Το θεώρημα Αλλαγής μεταβλητής και οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει η δεύτερη βασική μέθοδος υπολογισμού πολλαπλών ολοκληρωμάτων είναι αυτή της <u>αλλαγής μεταβλητής</u>, την οποία έχουμε ήδη συναντήσει στον Λογισμό της μιας μεταβλητής. Υπενθυμίζουμε το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής στην περίπτωση αυτή. Έστω $g:[c,d]\to R$ C^1 συνάρτηση και f συνεχής στο διάστημα $g([c,d])$ τότε, $\int\limits_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx=\int\limits_{c}^{d} f(g(t))\cdot g'(t)dt$ (1).

Θέτομε $\mathrm{I}=[c,d]$ και $J=g(\mathrm{I})$.

Ας υποθέσουμε ότι $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in \mathrm{I}$, επομένως είτε $g'(x)>0$ για κάθε $x\in \mathrm{I}$ (και άρα g γνήσια αύξουσα) ή $g'(x)<0$ για κάθε $x\in \mathrm{I}$ (και άρα g γνήσια φθίνουσα). Αν $g'(x)>0$ για κάθε $x\in \mathrm{I}$ τότε η (1) γράφεται,

$$\int\limits_{g(\mathrm{I})} f(x)dx=\int\limits_{\mathrm{I}} f(g(t))\cdot g'(t)dt \quad (2)$$

(αφού τότε, $g(\mathrm{I})=\left[g(c),g(d)\right]$).

Αν $g'(x)<0$ για κάθε $x\in \mathrm{I}$ τότε η (1) γράφεται,

$$\int\limits_{g(\mathrm{I})} f(x)dx=-\int\limits_{\mathrm{I}} f(g(t))\cdot g'(t)dt \quad (3)$$

(αφού τότε $g(\mathrm{I})=\left[g(d),g(c)\right]$).

Οι (2) και (3) μπορούν να γραφούν με ενιαίο τρόπο ως εξής:

$$\int\limits_{g(\mathrm{I})} f(x)dx=\int\limits_{\mathrm{I}} f(g(t))\cdot \left|g'(t)\right|dt \quad (4)$$

(Η (4) ισχύει ακόμη και όταν $c>d$) Η τελευταία αυτή μορφή είναι εκείνη η οποία θα γενικευθεί στα πολλαπλά ολοκληρώματα. Η συνάρτηση g η οποία μετασχηματίζει τις μεταβλητές θα αντικατασταθεί από ένα <u>μετασχηματισμό</u> των <u>συντεταγμένων</u>, που ορίζεται ως εξής:

20.1 Ορισμός. Έστω $U\subseteq R^n$ ανοικτό. Μια συνάρτηση $g:U\subseteq R^n\to R^n$ καλείται ένας <u>μετασχηματισμός των συντεταγμένων</u> αν ισχύουν τα ακόλουθα:

(ι) Η g είναι C^1 συνάρτηση.

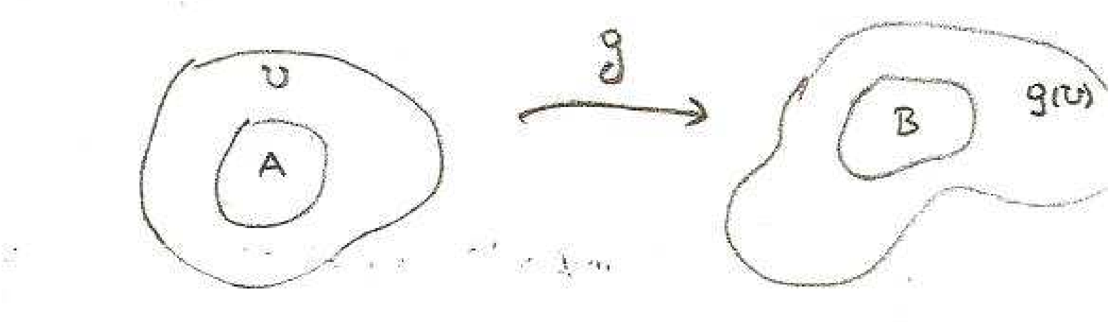
(ιι) Η g είναι $1-1$

(ιιι) Η Ιακωβιανή ορίζουσα $\det\left(J_{g(x)}\right)\neq 0$ για κάθε $x\in U$.

Σημειώνουμε ότι οι (ι) και (ιιι) έχουν ως συνέπεια ότι η g είναι <u>ανοικτή</u> απεικόνιση (δηλαδή $g(V)$ ανοικτό στον R^n για κάθε $V\subseteq U$ με V ανοικτό στον R^n), ιδιαίτερα έπεται ότι το $W=g(U)$ είναι <u>ανοικτό</u> υποσύνολο του R^n. Από το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης έπεται ότι η $g^{-1}:W\to U$ είναι C^1 συνάρτηση. Μια τέτοια συνάρτηση g ονομάζεται <u>αμφιδιαφόριση</u>. (Πρβλ. και το βιβλίο [1])

20.2 Θεώρημα (Αλλαγής μεταβλητής για πολλαπλά ολοκληρώματα)
Έστω $\mathrm{A},\mathrm{B}\subseteq R^n$ Jordan μετρήσιμα σύνολα, $U\subseteq R^n$ ανοικτό με $\overline{\mathrm{A}}\subseteq U$ και $g:U\to R^n$ μετασχηματισμός συντεταγμένων με $g(\mathrm{A})=\mathrm{B}$. Αν η $f:\mathrm{B}\to R$ είναι ολοκληρώσιμη (π.χ. f συνεχής στο $\overline{\mathrm{B}}$) τότε η $fog\cdot\left|\det J_g\right|:\mathrm{A}\to R$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει, $\int\limits_{\mathrm{B}=g(\mathrm{A})} f(y)dy=\int\limits_{\mathrm{A}} f\left(g(x)\right)\left|\det J_{g(x)}\right|dx$ (1).

Σημείωση 20.2.1 Το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής ισχύει και με την υπόθεση ότι τα $\mathrm{A},\mathrm{B}\subseteq R^n$ είναι ανοικτά Jordan μετρήσιμα σύνολα, η $g:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ είναι μετασχηματισμός συντεταγμένων με $g(\mathrm{A})=\mathrm{B}$ και ακόμη ότι οι συναρτήσεις $\left|\det J_g\right|$ και $\dfrac{1}{\left|\det J_g\right|}$ είναι φραγμένες επί του A (δες το [5] σ. 505-6)



Παρατηρήσεις. 1) Αν η f είναι η σταθερά συνάρτηση $f\equiv 1$, τότε ο τύπος (1) δίνει για το $n-$ διάστατο όγκο (περιεχόμενο) του B:

$$V(\mathrm{B})=\int\limits_{\mathrm{A}}\left|\det J_{g(x)}\right|dx \quad (2).$$

Ο τύπος (2) ερμηνεύεται γεωμετρικά ως εξής:
Η Ιακωβιανή ορίζουσα $\det J_g$ του μετασχηματισμού g μας δίνει το μέτρο της μεταβολής που ο g επιφέρει στους όγκους (ή στα εμβαδά αν $n=2$). Αυτό φαίνεται καλύτερα στην περίπτωση που ο $g:R^n\to R^n$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, οπότε $J_g=L$, όπου L ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού g (πρβλ το παράδειγμα 2 μετά τον ορισμό 5.4) και επομένως

$$V(\mathrm{B})=\int\limits_{\mathrm{A}}\left|\det L\right|dx=V(\mathrm{A})\cdot\left|\det L\right|.$$

2) Αν $n=2$ $g(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v)\right)$ και συμβολίσουμε με $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ την $\det J_g$ τότε οι τύποι (1) και (2) γράφονται και ως εξής

$$\int\limits_{\mathrm{B}=g(\mathrm{A})} f(x,y)dxdy=\int\limits_{\mathrm{A}} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv \quad (3)$$

$$V(\mathrm{B})=\int\limits_{\mathrm{A}}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv \quad (4).$$

Ένας από τους σκοπούς (ίσως ο πλέον σημαντικός)του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητής είναι να μας δώσει μια μέθοδο με την οποία κάποια διπλά, τριπλά ή πολλαπλά ολοκληρώματα απλοποιούνται. Έτσι μπορεί να συναντήσουμε ένα ολοκλήρωμα $\int_{\mathrm{B}} f(y)\,dy$, όπου είτε η f ή το χωρίο B είναι πολύπλοκα και ο απευθείας υπολογισμός του ολοκληρώματος είναι δύσκολος. Με κατάλληλη επιλογή του μετασχηματισμού συντεταγμένων, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση ή (γεγονός που είναι σημαντικότερο) το καινούργιο χωρίο A $\left(=g^{-1}(\mathrm{B})\right)$ ενδέχεται να απλοποιούνται και το ολοκλήρωμα $\int_{\mathrm{A}} f\left(g(x)\right)\left|\det J_{g(x)}\right|dx$ να υπολογίζεται ευκολότερα.

Αλλαγή μεταβλητής στο διπλό ολοκλήρωμα

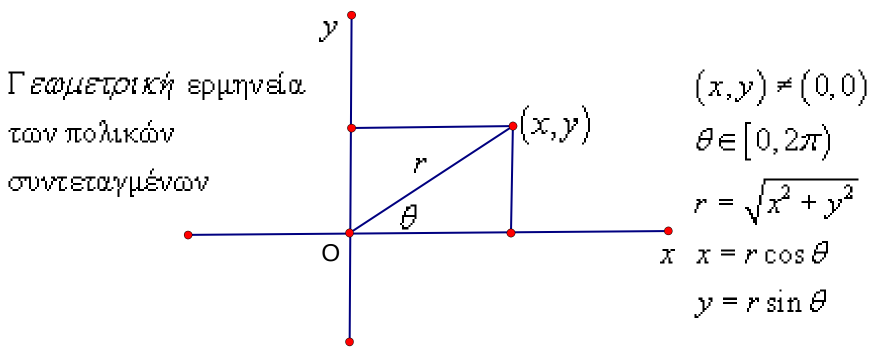
Στην συνέχεια θα εξετάσουμε κάποιους χρήσιμους μετασχηματισμούς συντεταγμένων στο R^2.

1)Ο μετασχηματισμός των πολικών συντεταγμένων στο R^2.

Έστω $g: R^2 \to R^2 : g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, δηλαδή, $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$

Η g είναι βέβαια μια C^∞ απεικόνιση καθώς οι συντεταγμένες συναρτήσεις $x(r,\theta) = r\cos\theta$ και $y(r,\theta) = r\sin\theta$ της g είναι C^∞ διαφορίσιμες. Το ζεύγος (r,θ) είναι οι <u>πολικές συντεταγμένες</u> του $(x,y)\in R^2$ με $(x,y)\neq(0,0)$. Η g δεν είναι $1-1$ απεικόνιση, αν όμως περιορίσουμε κατάλληλα το πεδίο ορισμού της μπορεί να γίνει $1-1$. Για παράδειγμα αν απαιτήσουμε ότι $r>0$ και $0\le\theta<2\pi$ (ή $-\pi<\theta\le\pi$) τότε η $g\big|(0,+\infty)\times[0,2\pi)$ είναι $1-1$ και $g\left((0,+\infty)\times[0,2\pi)\right) = R^2-\{(0,0)\}$. Αν περιορίσουμε ακόμη την g στο ανοικτό σύνολο $U=(0,+\infty)\times(0,2\pi)$ τότε το $g(U) = R^2-\{(x,0): x\ge 0\}$ είναι επίσης ανοικτό σύνολο και η g γίνεται αμφιδιαφόριση αφού η αντίστροφή της $h=g^{-1}: g(U)\to U : h(x,y) = (r,\theta)$, όπου $r=\sqrt{x^2+y^2}$ και $\theta\in(0,2\pi): x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$ είναι επίσης C^∞ διαφορίσιμη συνάρτηση. (Η συνάρτηση $h=g^{-1}$ μας δίνει ουσιαστικά την τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού $x+iy\neq 0$.) Η ορίζουσα του πίνακα Jacobi της g είναι

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) = r .$$



Ο τύπος αλλαγής μεταβλητής από πολικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι, όπως προκύπτει από τον γενικό τύπο (3),

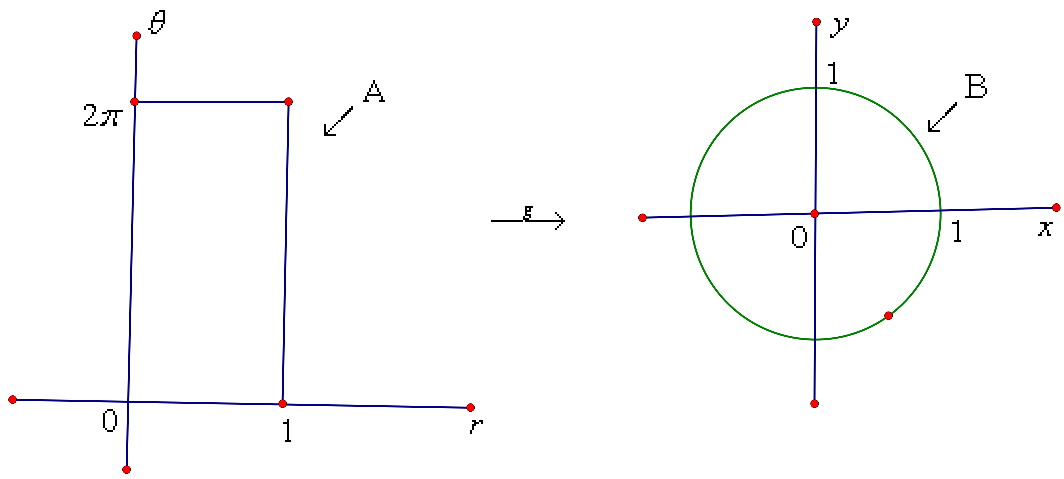
$$\int_{B=g(A)} f(x,y)\,dxdy = \int_{A} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta \quad (5)$$

Το εμβαδόν του $g(\mathrm{A})=\mathrm{B}$ δίνεται από τον τύπο που (προκύπτει από τον (4))

$$V(\mathrm{B}) = \int_{A} r\,dr\,d\theta \qquad (6)$$

Το Α είναι βέβαια ένα Jordan μετρήσιμο σύνολο στο επίπεδο $r\theta$ των <u>πολικών συντεταγμένων</u> με $\overline{\mathrm{A}} \subseteq (0,+\infty)\times(0,2\pi)$ και το Β η εικόνα του στο καρτεσιανό <u>xy – επίπεδο</u> μέσω του πολικού μετασχηματισμού.

<u>Πολικό επίπεδο</u> <u>Καρτεσιανό επίπεδο</u>



Η εικόνα του ανοικτού ορθογωνίου $\mathrm{A}=(0,1)\times(0,2\pi)$ μέσω του πολικού μετασχηματισμού g είναι ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος εκτός της ακτίνας $[(0,0),(1,0)]$. Δηλαδή $g(\mathrm{A})=\mathrm{B}=\{(x,y): x^2+y^2<1\}-\{(x,0): 0\le x<1\}$. Η εικόνα του $\Re=(0,1]\times[0,2\pi)$ είναι ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος εκτός του σημείου $(0,0)$.

2) Έστω $\mathrm{T}: R^2 \to R^2$ μια $1-1$ γραμμική απεικόνιση ώστε, $\mathrm{T}(u,v)=(au+\beta v, \gamma u+\delta v)$, $u,v\in R^2$. Επειδή Τ είναι $1-1$ ο πίνακας $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ που δίνει την Τ είναι αντιστρέψιμος και έχει ορίζουσα $\det \mathrm{A} = a\delta-\beta\gamma \neq 0$. Επίσης η Τ είναι και επί του R^2 $\left(\mathrm{T}(R^2)=R^2\right)$ αφού είναι γραμμική και $1-1$. Εδώ έχουμε $x=au+\beta v$ και $y=\gamma u+\delta v$.

Η Τ είναι βέβαια $C^{\infty}-$απεικόνιση ως γραμμική. Η Ιακωβιανή ορίζουσα της Τ είναι η $\det J_{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=a\delta-\beta\gamma\neq 0$.

Αυτό το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο αφού η Τ είναι γραμμική και επομένως $D\mathrm{T}(a)=\mathrm{T}$ για κάθε $a\in R^2$.

Η απεικόνιση Τ ως γραμμική απεικονίζει (παράλληλες) ευθείες σε (παράλληλες) ευθείες και άρα παραλληλόγραμμα σε παραλληλόγραμμα.

Η Τ <u>δεν</u> διατηρεί αναγκαία τις γωνίες (εκτός αν $a=\delta$ και $\beta=-\gamma$).

Ο τύπος αλλαγής μεταβλητής στην περίπτωση του γραμμικού μετασχηματισμού $\mathrm{T}(u,v)=(au+\beta v,\gamma u+\delta v)$ είναι ο ακόλουθος (Α είναι βέβαια ένα Jordan μετρήσιμο υποσύνολο του R^2).

$$\int\limits_{\mathrm{B}=\mathrm{T}(\mathrm{A})} f(x,y)dxdy=|a\delta-\beta\gamma|\int\limits_{\mathrm{A}} f(au+\beta v,\gamma u+\delta v)\,dudv.$$

Το εμβαδόν του $\mathrm{B}=\mathrm{T}(\mathrm{A})$ είναι το,

$$V(\mathrm{B})=\int\limits_{\mathrm{B}} dxdy=|a\delta-\beta\gamma|\int\limits_{\mathrm{A}} dudv=|a\delta-\beta\gamma|\cdot V(\mathrm{A})$$

Σημείωση. Το προηγούμενο αποτέλεσμα γενικεύεται εύκολα και για γραμμικές $1-1$ απεικονίσεις $\mathrm{T}:R^n\to R^n$ για κάθε $n\geq 1$.

Παραδείγματα 1) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\int\limits_{\Re}(x^2+y^2+1)dxdy$, όπου $\Re$ είναι το εσωτερικό του κύκλου $x^2+y^2=4$, δηλαδή $\Re=\{(x,y):x^2+y^2<4\}$.

Λύση Στο παράδειγμα αυτό το $\Re$ είναι σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Οφείλουμε να το περιγράψουμε σε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή να βρούμε το $D=g^{-1}(\Re)$ όπου $g(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ ο πολικός μετασχηματισμός. Το εσωτερικό D του κύκλου $x^2+y^2=4$ σε πολικές συντεταγμένες περιγράφεται ως εξής: $D=\{(r,\theta):0\leq r<2, 0\leq\theta<2\pi\}$. Το $\Re$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες περιγράφεται ως $\Re=\left\{(x,y):-2<x<2 \text{ και } -\sqrt{4-x^2}<y<\sqrt{4-x^2}\right\}$ και βέβαια $g(D)=\Re$ όπου g ο πολικός μετασχηματισμός δηλαδή το $\Re$ είναι χωρίο τύπου 1.

Έτσι το δοθέν διπλό ολοκλήρωμα (χρησιμοποιώντας την περιγραφή τύπου 1 του $\Re$) γράφεται ως: $\int\limits_{\Re}(x^2+y^2+1)dxdy=\int\limits_{-2}^{2}\left(\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2+1)\,dy\right)dx$.

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι αρκετά δύσκολο να υπολογισθεί. Χρησιμοποιώντας όμως τον τύπο αλλαγής μεταβλητής και τον πολικό μετασχηματισμό βρίσκουμε:

$$\int\limits_{\Re=g(D)} \left(x^2+y^2+1\right)dxdy = \int\limits_D f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)rdrd\theta = \int\limits_D \left(r^2+1\right)rdrd\theta =$$

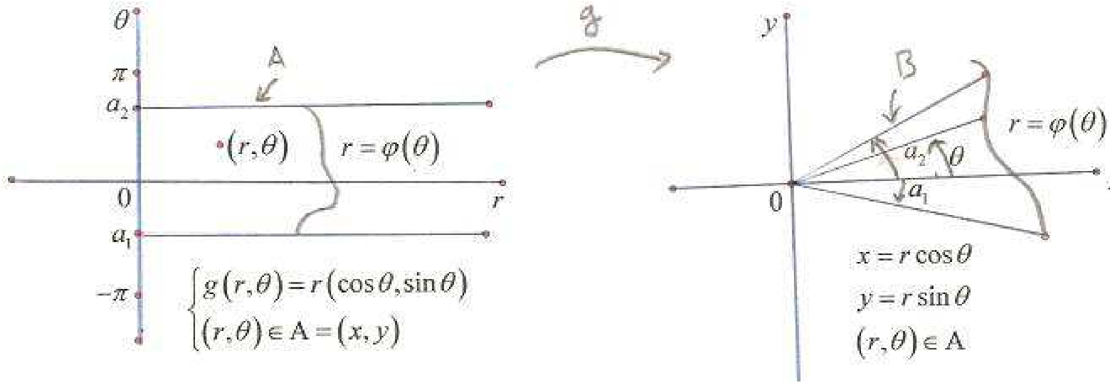
$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(r^2+1\right)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 \left(r^3+r\right)dr\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{2}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 6d\theta = \left[6\theta\right]_0^{2\pi} = 12\pi .$$

(Πρβλ και την παρατήρηση στο τέλος της παραγράφου)

2) Έστω $-\pi < a_1 < a_2 < \pi$ και $\varphi:[a_1,a_2]\to R$ συνεχής με $\varphi(\theta)>0$ για κάθε $\theta\in[a_1,a_2]$.

Να υπολογισθεί το εμβαδόν του συνόλου $g(\mathrm{A})=\mathrm{B}$ (όπου g ο πολικός μετασχηματισμός και) $\mathrm{A}=\{(r,\theta): a_1\le\theta\le a_2 \text{ και } 0\le r\le\varphi(\theta)\}$.

Από τον τύπο (4) εφαρμοσμένο για τον πολικό μετασχηματισμό, βρίσκουμε $V(\mathrm{B})=\int\limits_{\mathrm{A}} rdrd\theta = \int_{a_1}^{a_2}\left(\int_0^{\varphi(\theta)} rdr\right)d\theta = \int_{a_1}^{a_2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\varphi(\theta)} d\theta = \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2}\left(\varphi(\theta)\right)^2 d\theta$. Έτσι το εμβαδόν του $g(\mathrm{A})=\mathrm{B}$ που είναι ένα Jordan μετρήσιμο χωρίο του R^2 (που σε πολικές συντεταγμένες φράσσεται από τις ευθείες $\theta=a_1$ και $\theta=a_2$ και την καμπύλη $r=\varphi(\theta)$) δίνεται από τον παραπάνω τύπο.

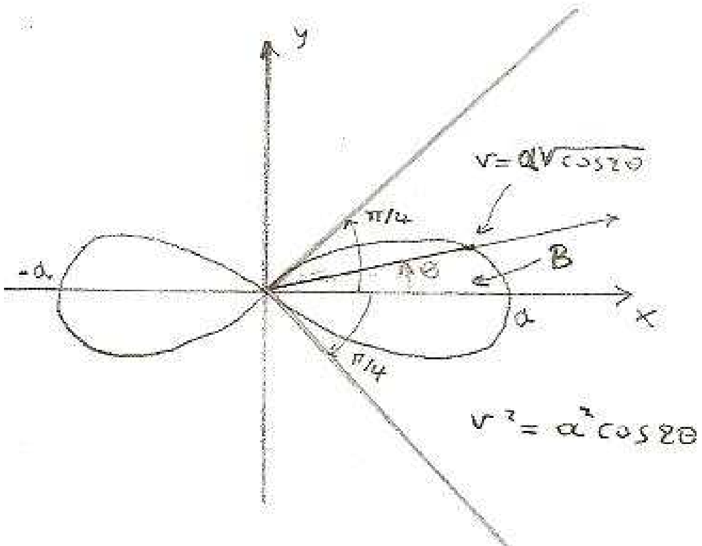


3) Υπολογίστε το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $r^2=a^2\cos 2\theta$, όπου $a>0$.

Λύση Φτιάχνουμε σε καρτεσιανές συντεταγμένες το γράφημα αυτής της καμπύλης, (που ονομάζεται <u>λημνίσκος</u>) ώστε να καθορίσουμε τα όρια ολοκλήρωσης.

Εδώ η συνάρτηση $\varphi:[0,\pi]\to R$ είναι η $\varphi(\theta)=a\sqrt{\cos 2\theta}$.

Για να ολοκληρώσουμε στο γραμμοσκιασμένο χωρίο, αφήνουμε το r, $0\le r\le a\sqrt{\cos 2\theta}$ και το θ, $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$.



$$\mathrm{A}=\left\{(r,\theta): 0\le\theta\le\frac{\pi}{4} \text{ και } 0\le r\le a\sqrt{\cos 2\theta}\right\}$$

χωρίο τύπου ΙΙ στο πολικό επίπεδο,

$$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]\cup\left[\pi,\frac{5\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$$

θ	r
0 $\frac{\pi}{4}$	a 0
$\frac{3\pi}{4}$ π	0 a

Λόγω συμμετρίας του χωρίου που περικλείεται από την $r^2 = a^2\cos 2\theta$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι 4 φορές το εμβαδόν που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.
Έτσι έχουμε:

$$\mathrm{A}(\mathrm{B}) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r dr \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2 \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2\cdot 2}$$

$= \frac{a^2}{4}$. Άρα το ζητούμενο εμβαδό ισούται με $4\frac{a^2}{4} = a^2$.

Σημείωση. (α) Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του τμήματος του λημνίσκου που βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο μπορεί να προκύψει και από παράδειγμα (2) με $a_1 = 0 < a_2 = \frac{\pi}{4}$ και $\varphi(\theta) = a\sqrt{\cos 2\theta}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

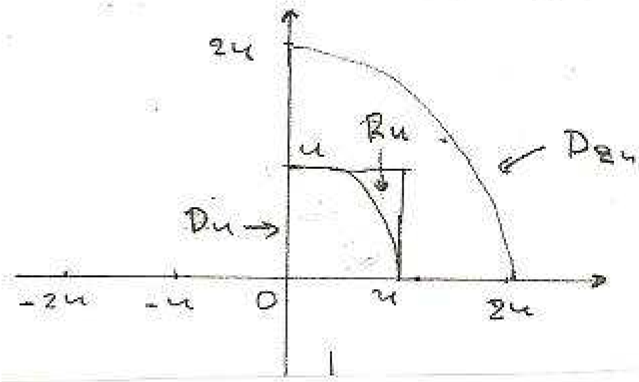
Έτσι έχουμε: $$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\varphi(\theta))^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{4}$$

(β) Επίσης από το παράδειγμα (2) με $\varphi(\theta) = a, \theta \in [-a_1, a_2]$ $(a > 0)$ λαμβάνουμε το εμβαδόν του δίσκου $\Re = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le a^2\}$. Πράγματι, αν $\Re(a_1, a_2)$ είναι η εικόνα του ορθογωνίου $[0, a]\times[a_1, a_2]$ μέσω του g τότε,
$V(\Re(a_1, a_2)) = \int_{\Re(a_1,a_2)} dxdy = \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2} a^2 d\theta = \frac{1}{2}a^2(a_2 - a_1)$. Λαμβάνοντας όρια θα έχουμε,
$\lim_{\substack{a_1\to\pi \\ a_2\to-\pi}} V(\Re(a_1, a_2)) = \frac{1}{2}a^2(2\pi) = \pi a^2$. (Πρβλ. και την παρατήρηση στο τέλος της παραγράφου).

4) Αποδείξτε ότι ισχύει: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{u\to+\infty}\int_0^{u} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ και κατά συνέπεια:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}\ .$$

<u>Λύση</u> Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $(x,y)\in R^2$ και υπολογίζουμε τα διπλά ολοκληρώματα $\int_{D_u} f(x,y)dxdy$, $\int_{R_u} f(x,y)dxdy$ και $\int_{D_{2u}} f(x,y)dxdy$, όπου $D_u = \{(x,y): x\geq 0, y\geq 0 \text{ και } x^2+y^2\leq u^2\}$,
$D_{2u} = \{(x,y): x\geq 0, y\geq 0 \text{ και } x^2+y^2 \leq 4u^2\}$ και $R_u = [0,u]\times[0,u], u>0$. Έπεται ότι $D_u \subseteq R_u \subseteq D_{2u}$



$$\int_{R_u} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^u\int_0^u e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^u\left(\int_0^u e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dy\right)dx = \int_0^u\left(e^{-x^2}\int_0^u e^{-y^2}dy\right)dx =$$

$$\int_0^u e^{-x^2}dx\cdot\int_0^u e^{-y^2}dy = \left(\int_0^u e^{-x^2}dx\right)^2.$$ (Θεώρημα Fubini)

$$\int_{D_u} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^u re^{-r^2}drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(1-e^{-r^2}\right)\right]_0^u d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(1-e^{-u^2}\right)d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(1-e^{-u^2}\right).$$

Εδώ χρησιμοποιούμε τον πολικό μετασχηματισμό $g(r,\theta) = r(\cos\theta, \sin\theta)$ και παρατηρούμε ότι $g\left([0,u]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right) = D_u$. Επίσης για τον υπολογισμό του $\int_0^u re^{-r^2}dr$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής, $x=-r^2 \Rightarrow \frac{dx}{dr} = -2r$, άρα

$$\int_0^u re^{-r^2}dr = -\frac{1}{2}\int_0^{-u^2} e^x dx = -\frac{1}{2}\left[e^x\right]_0^{-u^2} = -\frac{1}{2}\left(e^{-u^2}-1\right) = \frac{1}{2}\left(1-e^{-u^2}\right)$$

Ανάλογα υπολογίζουμε: $\int_{D_{2u}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-4u^2}\right)$

Επειδή $D_u \subseteq R_u \subseteq D_{2u}$ και $e^{-(x^2+y^2)} > 0$ για κάθε $(x,y)\in R^2$, έπεται ότι

$\int_{D_u} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \int_{R_u} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \int_{D_{2u}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ για κάθε $u>0$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι : $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\left(1-e^{-u^2}\right)^{\frac{1}{2}} \le \int\limits_0^u e^{-x^2}dx \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\left(1-e^{-4u^2}\right)^{\frac{1}{2}},\ u>0$.

Από την τελευταία ανισότητα λαμβάνοντας όρια δηλαδή αφήνοντας $u\to+\infty$, ευρίσκουμε
$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

5) Έστω P το παραλληλόγραμμο που φράσσεται από τις ευθείες $y=2x, y=2x-2, y=x$ και $y=x+1$. Υπολογίστε το $\int\limits_{\mathrm{P}} xydxdy$ κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x=u-v$ και $y=2u-v$ δηλαδή $\mathrm{T}(u,v)=(u-v,2u-v)$.

Λύση Ο T είναι ένας γραμμικός 1−1 μετασχηματισμός ($\mathrm{T}(u,v)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ και ο πίνακας $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος αφού $\det \mathrm{A}=-1-(-1)\cdot 2=-1+2=1>0$).

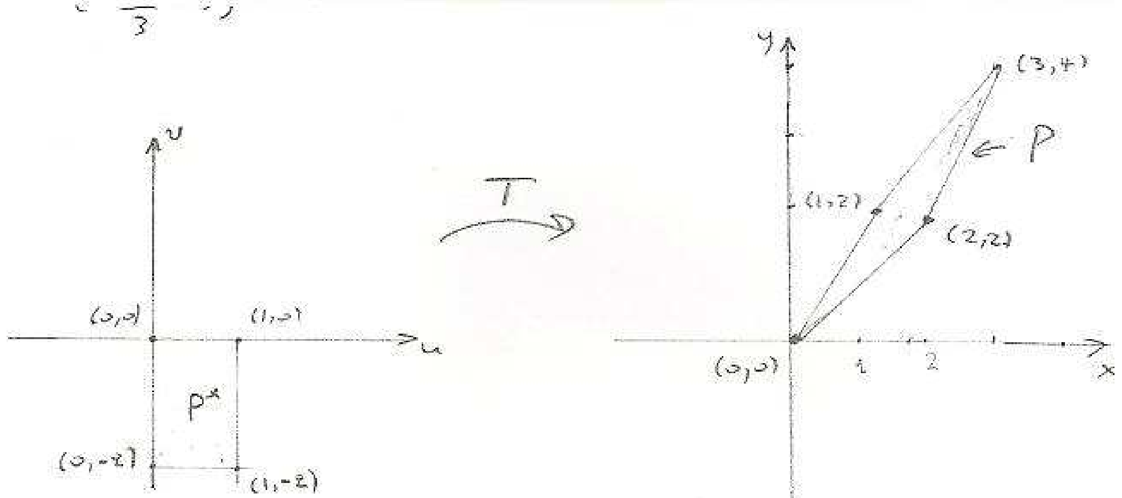
Παρατηρούμε ότι $\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{P})=\mathrm{P}^*$,όπου P^* είναι το ορθογώνιο που ορίζεται από τις ευθείες $v=0, v=-2, u=0, u=1$

Επιπλέον , $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\right| = 1$ όπως ήταν αναμενόμενο αφού T γραμμική συνάρτηση και άρα το διαφορικό της <u>συμπίπτει </u>με τον εαυτό της.
Έπεται από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής (τύπος (3) και από την εφαρμογή (2)) ότι

$$\int\limits_{\mathrm{P}=\mathrm{T}(\mathrm{P}^*)} xydxdy = |\det \mathrm{A}|\cdot\int\limits_{\mathrm{P}^*}(u-v)(2u-v)dudv = = \int\limits_{\mathrm{P}^*}(u-v)(2u-v)dudv =$$

$$\int\limits_{-2}^{0}\int\limits_{0}^{1}\left(2u^2-3uv+v^2\right)dudv = \int\limits_{-2}^{0}\left[\frac{2}{3}u^3-\frac{3u^2v}{2}+v^2u\right]_0^1 du = \int\limits_{-2}^{0}\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}v+v^2\right)dv =$$

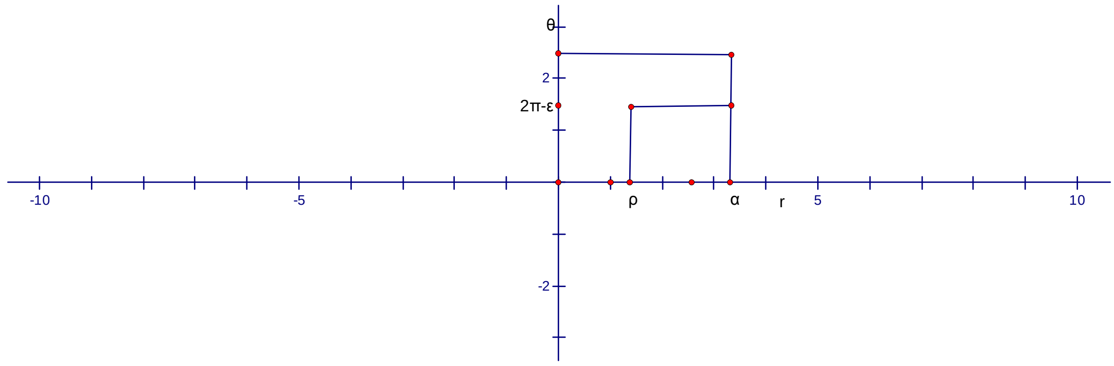
$$\left[\frac{2}{3}v-\frac{3}{4}v^2+\frac{v^3}{3}\right]_{-2}^{0} = -\left[\frac{2}{3}(-2)-3-\frac{8}{3}\right] = -\left[-\frac{12}{3}-3\right] = 7.$$

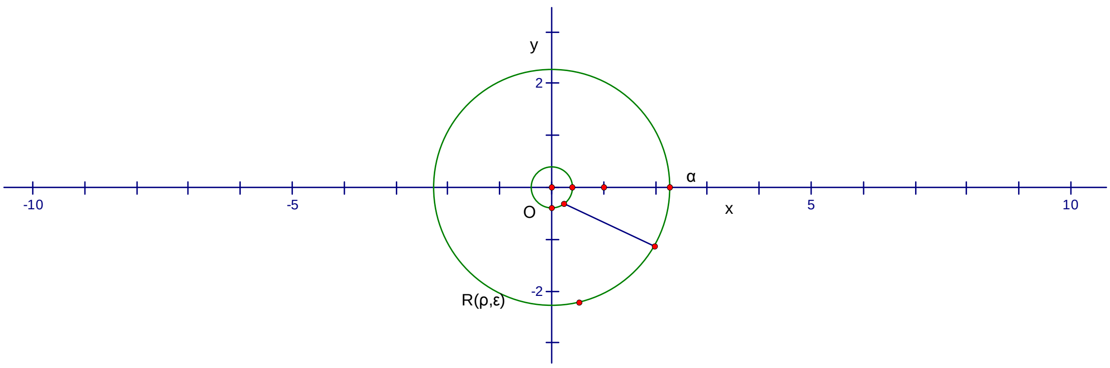


<u>Παρατήρηση.</u> Οι τύποι (3) και (4) του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητής ισχύουν και όταν οι συνθήκες ότι ο μετασχηματισμός g είναι C^1 και 1-1 δεν ικανοποιούνται σε κάποια σημεία ή σε ένα πεπερασμένο σύνολο καμπυλών μέτρου μηδέν. Η παρατήρηση αυτή, την οποία ήδη έχουμε (σιωπηρά) χρησιμοποιήσει στα παραδείγματα, μπορεί να δικαιολογηθεί χρησιμοποιώντας το ίδιο το θεώρημα και την σημείωση 20.2.1. Ας ελέγξουμε πως μπορεί να γίνει αυτό με ένα παράδειγμα. Έστω $\Re$ ο κλειστός δίσκος $x^2+y^2\le a, a>0$ του xy επιπέδου. Η εικόνα του τετραγώνου $[0,a]\times[0,2\pi]$ μέσω του πολικού μετασχηματισμού g είναι ο δίσκος $\Re$.

Παρατηρούμε ότι $g(r,0)=g(r,2\pi)=(r,0), r\in[0,a]$ και η g δεν είναι $1-1$.

Θεωρούμε το τετράγωνο $D(\rho,\varepsilon)=[\rho,a]\times[0,2\pi-\varepsilon]$, όπου $0<\rho<a$ και $0<\varepsilon<2\pi$ στο πολικό επίπεδο και την εικόνα του $\Re(\rho,\varepsilon)$ μέσω του g.





Οι συνθήκες του θεωρήματος ικανοποιούνται τώρα για τον g και τα χωρία $D(\rho,\varepsilon),\Re(\rho,\varepsilon)$ έτσι έχουμε:

$$V\left(\Re(\rho,\varepsilon)\right)=\int\limits_{\Re(\rho,\varepsilon)} dxdy=\int\limits_{D(\rho,\varepsilon)} rdrd\theta=\int\limits_0^{2\pi-\varepsilon}\left(\int\limits_\rho^a rdr\right)d\theta=\int\limits_0^{2\pi-\varepsilon}\left(\frac{a^2}{2}-\frac{\rho^2}{2}\right)d\theta$$

$$=(2\pi-\varepsilon)\left(\frac{a^2}{2}-\frac{\rho^2}{2}\right).$$

Λαμβάνοντας όρια συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{\substack{\rho\to a\\ \varepsilon\to 0}} V\left(\Re(\rho,\varepsilon)\right)=\lim_{\substack{\rho\to a\\ \varepsilon\to 0}}(2\pi-\varepsilon)\left(\frac{a^2}{2}-\frac{\rho^2}{2}\right)=\pi a^2$$

Ανάλογα επιχειρήματα μπορεί να εφαρμοσθούν και στη γενική περίπτωση και βέβαια ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν και στην περίπτωση τριπλών ή πολλαπλών ολοκληρωμάτων.