν μπορούμε να γράψουμε $y = f(x), x \in \mathrm{I}$ και συνεπώς $F(x, f(x)) = 0, x \in \mathrm{I}$, όπου Ι διάστημα του R, και αφετέρου να υπολογίσουμε την παράγωγο $\frac{df}{dx}$ της f.

Για παράδειγμα, αν $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, τότε για κάθε $(x_0, y_0) \in R^2 : x_0^2 + y_0^2 = 1$ με $x_0 \neq \pm 1$, μπορούμε να ορίσουμε ως $f(x)$ την κατάλληλη τετραγωνική ρίζα της συνάρτησης $1 - x^2$. Το σημείο y_0 καθορίζει ποια ρίζα πρέπει να πάρουμε: Έτσι αν $y_0 > 0$ τότε η $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, x \in (-1, 1)$ ικανοποιεί την απαίτησή μας ενώ αν $y_0 < 0$ τότε η $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}, x \in (-1, 1)$ είναι η ζητούμενη συνάρτηση. Τα σημεία $(1, 0)$ και $(-1, 0)$ αποκλείονται καθώς οι συναρτήσεις $x \in [-1, 1] \to \sqrt{1 - x^2}$ και $x \in [-1, 1] \to -\sqrt{1 - x^2}$ δεν παραγωγίζονται στα σημεία ± 1 (εξάλλου υπάρχουν σημεία $(x, 0)$ πολύ κοντά στο $(1, 0)$ ή στο $(-1, 0)$ όπου η τετραγωνική ρίζα της $1 - x^2$ δεν ορίζεται).



Παρατηρούμε ότι αν $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ή $(-1, 0)$ τότε $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Επομένως, φαίνεται ότι μια συνθήκη του τύπου $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ είναι αναγκαία ώστε τοπικά να υπάρχει μοναδική διαφορίσιμη συνάρτηση f με $f(x_0) = y_0$ και $F(x, f(x)) = 0$.

Στην γενική περίπτωση, θεωρούμε μια «ομαλή» συνάρτηση $F: D \subseteq R^n \times R^m \to R^m$ και μελετούμε την εξίσωση $F(x, y) = 0$ ή ισοδύναμα το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{cases}$$

Όπου βέβαια, $F=\left(F_1,...,F_m\right)$. Ο σκοπός μας είναι να επιλύσουμε το ανωτέρω σύστημα των $m-$εξισώσεων ως προς τους αγνώστους $y_1,y_2,...,y_m$ και να εκφράσομε τις λύσεις ως συναρτήσεις των $x_1,...,x_n$ δηλαδή $y_1=y_1\left(x_1,...,x_n\right),\ldots,y_m=y_m\left(x_1,...,x_n\right)$.

14.2 Θεώρημα (Πεπλεγμένης συνάρτησης). Έστω $D\subseteq R^n\times R^m$ ανοικτό, και $F:D\to R^m$ συνάρτηση της κλάσης C^p ($p\geq 1$), $F=\left(F_1,...,F_m\right)$ και $\left(a,b\right)\in D$ με $F\left(a,b\right)=0$ ($a\in R^n$ και $b\in R^m$). Θεωρούμε τον πίνακα

$$\Delta=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\left(a,b\right).....\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\left(a,b\right) \\ .... \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}\left(a,b\right).....\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\left(a,b\right) \end{pmatrix}$$

($F\left(x,y\right)=\left(F_1\left(x,y\right),...,F_m\left(x,y\right)\right)$, όπου $x=\left(x_1,...,x_n\right)$, $y=\left(y_1,...,y_m\right)$, $\left(x,y\right)\in D$), και υποθέτουμε για την ορίζουσά του ότι $\det\Delta\neq 0$. Τότε υπάρχει ανοικτό σύνολο $U\subseteq R^n$ με $a\in U$ και μια μοναδική συνάρτηση $f:U\to R^m$ της κλάσης C^p ώστε, $f\left(a\right)=b$ και $F\left(x,f\left(x\right)\right)=0$ για κάθε $x\in U$. (Εννοείται ότι $U\times f\left(U\right)\subseteq D$).

Σημείωση. Το θεώρημα πεπλεγμένης συναρτήσεως μπορεί να αποδειχθεί με εφαρμογή του θεωρήματος αντιστρόφου συναρτήσεως στην συνάρτηση: $\left(x,y\right)\in D\subseteq R^n\times R^m\to\left(x,F\left(x,y\right)\right)\in R^n\times R^m$.

Παρατήρηση. Από την εξίσωση $F\left(x,f\left(x\right)\right)=0, x\in U$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους της f, δηλαδή τις $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i},...,\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}\right), i=1,2,...,n$, όπου $f=\left(f_1,...,f_m\right)$, με χρήση του κανόνα αλυσίδας.

Έστω για απλότητα $m=1$, δηλαδή $f:U\subseteq R^n\to V\subseteq R$ και $F:D\subseteq R^n\times R\to R$. Ορίζουμε, $g:U\to R^n\times R$ με $g=\left(\pi_1,...,\pi_n,f\right)$, όπου π_i η i προβολή, $i=1,2,...,n$ και παρατηρούμε ότι, $Fog=F\left(\pi_1,...,\pi_n,f\right)$, άρα αν $x=\left(x_1,...,x_n\right)\in U$ τότε, $\left(Fog\right)\left(x_1,...,x_n\right)=F\left(x_1,...,x_n,f\left(x_1,...,x_n\right)\right)=F\left(x_1,...,x_n,y\right)$ όπου $y=f\left(x_1,...,x_n\right)$.
Έπεται από τον κανόνα αλυσίδας ότι ($\underbrace{U\subseteq R^n\xrightarrow{g}D\subseteq R^n\times R\xrightarrow{F}R}_{Fog}$) αν $1\leq i\leq n$ τότε: $\dfrac{\partial Fog}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\partial F}{\partial x_k}\cdot\dfrac{\partial\pi_k}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\dfrac{\partial F}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ (1) αφού, $\dfrac{\partial\pi_k}{\partial x_i}=\begin{cases}0, i\neq k\\ 1, i=k\end{cases}$.

Επειδή όμως, $F\left(x, f\left(x\right)\right)=0$ για κάθε $x \in U$, έπεται ότι $\dfrac{\partial Fog}{\partial x_i}\left(x\right)=0$ για κάθε $x \in U$. Συνεπώς η (1) δίνει $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$, όπου ο υπολογισμός γίνεται στα σημεία $x \in U$ με $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(x\right)\neq 0$.

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση που $m=1$ ο πίνακας Δ του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης (είναι 1×1 και) είναι ο αριθμός $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(a,b\right)\neq 0$.

Στην γενική περίπτωση οι $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}, 1\le i\le n, 1\le j\le m$ της συνάρτησης $f=\left(f_1,...,f_m\right)$ υπολογίζονται ως εξής. Από τον κανόνα της αλυσίδας για την συνάρτηση $Fog: U\subseteq R^n \to R^m$ όπου $g=\left(\pi_1,...,\pi_n, f_1,..., f_m\right)$ έχουμε για το διαφορικό της Fog στο $x\in U$, $x=\left(x_1,...,x_n\right)$, $0=D\left(Fog\right)\left(x\right)=DF\left(y\right)oDg\left(x\right)$ όπου $y=g\left(x\right)=\left(x_1,...,x_n, f_1\left(x_1,...,x_n\right),..., f_m\left(x_1,...,x_n\right)\right)$

Άρα για τους αντίστοιχους πίνακες Jacobi έχουμε:

$$0=\left[D\left(Fog\right)\left(x\right)\right]=\left[DF\left(y\right)\right]\cdot\left[Dg\left(x\right)\right] \quad \text{ή} \quad 0=\left(A,B\right)\cdot\begin{pmatrix} I \\ C\end{pmatrix} \quad (1),$$

όπου,

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

και I ο ταυτοτικός $n\times n$ πίνακας.

Έπεται από την (1) ότι, $0=A+BC$ ή $C=-B^{-1}A$.

Από την τελευταία εξίσωση υπολογίζουμε τις ζητούμενες μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}, 1\le i\le n, 1\le j\le m$ της συνάρτησης f.

Παράδειγμα 1 Έστω ότι δίδεται το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left(\Sigma\right)\ \begin{cases} xu+yv^2=0 \\ xv^3+y^2u^6=0\end{cases}$$

(α) Μπορεί το (Σ) να επιλυθεί ως προς u και v συναρτήσει των x και y κοντά στα σημεία: (ι) $x=1, y=-1, u=1$ και $v=-1$
και (ιι) $x=0, y=1, u=0, v=0$;

(β) Υπολογίστε την $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ στο $x=1$ και $y=-1$ και $x=0, y=1$, αν υπάρχει.

Λύση Θεωρούμε την συνάρτηση $F: R^2\times R^2 \to R^2, F=\left(F_1,F_2\right)$ όπου, $F_1\left(x,y,u,v\right)=xu+yv^2$ και $F_2\left(x,y,u,v\right)=xv^3+y^2u^6$. Η F είναι της κλάσης C^∞ στο

$R^2 \times R^2 \cong R^4$ και $F(1,-1,1,-1) = \left(1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)^2, 1\cdot(-1)^3 + (-1)^2 \cdot 1^6\right) = (0,0)$, επίσης $F(0,1,0,0) = (0,0)$.

Θέλουμε να διαπιστώσουμε αν μπορούμε να λύσουμε το σύστημα ως προς $u(x,y)$ και $v(x,y)$.

Έτσι θεωρούμε την ορίζουσα, $\det\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2yv \\ 6y^2u^5 & 3xv^2 \end{vmatrix} = 3x^2v^2 - 12y^3u^5v$.

Στο σημείο $(x,y,u,v) = (1,-1,1,-1)$ έχουμε ότι $\det\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$. Έπεται από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης ότι υπάρχει μοναδική λύση του (Σ) ως προς $u(x,y), v(x,y)$ κοντά στο σημείο $(x,y,u,v) = (1,-1,1,-1)$.

Διαφορίζοντας ως προς x τις εξισώσεις του συστήματος (Σ) βρίσκουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xu + yv^2\right) = \frac{\partial(x)}{\partial x}\cdot u + x\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial x}\cdot v^2 + y\frac{\partial v^2}{\partial x} = u + x\frac{\partial u}{\partial x} + 2yv\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xv^3 + y^2u^6\right) = \frac{\partial(x)}{\partial x}\cdot v^3 + x\frac{\partial v^3}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial x}\cdot u^6 + y^2\cdot\frac{\partial u^6}{\partial x} = v^3 + 3xv^2\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + 6y^2u^5\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

.

Δηλαδή (Σ΄) $\left\{\begin{array}{l} u + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2yv\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ v^3 + 3xv^2\dfrac{\partial v}{\partial x} + 6y^2u^5\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2yv\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ v^3 + 6y^2u^5\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3xv^2\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{array}\right\}$

Θέτοντας $x=1, y=-1, u=1$ και $v=-1$ στις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στο σύστημα: $\begin{cases} 1 + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ -1 + 6\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$ Απαλείφοντας την $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ βρίσκουμε: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{5}{9}$ και $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{7}{9}$ (εννοείται στο σημείο, $(x,y) = (1,-1)$).

Καθόσον αφορά το σημείο $x=0, y=1, u=0$ και $v=0$, παρατηρούμε ότι $\det\Delta = 0$, έτσι το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης <u>δεν</u> μπορεί να αποφανθεί αν οι εξισώσεις του (Σ) επιλύονται μοναδικά σε αυτό το σημείο.

Παρατηρούμε ακόμη ότι η ορίζουσα του συστήματος (Σ΄) συμπίπτει με την $\det\Delta = \begin{vmatrix} x & 2yv \\ 6y^2u^5 & 3xv^2 \end{vmatrix}$ η οποία για $x=0, y=1, u=0, v=0$ μηδενίζεται. Έτσι η $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ στο $x=0, y=1$ δεν υπάρχει.

Σημείωση Διαφορίζοντας ως προς y τις εξισώσεις του (Σ) και θέτοντας στις προκύπτουσες εξισώσεις $x=1, y=-1, u=1$ και $v=-1$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ στο $(x,y) = (1,-1)$.

Επανερχόμαστε τώρα στο ερώτημα που θέσαμε στην αρχή αυτής της παραγράφου και το επιλύουμε, με την βοήθεια του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης, για συναρτήσεις τριών μεταβλητών. Η γενίκευση στις $n-$ διαστάσεις αφήνεται ως άσκηση.

Εφαρμογή Η επιφάνεια στάθμης έστω S που ορίζεται από την εξίσωση $F(x,y,z)=c_0$, όπου $F(x,y,z)$ είναι μια C^1 συνάρτηση, είναι τοπικά το γράφημα μιας C^1 συνάρτησης δύο μεταβλητών στο σημείο $(x_0,y_0,z_0)\in S$, υπό την προϋπόθεση ότι $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Πράγματι, έστω ότι η F ορίζεται και είναι C^1 στο ανοικτό υποσύνολο D του R^3 και έστω ακόμη $(x_0,y_0,z_0)\in S$ με $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Άρα μία τουλάχιστον από τις μερικές παραγώγους της F στο (x_0,y_0,z_0) δεν μηδενίζεται. Ας υποθέσουμε ότι $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης στην $g=F-c_0$, συνεπώς $g(x_0,y_0,z_0)=0$ και $\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Έπεται ότι υπάρχουν $U\subseteq R^2$ και $V\subseteq R$ ανοικτά σύνολα με $(x_0,y_0)\in U$, $z_0\in V$ και μια μοναδική C^1 συνάρτηση $f:U\to V$ με $f(x_0,y_0)=z_0$ ώστε

$$g\big(x,y,f(x,y)\big)=0 \text{ για κάθε } (x,y)\in U .$$

Ισοδύναμα: $F\big(x,y,f(x,y)\big)=c_0$ για κάθε $(x,y)\in U$.

Έτσι η επιφάνεια στάθμης S που ορίζεται από την εξίσωση $F(x,y,z)=c_0$ ταυτίζεται πλησίον του (x_0,y_0,z_0) με το γράφημα μιας C^1-συνάρτησης $f:U\subseteq R^2\to R$. Έπεται ιδιαίτερα ότι αν $\nabla F(x,y,z)\neq 0$ για κάθε $(x,y,z)\in S$ τότε: Για κάθε $(x,y,z)\in S$ η S πλησίον του (x,y,z) ταυτίζεται με το γράφημα μιας C^1- συνάρτησης δύο μεταβλητών.

Σημειώνουμε ακόμη ότι: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$ και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}.$$

Από τις εξισώσεις αυτές παίρνουμε και την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου Ε της S στο (x_0,y_0,z_0):

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot\nabla g(x_0,y_0,z_0)=0,$$

(πρβλ και τον σχετικό ορισμό στην παράγραφο για τις επιφάνειες στάθμης.)

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε την επιφάνεια S που ορίζεται από την εξίσωση $x^3+3y^2+8xz^2-3z^3y=1$. Να βρεθούν σημεία (x,y,z) της επιφάνειας S πλησίον των οποίων η S ταυτίζεται με το γράφημα μιας C^1 συνάρτησης $z=f(x,y)$.

Λύση Θα χρησιμοποιήσουμε την εφαρμογή του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης που συζητήσαμε προηγουμένως.

Έστω $F(x,y,z)=x^3+3y^2+8xz^2-3z^3y-1$. Η F είναι βέβαια C^∞ συνάρτηση (ως πολυωνυμική) και η επιφάνεια S ορίζεται από την εξίσωση $F(x,y,z)=0$.

Ουσιαστικά ο στόχος μας είναι να επιλύσουμε την εξίσωση $F(x,y,z)=0$ ως προς z ώστε το z να εκφράζεται ως συνάρτηση μόνο των μεταβλητών x και y. Από την προηγούμενη εφαρμογή αυτό μπορεί να γίνει κοντά σε εκείνα τα σημεία $(x_0,y_0,z_0)\in S$ ώστε, $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ (1). Επειδή, $\frac{\partial F}{\partial z}=16xz-9z^2y$, έπεται από την (1) ότι τα ζητούμενα σημεία $(x,y,z)\in S$ είναι εκείνα για τα οποία ισχύει, ότι, $16xz-9z^2y\neq 0 \Leftrightarrow z(16x-9zy)\neq 0 \Leftrightarrow z\neq 0$ και $16x-9zy\neq 0$. Για παράδειγμα τα σημεία του R^3, $\left(0,1,\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$ και $\left(0,-\frac{1}{3},\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$ ικανοποιούν αυτές τις προϋποθέσεις.

Ασκήσεις

1)Αποδείξτε ότι η εξίσωση $xy+z+3xz^5=4$ λύνεται ως προς z σαν συνάρτηση του (x,y) κοντά στο $(1,0,1)$. Υπολογίστε τις $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$ στο $(1,0)$.

2)Ελέγξτε απ’ ευθείας (χωρίς την χρήση του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης) σε ποια σημεία μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση, $F(x,y)=y^2+y+3x+1=0$ ως προς y συναρτήσει του x. Στην συνέχεια επαληθεύστε την απάντηση σας με την απάντηση που δίνει το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης.

Υπολογίστε την $\frac{dy}{dx}$.

3) Δείξτε ότι το σύστημα των εξισώσεων $\begin{cases}3x+y-z+u^2=0\\ x-y+2z+u=0\\ 2x+2y-3z+2u=0\end{cases}$ μπορεί να επιλυθεί ως προς x,y,u συναρτήσει του z, ως προς x,z,u συναρτήσει του y, ως προς y,z,u συναρτήσει του x, αλλά όχι ως προς x,y,z συναρτήσει του u.

4)Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση $f(x,y)=2x^3-3x^2+2y^3+3y^2$.

(α) Βρείτε τα (τέσσερα) σημεία (x,y) του R^2 στα οποία ισχύει $\nabla f(x,y)=0$. Αποδείξτε ότι η f έχει ακριβώς ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο στο R^2.

(β) Έστω S η καμπύλη του R^2 που ορίζεται από την εξίσωση $f(x,y)=0$. Να βρεθούν εκείνα τα σημεία (x_0,y_0) της S που δεν έχουν καμία περιοχή U στην οποία η εξίσωση $f(x,y)=0$ να μπορεί να επιλυθεί ως προς y συναρτήσει του x (ή ως προς x συναρτήσει του y).

5)Έστω $f(x,y)=\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right),(x,y)\in R^2-\{(0,0)\}$. Αντιστρέφεται τοπικά η f κοντά στο σημείο $(0,1)$;

6)Δείξτε ότι η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του R^3, $S^2=\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ έχει την ιδιότητα ότι για κάθε $(a,\beta,\gamma)\in S^2$ η S^2 κοντά στο (a,β,γ) είναι το γράφημα μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών. Τέτοιες επιφάνειες ονομάζονται συνήθως ομαλές επιφάνειες και ο ορισμός αυτός επεκτείνεται εύκολα στον $R^n (n\geq 2)$. Γενικεύστε το παραπάνω αποτέλεσμα για την Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα του $R^n (n\geq 2)$.

7)Δείξτε ότι οι επιφάνειες, του R^3 που ορίζονται από τις εξισώσεις: $x^4-y^3+z^2-1=0$, $x^4+2y+z^2-1=0$ και $x^5+2y^2+3z^3-2=0$ είναι ομαλές.

8)Δείξτε ότι η επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση $x^2+y^2-z^2=0$ δεν είναι ομαλή κοντά στο $(0,0,0)$