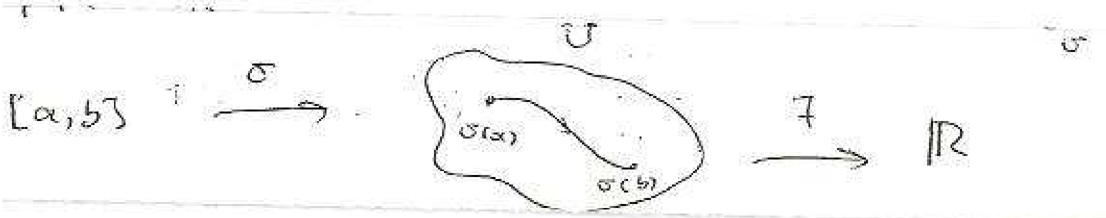
Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Έστω $U \subseteq R^3$ ανοικτό σύνολο και $f: U \subseteq R^3 \to R$ συνεχής πραγματική συνάρτηση. Θεωρούμε μια C^1 καμπύλη $\sigma:[a,b] \to U$ ώστε $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ και την σύνθετη συνάρτηση $fo\sigma:[a,b] \to R$, δηλαδή την $t \in [a,b] \to f(x(t), y(t), z(t)) \in R$.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους της f κατά μήκος της σ ορίζεται ως

$$\int_\sigma f ds \overset{op}{=} \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt .$$

Μερικές φορές χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό $\int_\sigma f(x,y,z) ds$



Παρατηρήσεις 1) Ουσιαστικά αυτό που απαιτείται για να ορισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας βαθμωτής (δηλαδή πραγματικής) συνάρτησης $f: U \subseteq R^3 \to R$ κατά μήκος της καμπύλης σ είναι, το να είναι η $fo\sigma:[a,b] \to R$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση, ας πούμε να έχει πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών και να είναι φραγμένη.

Έτσι αν η f είναι συνεχής και η σ κατά τμήματα C^1 καμπύλη τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\sigma f ds$ ορίζεται.

2)Αν η $f \equiv 1$ (σταθερά ίση με 1) τότε βέβαια σύμφωνα με το θεώρημα 9.3 βρίσκουμε το μήκος της σ

$$\ell(\sigma) = \int_\sigma d\sigma = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt .$$

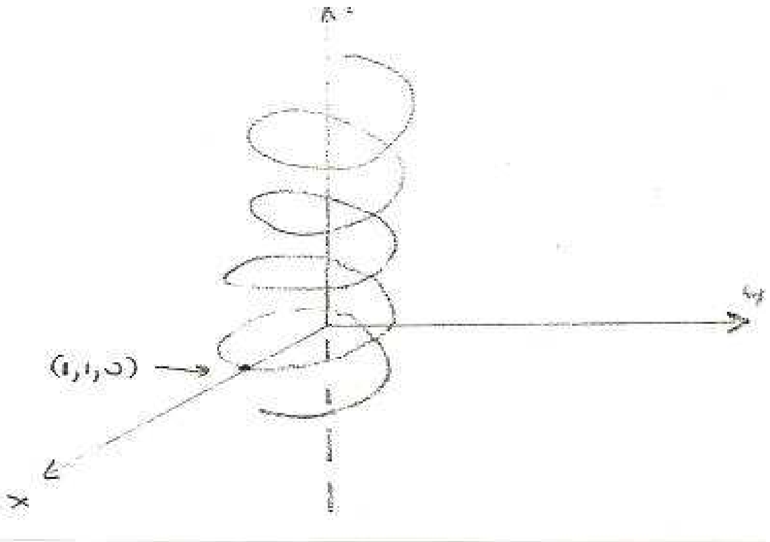
Παράδειγμα. Έστω $\sigma:[0, 2\pi] \to R^3 : \sigma(t) = (\cos t, \sin t, t) =$ η έλικα και $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Να υπολογιστεί το $\int_\sigma f(x,y,z) ds$.

Λύση

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{(\cos'(t))^2 + (\sin'(t))^2 + ((t)')^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} =$$
$$\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

Συνεπώς

$$\int_\sigma f(x,y,z) ds = \int_0^{2\pi} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \sqrt{2} dt =$$
$$\int_0^{2\pi} (1+t^2) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1+t^2) dt = \sqrt{2} \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} (3 + 4\pi^2)$$



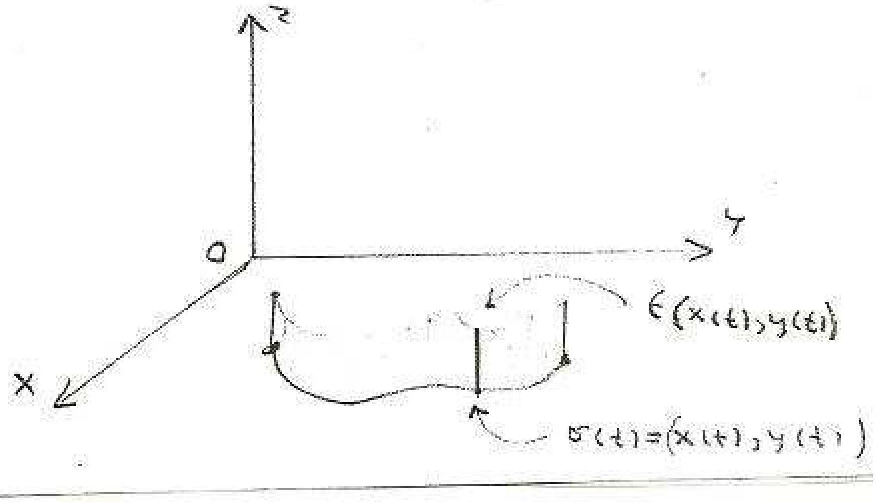
Η $\sigma(t)=(\cos t,\sin t,t)$ είναι μια δεξιόστροφη έλικα, η οποία βρίσκεται στην επιφάνεια ενός κυλίνδρου

Σημειώνουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (πρώτου είδους) ορίζεται και για μια βαθμωτή συνάρτηση <u>δύο</u> μεταβλητών καθώς και για μια <u>επίπεδη</u> καμπύλη. Έτσι έχουμε ότι αν $f:U\subseteq R^2\to R$ είναι (συνεχής) συνάρτηση και $\sigma:[a,b]\to U$ κατά τμήματα C^1 καμπύλη τότε, $\int_\sigma fds=\int_a^b f(x(t),y(t))\cdot\|\sigma'(t)\|dt$

(Ο ίδιος ορισμός μπορεί βέβαια να δοθεί και για μια βαθμωτή συνάρτηση $n-$μεταβλητών $f:U\subseteq R^n\to R$ και για μια καμπύλη $\sigma:[a,b]\to U\subseteq R^n$).

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν $f(x,y)\geq 0$ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της βαθμωτής συνάρτησης $f(x,y)$ κατά μήκος της καμπύλης $\sigma(t)=(x(t),y(t))$ έχει μια γεωμετρική ερμηνεία.

Έτσι (αν η σ κάνει μόνο μια φορά τον γύρο της εικόνας της) το ολοκλήρωμα $\int_\sigma f(x(t),y(t))ds$ παριστάνει το εμβαδόν (της μιας πλευράς) της «κορδέλας» που σχηματίζεται.



Επικαμπύλια ολοκληρώματα β΄ είδους

Έστω $U \subseteq R^3$ ανοικτό, $F: U \subseteq R^3 \to R^3$ συνεχής συνάρτηση (διανυσματικό πεδίο) και $\sigma:[a,b] \to U$ μια κατά τμήματα C^1 καμπύλη . Θεωρούμε την συνάρτηση, $t \in [a,b] \to F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \in R$, όπου με $F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$ εννοούμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $F(\sigma(t))$ και $\sigma'(t)$ του R^3.

Ορίζουμε ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους της διανυσματικής συνάρτησης F κατά μήκος της καμπύλης σ τον αριθμό

$$\int_\sigma F \cdot ds \underset{o\rho}{=} \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt \qquad (1)$$

Σημείωση Με τον όρο διανυσματικό πεδίο θα εννοούμε μια συνάρτηση $F: U \subseteq R^n \to R^n$, όπου U ανοικτό στον R^n η οποία είναι συνεχής (και συνήθως της κλάσης C^1). Βέβαια για τον ορισμό του ολοκληρώματος μας αρκεί μόνο η συνέχεια της F επί του ίχνους $[\sigma] = \sigma[a,b]$ της καμπύλης σ.

Ένας άλλος συμβολισμός για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β΄ είδους είναι και ο ακόλουθος

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_\sigma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \qquad (2)$$

όπου F_1, F_2, F_3 είναι οι συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου F δηλαδή $F = (F_1, F_2, F_3)$. Η παράσταση $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ (3) ονομάζεται και διαφορική μορφή.

Ορίζουμε ως ολοκλήρωμα της διαφορικής μορφής (3) αυτό που δίδεται από τον τύπο (2), δηλαδή $\int_\sigma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_\sigma F \cdot ds$

Αν $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a,b]$, τότε συνδυάζοντας το παραπάνω παίρνουμε τους τύπους: $\int_\sigma F \cdot ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int_\sigma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz =$

$$\int_a^b [F_1(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)$$

$]dt$.

Μπορούμε φυσικά να ορίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου δύο μεταβλητών $F: U \subseteq R^2 \to R^2, F = (F_1, F_2)$ κατά μήκος μιας επίπεδης καμπύλης $\sigma:[a,b] \to U, \sigma(t) = (x(t), y(t))$. Έτσι έχουμε

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int_\sigma F_1 dx + F_2 dy =$$

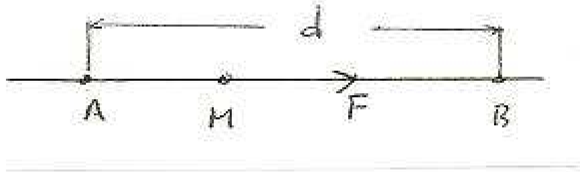
$$= \int_a^b \left[F_1(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + F_2(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \right] dt.$$

Εννοείται βέβαια ότι η F είναι συνεχής συνάρτηση τουλάχιστον πάνω στο ίχνος $[\sigma] = \sigma[a,b]$ της καμπύλης σ, η οποία υποτίθεται κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη. Ανάλογα μπορεί να ορισθεί και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\sigma F \cdot ds$

στην περίπτωση ενός διανυσματικού πεδίου $F:U\subseteq R^n\to R^n$ πάνω σε μια καμπύλη $\sigma:[a,b]\to U\ \ (n\geq 2)$.

(*) Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικού πεδίου ως έργο.

Γνωρίζουμε από την στοιχειώδη Μηχανική ότι αν μια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ μετατοπίζει ένα υλικό σημείο κατά την διεύθυνσή της, τότε το έργο Ε που παράγεται από την δύναμη F ισούται με $\mathrm{E}=F\cdot d$ όπου d είναι η μετατόπιση του υλικού σημείου και F το μέτρο της δύναμης.



Η $\vec{F}$ μετατοπίζει το Μ από το σημείο Α στο σημείο Β.

Έστω τώρα F ένα διανυσματικό πεδίο στο χώρο $F:R^3\to R^3$ το οποίο υποθέτουμε ότι είναι ένα πεδίο δυνάμεων π.χ. το βαρυτικό πεδίο και m μια μικρή μάζα (ή το ηλεκτρικό πεδίο και ένα μικρό ηλεκτρικό φορτίο). Ας υποθέσουμε ότι το σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δύναμης F κατά μήκος της C^1 καμπύλης $\sigma:[a,b]\to R^3$. Τότε το έργο το παραγόμενο από την F ευρίσκεται με τον τύπο:

$$\mathrm{E}=\int_a^b F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt .$$

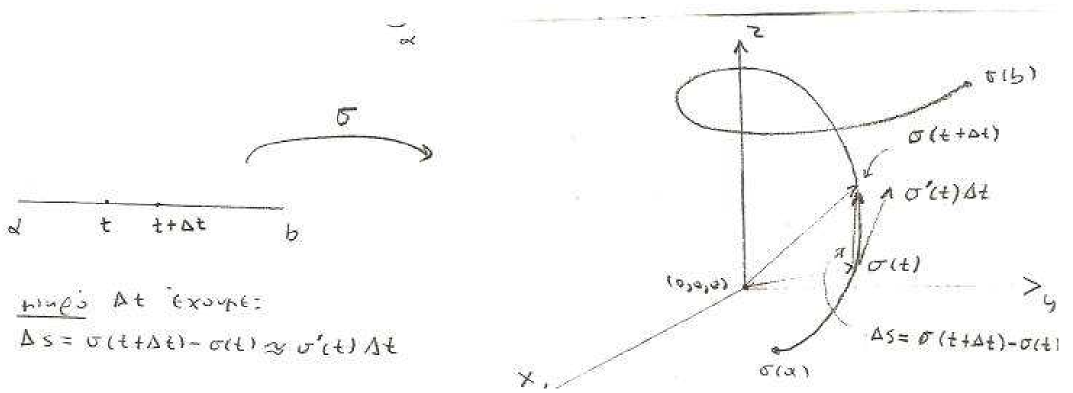
Ο τύπος αυτός δικαιολογείται ως ακολούθως. Καθώς το t μεταβάλλεται σε ένα μικρό διάστημα από το t έως το $t+\Delta t$, το σωματίδιο κινείται από το $\sigma(t)$ στο $\sigma(t+\Delta t)$ και η μετατόπιση του δίνεται από το διάνυσμα $\Delta s=\sigma(t+\Delta t)-\sigma(t)$. Από τον ορισμό της παραγώγου καμπύλης έχουμε την προσέγγιση, $\Delta s\approx\sigma'(t)\Delta t$. Έπεται ότι το έργο που παράγεται για τη μετακίνηση της μάζας m από τη θέση $\sigma(t)$ στην θέση $\sigma(t+\Delta t)$ είναι κατά προσέγγιση $F(\sigma(t))\cdot\Delta s\approx F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\Delta t$.

Αν υποδιαιρέσουμε το διάστημα $[a,b]$ σε $N-$μικρά υποδιαστήματα π.χ. ίσα μεταξύ τους με N πολύ μεγάλο, $a=t_0<t_1<...<t_N=b$ και $\Delta s_k=\sigma(t_{k+1})-\sigma(t_k)$, τότε το συνολικό έργο που παράγεται από την δύναμη F είναι κατά προσέγγιση

$$\sum_{k=0}^{N-1}F(\sigma(t_k))\cdot\Delta s_k=\sum_{k=0}^{N-1}F(\sigma(t_k))\cdot\sigma'(t_k)\Delta t \quad (1) \quad (\text{ όπου } \Delta t=t_{k+1}-t_k=\frac{b-a}{N})$$

Όταν το $N\to\infty$, η προσέγγιση μας διαρκώς βελτιώνεται, επομένως είναι λογικό να ορίσουμε ως έργο παραγόμενο από την F καθώς η μάζα m μετατοπίζεται από τη θέση $\sigma(a)$ στην θέση $\sigma(b)$ το όριο των παραπάνω ποσοτήτων (1) . Αλλά από τον ορισμό του ολοκληρώματος με χρήση ενδιαμέσων αθροισμάτων Riemann (η F υποτίθεται συνεχής και η σ κατά τμήματα C^1) το όριο αυτό υπάρχει και ισούται με

$$\mathrm{E}=\int_a^b F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt$$



Παραδείγματα 1) Έστω $F = \left(y^2 - z^2\right)i + 2yzj - x^2k$ και $\sigma(t) = \left(t^2, 2t, t\right) = \left(x(t), y(t), z(t)\right), t \in [0,1]$. Να υπολογισθεί το $\int\limits_{\sigma} F \cdot ds$

Λύση $\sigma'(t) = (2t, 2, 1)$ και

$F\left(\sigma(t)\right) = \left[(2t)^2 - t^2\right]i + \left[2(2t)\cdot t\right]j - \left[t^2\right]^2 k = 3t^2 i + 4t^2 j - t^4 k$

Έπεται ότι $F\left(\sigma(t)\right)\cdot\sigma'(t) = \left(3t^2\right)\cdot 2t + \left(4t^2\right)\cdot 2 + \left(-t^4\right)\cdot 1 = 6t^3 + 8t^2 - t^4$ και άρα

$$\int\limits_{\sigma} F \cdot ds = \int\limits_0^1 \left(6t^3 + 8t^2 - t^4\right)dt = 6\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 + 8\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{119}{30}.$$

2)Υπολογίστε το $\int\limits_{\sigma} x^2dx + xydy + dz$, όπου

$\sigma(t) = \left(t, t^2, 1\right) = \left(x(t), y(t), z(t)\right), t \in [0,1]$.

Λύση $\sigma'(t) = \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right) = (1, 2t, 0)$. Επομένως

$$\int\limits_{\sigma} x^2dx + xydy + dz = \int\limits_0^1 \left(\left(x(t)\right)^2 \cdot x'(t) + x(t)\cdot y(t)\cdot y'(t) + 1\cdot z'(t)\right)dt = \int\limits_0^1 \left(t^2 + 2t^4\right)dt =$$

$\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + 2\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{11}{5}$ (Εδώ η $F(x,y,z) = \left(x^2, xy, 1\right), (x,y,z) \in R^3$).

3)Έστω $F(x,y,z) = \left(x^3, y, z\right)$ διανυσματικό πεδίο δυνάμεων και $\sigma(t) = (0, a\cos t, a\sin t), t \in [0, 2\pi]$, όπου $a > 0$. Δείξτε ότι το έργο που παράγεται από το πεδίο F καθώς ένα σωματίδιο κινείται στον κύκλο κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας a (κύκλος του yz επιπέδου) είναι μηδέν.

Λύση $\sigma'(t) = (0, -a\sin t, a\cos t)$, συνεπώς

$F\left(\sigma(t)\right)\cdot\sigma'(t) = F\left(x(t), y(t), z(t)\right)\cdot\left(x'(t), y'(t), z'(t)\right) =$

$\left(\left(x(t)\right)^3, y(t), z(t)\right)\cdot\left(x'(t), y'(t), z'(t)\right) = \left(x(t)\right)^3\cdot x'(t) + y(t)\cdot y'(t) + z(t)\cdot z'(t) =$

$0 - a^2\cos t\sin t + a^2\sin t\cos t = 0$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$.

Παρατηρούμε ότι το $F\left(\sigma(t)\right)$ ανήκει στο yz επίπεδο και είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα $\sigma'(t)$ της σ στο $t \in [0, 2\pi]$. Επομένως δεν παράγει έργο.

Αυτό επαληθεύεται βέβαια και από τον τύπο του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β΄ είδους,

$$\mathrm{E} = \int_{\sigma} F \cdot ds = \int_{\sigma} x^3 dx + y dy + z dz = \int_{0}^{2\pi} \left(0 - a^2 \cos t \sin t + a^2 \cos t \sin t\right) dt = 0 .$$

Σχόλιο. Δύο καμπύλες με την ίδια γεωμετρική εικόνα (δηλαδή το ίδιο ίχνος) ενδέχεται για το ίδιο διανυσματικό πεδίο F να δίνουν διαφορετική τιμή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος, όπως θα διαπιστώσουμε με παραδείγματα. Σημασία έχει η παραμέτρηση της καμπύλης. (Πρβλ. την άσκηση 2 (δ).)

22.1 Ορισμός 1) Έστω $\sigma : [a,b] \to R^3$ και $\rho : [c,d] \to R^3$ καμπύλες. Έστω ακόμη $h : [a,b] \to [c,d]$ C^1 συνάρτηση η οποία είναι $1-1$ και επί με $h(a) = c$ και $h(b) = d$, (επομένως h γνήσια αύξουσα) ώστε $\sigma = \rho o h$ $\underbrace{[a,b] \xrightarrow{h} [c,d] \xrightarrow{\rho} R^3}_{\sigma = \rho o h}$

Η καμπύλη σ λέγεται τότε μια αναπαραμέτρηση της ρ

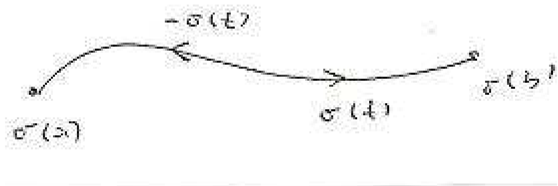
(Οι ρ και σ έχουν τον ίδιο προσανατολισμό. Παρατηρούμε ότι $\sigma'(t) = \rho'(h(t)) \cdot h'(t)$. Επειδή h γνήσια αύξουσα και διαφορίσιμη $h'(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [a,b]$. Η h μεταβάλλει την ταχύτητα με την οποία ένα σημείο κινείται πάνω στην καμπύλη ρ].

Αν επί πλέον η $h^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ είναι και αυτή C^1 τότε λέμε ότι οι σ και ρ είναι ισοδύναμες καμπύλες (παρατηρήστε ότι $\rho = \sigma o h^{-1}$).

2) Έστω $\sigma : [a,b] \to R^3$ καμπύλη. Η καμπύλη $-\sigma : [a,b] \to R^3 : (-\sigma)(t) = \sigma(a+b-t), t \in [a,b]$ ονομάζεται αντίθετη καμπύλη της σ . Παρατηρούμε ότι $-\sigma = \sigma o h$ όπου $h : [a,b] \to [a,b] : h(t) = a+b-t, t \in [a,b]$.

[Η $-\sigma$ έχει αντίθετο προσανατολισμό σε σχέση με την σ].

$\underbrace{[a,b] \xrightarrow{h} [a,b] \xrightarrow{\sigma} R^3}_{-\sigma = \sigma o h}$



Παρατηρήσεις. 1) Παρατηρούμε ότι αν η σ είναι αναπαραμέτρηση της ρ, ώστε $\sigma = \rho o h$ τότε σ και ρ έχουν προφανώς το ίδιο ίχνος $[\sigma] = [\rho o h] = [\rho]$ και το ίδιο μήκος $\ell(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt = \int_c^d \|\rho'(t)\| dt = \ell(\rho)$.

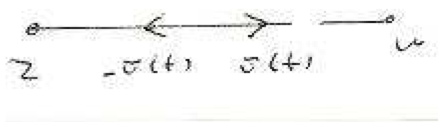
Πράγματι για το μήκος παρατηρούμε ότι: $\ell(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b \|\rho'(h(t)) \cdot h'(t)\| dt = \int_a^b \|\rho'(h(t))\| \cdot h'(t) dt$ (αφού $h' \geq 0$ στο $[a,b]$) $\underset{h(t)=x}{=} \int_{h(a)}^{h(b)} \|\rho'(x)\| dx = \int_c^d \|\rho'(x)\| dx = \ell(\rho)$.

2) Αν σ καμπύλη, τότε $[\sigma]=[-\sigma]$ και $\ell(\sigma)=\ell(-\sigma)$.

Παραδείγματα: 1) Έστω $\sigma(t)=(t^2,t^2), \rho(t)=(t,t), t\in[0,1]$. Τότε η σ είναι αναπαραμέτρηση της ρ με $h(t)=t^2, t\in[0,1]$. Πράγματι $\rho(h(t))=\rho(t^2)=(t^2,t^2)=\sigma(t), t\in[0,1]$. Εδώ το κοινό ίχνος των σ και ρ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$.

2) Έστω $\sigma(t)=(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), t\in[0,1]$ και $\rho(t)=(\cos t,\sin t), t\in[0,2\pi]$, τότε $\sigma(t)=\rho(h(t))$ με $h(t)=2\pi t, t\in[0,1]$.
Πράγματι, $\rho(h(t))=\rho(2\pi t)=(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)=\sigma(t)$. Επομένως οι σ και ρ είναι ισοδύναμες καμπύλες. Εδώ το κοινό ίχνος των σ και ρ είναι ο μοναδιαίος κύκλος του xy επιπέδου.

3)Έστω $\sigma(t)=(1-t)z+t\omega, t\in[0,1]$, όπου $z,\omega\in R^3$ με $z\neq\omega$ (το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα από το z στο ω).
Τότε $(-\sigma)(t)=\sigma(0+1-t)=\sigma(1-t)=[1-(1-t)]z+(1-t)\omega=(1-t)\omega+tz, t\in[0,1]$, είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το ω στο z.

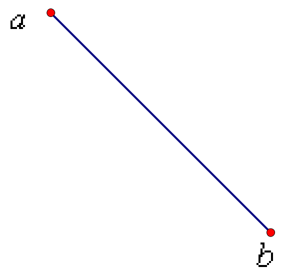


4)Έστω $\sigma(t)=(\cos t,\sin t), t\in[0,2\pi]$ τότε
$(-\sigma)(t)=\sigma(2\pi-t)=(\cos(2\pi-t),\sin(2\pi-t))=(\cos(-t),\sin(-t))$
Παρατηρούμε ότι η $-\sigma:[0,2\pi]\to R^2$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος που διαγράφεται κατά την αντίθετη φορά από τον κύκλο $\sigma(t)=(\cos t,\sin t), t\in[0,2\pi]$.

22.2 Ορισμός: Έστω $\sigma:[a,b]\to R^n$ καμπύλη.
1)Η σ λέγεται <u>κλειστή</u> αν $\sigma(a)=\sigma(b)$
2)Η σ λέγεται <u>απλή</u> αν είναι $1-1$ συνάρτηση στο $[a,b]$ δηλαδή <u>δεν</u> τέμνει τον εαυτό της.
3) Η σ λέγεται <u>απλή κλειστή</u> καμπύλη, αν είναι κλειστή ($\sigma(a)=\sigma(b)$) και η $\sigma|[a,b)$ είναι $1-1$.

Παραδείγματα: 1) Ο μοναδιαίος κύκλος με την συνήθη παραμέτρηση $\sigma:[0,2\pi]\to R^2:\sigma(t)=(\cos t,\sin t), t\in[0,2\pi]$ είναι απλή και κλειστή καμπύλη. Η καμπύλη $\rho:[0,3\pi]\to R^2:\rho(t)=(\cos t,\sin t)$ δεν είναι κλειστή ούτε απλή, αφού $\rho(3\pi)=(-1,0)\neq\rho(0)=(1,0)$. Παρατηρούμε ότι $[\sigma]=[\rho]$.

2) Έστω $a,b\in R^2$ με $a\neq b$. Η καμπύλη $\sigma(t)=\begin{cases}(1-t)a+tb, & t\in[0,1]\\ (2-t)b+(t-1)a, & t\in[1,2]\end{cases}$ είναι κλειστή καμπύλη. Παρατηρούμε ότι $[\sigma]=[\rho]$, όπου $\rho(t)=(1-t)a+tb, t\in[0,1]$.



3) Αν $f:[a,b]\subseteq R\to R$ συνεχής συνάρτηση τότε η καμπύλη $\gamma:[a,b]\to R^2, \gamma(t)=(t,f(t)), t\in[a,b]$ είναι απλή. Αν η f είναι κατά τμήματα C^1 τότε η γ έχει μήκος, $\ell(\gamma)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$.

Παρατηρήσεις 1) Η έννοια της αναπαραμέτρησης καμπύλων $\rho:[c,d]\to R^3$ και $\sigma:[a,b]\to R^3$, μπορεί να ορισθεί και ως εξής:

θεωρούμε μια C^1 απεικόνιση $h:[a,b]\to[c,d]$ ώστε h $1-1$ και επί του $[c,d]$ ώστε οι ρ και σ συνδέονται μέσω της h ώστε $\sigma=\rho o h$ $\underbrace{[a,b]\xrightarrow{h}[a,b]\xrightarrow{\rho}R^3}_{\sigma=\rho o h}$

Επειδή η h είναι συνεχής και $1-1$ ορισμένη σε διάστημα έπεται ότι είναι είτε γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα και επειδή είναι διαφορίσιμη θα έχουμε ότι είτε $h'(t)\geq 0$ για κάθε $t\in[a,b]$ (και άρα $h(a)=c, h(b)=d$) ή $h'(t)\leq 0$ για κάθε $t\in[a,b]$ (και άρα $h(a)=d, h(b)=c$).

Στην πρώτη περίπτωση ($h'(t)\geq 0$ για κάθε $t\in[a,b]$) έχουμε την έννοια της αναπαραμέτρησης που έχουμε ορίσει.

Στην δεύτερη περίπτωση ($h'(t)\leq 0$ για κάθε $t\in[a,b]$), θέτομε $\varphi:[a,b]\to[a,b]:\varphi(t)=a+b-t, t\in[a,b]$, και παρατηρούμε ότι $-\sigma=(\rho o h)o\varphi=\rho o(h o\varphi)$.

Η συνάρτηση $h o\varphi:[a,b]\to[c,d]$ είναι $1-1$ επί γνήσια αύξουσα και βέβαια C^1, άρα αναγόμαστε στην πρώτη περίπτωση. (και οι δύο έννοιες αναπαραμέτρησης είναι ουσιαστικά οι ίδιες)

2)Αποδεικνύεται ότι αν σ και ρ είναι <u>απλές</u> καμπύλες, (δηλαδή $\sigma:[a,b]\to R^3$, και $\rho:[c,d]\to R^3$ κατά τμήματα C^1καμπύλες οι οποίες είναι $1-1$ στα $[a,b]$ και $[c,d]$ αντίστοιχα, με το <u>ίδιο ίχνος</u> δηλαδή $[\sigma]=[\rho]$ και επιπλέον $\sigma'(t)\neq 0, \forall t\in[a,b]$ και $\rho'(t)\neq 0, \forall t\in[c,d]$, τότε η μια αποτελεί αναπαραμέτρηση της άλλης από την έννοια της προηγούμενης παρατήρησης. Δηλαδή υπάρχει $h:[a,b]\to[c,d]$ C^1 $1-1$ και επί ώστε $\sigma=\rho o h$.

3) Έστω $\sigma_\kappa:[a_\kappa,b_\kappa]\to R^n,\kappa=1,2,....,N,\ (N\geq 2)$, καμπύλες ώστε για κάθε $\kappa=1,2,...,N-1$, το τελικό σημείο σ_κ ταυτίζεται με το αρχικό της $\sigma_{\kappa+1}$ (δηλαδή $\sigma_\kappa(b_\kappa)=\sigma_{\kappa+1}(a_{\kappa+1})$). Έτσι σχηματίζεται μια καμπύλη σ του R^n με αρχικό σημείο το $\sigma_1(a_1)$ και τελικό το $\sigma_N(b_N)$ την οποία συμβολίζουμε με $\sigma=\sigma_1+...+\sigma_N$. Αν $f:[\sigma]\to R^n$ είναι συνεχής συνάρτηση τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι $\int_\sigma f\cdot ds=\int_{\sigma_1} f\cdot ds+...+\int_{\sigma_N} f\cdot ds$.

Ένας ανάλογος τύπος ισχύει και για τα επικαμπύλια ολοκληρώματα πρώτου είδους.
(Για την απόδειξη της παρατηρούμε ότι, με μια αναπαραμέτρηση της σ_κ που διατηρεί τον προσανατολισμό μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού της σ_κ είναι το διάστημα $[\kappa-1,\kappa]$ και συνεπώς το πεδίο ορισμού της σ είναι το $[0,N]$.)

22.3 Θεώρημα Έστω $\rho:[c,d]\to R^3$ καμπύλη και $F:[\rho]\to R^3$ συνεχές διανυσματικό πεδίο.

(ι) Αν σ είναι μια αναπαραμέτρηση της ρ τότε $\int_\sigma F\cdot ds=\int_\rho F\cdot ds$.

(ιι) Αν $-\rho:[c,d]\to R^3$ είναι η αντίθετη καμπύλη της ρ τότε $\int_{-\rho} F\cdot ds=-\int_\rho F\cdot ds$

Απόδειξη: (ι) Έστω $\sigma:[a,b]\to R^3$ μία αναπαραμέτρηση της ρ τότε βέβαια, $\sigma=\rho oh$ με $h:[a,b]\to[c,d]$, $\underbrace{[a,b]\xrightarrow{h}[c,d]\xrightarrow{\rho}R^3}_{\sigma=\rho oh}$ $1-1$ και επί ($h(a)=c$ και $h(b)=d$).

Έπεται ότι, $\sigma'(t)=\rho'(h(t))\cdot h'(t),t\in[a,b]$ (κανόνας αλυσίδας)

Συνεπώς

$$\int_\sigma F\cdot ds=\int_a^b F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt=\int_a^b F\left(\rho(h(t))\right)\cdot\rho'(h(t))\cdot h'(t)dt=$$

$$\int_a^b\left[F\left(\rho(h(t))\right)\cdot\rho'(h(t))\right]\cdot h'(t)dt\underset{x=h(t)}{=}\int_{h(a)}^{h(b)}F(\rho(x))\cdot\rho'(x)dx=$$

$$\int_c^d F(\rho(x))\cdot\rho'(x)dx=\int_\rho F\cdot ds.$$

(ιι) Έστω $\sigma=-\rho=\rho oh$ όπου $h:[c,d]\to[c,d]:h(t)=c+d-t,t\in[c,d]$.

Έπεται ότι,

$$\int_\sigma F\cdot ds=\int_{-\rho}F\cdot ds=\int_c^d F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt=\int_c^d F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt=$$

$$\int_c^d\left[F\left(\rho(h(t))\right)\cdot\rho'(h(t))\right]\cdot h'(t)dt=\int_{h(a)}^{h(b)}F(\rho(x))\cdot\rho'(x)dt=\int_d^c F(\rho(x))\cdot\rho'(x)dx=$$

$$-\int_c^d F(\rho(x))\cdot\rho'(x)dx=-\int_\rho F\cdot ds$$

Παρατήρηση. Παρατηρούμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β΄- είδους είναι ένα προσανατολισμένο ολοκλήρωμα, υπό την έννοια ότι έχουμε αλλαγή του πρόσημου αν αντιστρέψουμε τον προσανατολισμό της καμπύλης. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους δεν έχει αυτή την ιδιότητα, όπως φαίνεται από το ακόλουθο:

22.4 Θεώρημα. Έστω $\rho:[c,d]\to R^3$ καμπύλη και $F:[\rho]\to R$ συνεχής (πραγματική) συνάρτηση.

(ι) Αν $\sigma:[a,b]\to R^3$ είναι αναπαραμέτρηση της ρ τότε $\int_\sigma Fds=\int_\rho Fds$.

(ιι) Αν $-\rho:[c,d]\to R^3$ είναι η αντίθετη καμπύλη της ρ τότε $\int_{-\rho} Fds=\int_\rho Fds$.

Απόδειξη: (ι) Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο όπως το (ι) του προηγουμένου θεωρήματος.

(ιι) Έστω $\sigma=-\rho=\rho o h$, όπου $h:[c,d]\to[c,d]:h(t)=c+d-t,t\in[c,d]$, τότε $\sigma'(t)=\rho'(h(t))\cdot h'(t)=-\rho'(h(t)),t\in[c,d]$

Έπεται ότι

$$\int_{-\rho} Fds=\int_\sigma Fds=\int_c^d F(\sigma(t))\cdot\|\sigma'(t)\|dt=\int_c^d F(\rho(h(t)))\cdot\|\rho'(h(t))\|\cdot|h'(t)|dt=$$

$$\int_c^d F(\rho(h(t)))\cdot\|\rho'(h(t))\|dt=-\int_c^d F(\rho(h(t)))\cdot\|\rho'(h(t))\|\cdot h'(t)dt \underset{x=h(t)}{=}$$

$$-\int_{h(c)}^{h(d)} F(\rho(x))\cdot\|\rho'(x)\|dx=-\int_d^c F(\rho(x))\cdot\|\rho'(x)\|dx=\int_c^d F(\rho(x))\cdot\|\rho'(x)\|dx=\int_\rho Fds.$$

Σημείωση. Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα μελετήθηκαν κατά τον 19ο αιώνα σε σχέση κυρίως με προβλήματα στην Φυσική, πιο συγκεκριμένα στον ηλεκτρομαγνητισμό, στην ροή των ρευστών, σε προβλήματα που εμπλέκουν δυνάμεις κτλ.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι σημαντικό καθώς γενικεύει το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. Υπενθυμίζουμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο $F:U\subseteq R^3\to R^3$ είναι πεδίο κλίσεων αν υπάρχει $f:U\subseteq R^3\to R$ C^1 συνάρτηση με $F=\nabla f$ δηλαδή $F(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x),\frac{\partial f}{\partial y}(x),\frac{\partial f}{\partial z}(x)\right)$, $x=(x,y,z)\in U$, U ανοικτό στον R^3. Αντίστοιχος ορισμός δίδεται και για ένα διανυσματικό πεδίο κλίσεων $F:U\subseteq R^n\to R^n$, $n\geq 2$. Το αποτέλεσμα που πρόκειται να αποδείξουμε διατυπώνεται και αποδεικνύεται, για λόγους απλότητας, για διανυσματικά πεδία $F:U\subseteq R^3\to R^3$, αλλά βέβαια ισχύει και για διανυσματικά πεδία $F:U\subseteq R^n\to R^n$

22.5 Θεώρημα Έστω $f:U\subseteq R^3\to R$, C^1 συνάρτηση και $\sigma:[a,b]\to U$ (κατά τμήματα) C^1 – καμπύλη. Τότε ισχύει

$$\int_\sigma \nabla f\cdot ds=f(\sigma(b))-f(\sigma(a))$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την σύνθετη συνάρτηση $F: t \in [a,b] \to f(\sigma(t)) \in R$. Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε $\underbrace{[a,b] \xrightarrow{\sigma} U \subseteq R^3 \xrightarrow{f} R}_{F = f o \sigma}$,

$F'(t) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t), t \in [a,b]$, (δηλαδή

$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\sigma(t)) \cdot z'(t)$, $t \in [a,b]$, αν $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$).

Η συνάρτηση F είναι συνεχής συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής ορισμένη και κατά τμήματα C^1 στο $[a,b]$. Έπεται από το θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού ότι : $\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a) = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$.

Άρα, $\int_\sigma \nabla f \cdot ds = \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int_a^b F'(t)dt = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$.