Παρατηρήσεις. 1) Το ανάλογο αυτού του αποτελέσματος είναι το θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού στην ακόλουθη μορφή. Αν $\mathrm{I} \subseteq R$ διάστημα $f: \mathrm{I} \to R$ C^1 συνάρτηση και $a, b \in \mathrm{I}$ με $a < b$ τότε, $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

2) Το προηγούμενο αποτέλεσμα μας λέει ότι, αν ένα διανυσματικό πεδίο F είναι <u>πεδίο κλίσεων</u> (κάποιας C^1 συνάρτησης $f: U \subseteq R^3 \to R$) και Α,Β είναι σημεία του U (το οποίο υποτίθεται ανοικτό και συνεκτικό) τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του F κατά μήκος μιας καμπύλης που συνδέει τα Α και Β και βρίσκεται μέσα στο U, εξαρτάται <u>μόνο</u> από τα Α και Β. Έτσι αν μπορούμε να αναγνωρίσουμε το δοθέν διανυσματικό πεδίο F ως πεδίο κλίσεων οι υπολογισμοί μας διευκολύνονται κατά πολύ. Σημειώνουμε ότι ένα C^1 διανυσματικό πεδίο <u>δεν</u> είναι αναγκαία το πεδίο κλίσεων κάποιας C^1 πραγματικής συνάρτησης, όπως φαίνεται στο παράδειγμα (3) παρακάτω.

Παραδείγματα 1) Έστω $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$. Αν $\sigma: [0,1] \to R^3$ είναι καμπύλη που συνδέει τα σημεία $\mathrm{A}\left(1, \sqrt{2}, -1\right)$ και $\mathrm{B}\left(0, \sqrt{3}, 2\right)$ να ευρεθεί το έργο που παράγεται από το διανυσματικό πεδίο F κατά μήκος της σ. ($\sigma(0) = \mathrm{A}, \sigma(1) = \mathrm{B}$).

Λύση Το ζητούμενο έργο δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\mathrm{E} = \int_\sigma F \cdot ds$ (1).

Επειδή η F είναι ένα πεδίο κλίσεων, $F = \nabla f$, όπου $f(x,y,z) = xyz$, υπολογίζουμε αμέσως ότι $\mathrm{E} = \int_\sigma F \cdot ds = f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A}) = 0 - \left(1 \cdot \sqrt{2} \cdot (-1)\right) = \sqrt{2}$.

2) Έστω $F(x,y,z) = -\dfrac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z)$, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ (πρόκειται για το πεδίο δυνάμεων βαρύτητας με $G = m = M = 1$). Τότε το έργο που παράγει η δύναμη βαρύτητας όταν ένα σωματίδιο μετακινείται από το $\mathrm{A} = (x_1, y_1, z_1)$ στο $\mathrm{B} = (x_2, y_2, z_2)$ ακολουθώντας οποιαδήποτε καμπύλη σ (που <u>δεν</u> διέρχεται από το $(0,0,0)$) εξαρτάται μόνο από τα δοθέντα σημεία Α και Β.

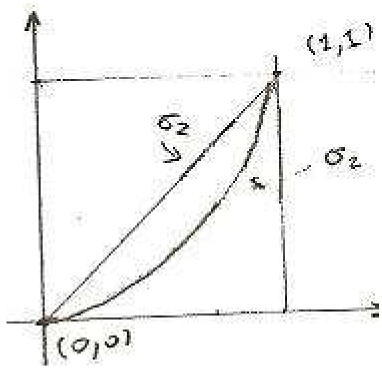
Λύση Έστω $v(x,y,z) = \dfrac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι, $F = \nabla v$, ($\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ και $\dfrac{\partial v}{\partial z} = -\dfrac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$). Έπεται από το προηγούμενο θεώρημα ότι το ζητούμενο έργο δίδεται από τον τύπο:

$$\mathrm{E} = \int_\sigma F \cdot ds = \int_\sigma \nabla v \cdot ds = v(\mathrm{B}) - v(\mathrm{A}) = \frac{1}{\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

[Υποτίθεται ότι: $\sigma:[0,1]\to R^3-\{(0,0,0)\}:\sigma(0)=\mathrm{A}$ και $\sigma(1)=\mathrm{B}$]

3) Έστω $F=F(x,y)=(y,-x),(x,y)\in R^2$ και $\sigma_1:[0,1]\to R^2:\sigma_1(t)=(t,t),t\in[0,1]$, $\sigma_2:[0,1]\to R^2$ με $\sigma_2(t)=(t,t^2),t\in[0,1]$. Παρατηρούμε ότι $\sigma_1(0)=\sigma_2(0)=(0,0)$ και $\sigma_1(1)=\sigma_2(1)=(1,1)$.

Αποδείξτε ότι $\int_{\sigma_1} F\cdot ds \neq \int_{\sigma_2} F\cdot ds$



Λύση Έστω $\sigma_1(t)=(x(t),y(t))=(t,t)$. Άρα $\sigma_1'(t)=(1,1),t\in[0,1]$.
$F(x(t),y(t))=(t,-t)$ και συνεπώς $F(x(t),y(t))\cdot(x'(t),y'(t))=(t,-t)\cdot(1,1)=t-t=0$ για κάθε $t\in[0,1]$.

Έπεται ότι $\int_{\sigma_1} F\cdot ds=\int_0^1 0dt=0$.

Για την καμπύλη $\sigma_2(t)=(x(t),y(t))$ παρατηρούμε ότι : $\sigma_2'(t)=(1,2t)=(x'(t),y'(t))$ και $F(\sigma_2(t))=F(x(t),y(t))=(y(t),-x(t))=(t^2,-t)$. Επομένως $F(\sigma_2(t))\cdot\sigma_2'(t)=(y(t),-x(t))\cdot(x'(t),y'(t))=(t^2,-t)\cdot(1,2t)$
$=t^2-2t^2=-t^2,t\in[0,1]$.

Άρα $\int_{\sigma_2} F\cdot ds=\int_0^1(-t^2)dt=-\int_0^1 t^2dt=-\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=-\frac{1}{3}$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι : $\int_{\sigma_1} F\cdot ds=0\neq-\frac{1}{3}=\int_{\sigma_2} F\cdot ds$ και ακόμη ότι το διανυσματικό πεδίο $F(x,y)=(y,-x)$ δεν μπορεί να είναι ίσο (σε μια ανοικτή περιοχή του τετραγώνου με κορυφές τα $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$) με το πεδίο κλίσεων κάποιας C^1 συνάρτησης.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $F(x,y)=(y,-x)$ είναι μια γραμμική συνάρτηση $F:R^2\to R^2$ και συνεπώς $C^\infty-$διαφορίσιμη, γεωμετρικά η F στρέφει το διάνυσμα (x,y) κατά $-\frac{\pi}{2}$ ακτίνια (αυτό φαίνεται καλύτερα αν παρατηρήσουμε ότι η F με μιγαδικό συμβολισμό είναι η $F(z)=-iz$ όπου $z=(x,y)=x+iy$). Παρόλα αυτά η F δεν είναι ίση με το πεδίο κλίσεων κάποιας C^1 συνάρτησης στο R^2. Το αποτέλεσμα αυτό καταδεικνύει μια σημαντική διαφορά με τον Λογισμό της μιας μεταβλητής, όπου με μόνη την υπόθεση της συνέχειας μιας συνάρτησης $F:\mathrm{I}\subseteq R\to R$, στο διάστημα $\mathrm{I}\subseteq R$, έπεται η ύπαρξη παράγουσας για την F, δηλαδή υπάρχει $G:\mathrm{I}\to R$ C^1 συνάρτηση με $G'=F$ στο I.

4)Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\sigma F\cdot ds$, όπου $F=\nabla\left(e^x\sin y-xy-2y\right)$

και $\sigma(t)=\left(t^3\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right),-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2}\right)\right),\quad t\in[0,1]$

<u>Λύση</u> Η συνάρτηση $f(x,y)=e^x\sin y-xy-2y$ είναι C^∞ στο R^2 και η καμπύλη σ, C^∞ −διαφορίσιμη στο $[0,1]$.

Από το προηγούμενο θεώρημα έπεται ότι:

$$\int_\sigma \nabla f(x,y)\cdot ds=f(\sigma(1))-f(\sigma(0))=f\left(1,\frac{\pi}{2}\right)-f(0,0)=$$

$$=\left(e^1\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-2\frac{\pi}{2}\right)-\left(e^0\sin 0-0\cdot 0-0\right)=e-3\frac{\pi}{2}.$$

Ασκήσεις

1)Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα πρώτου είδους.

(α) $\int_\sigma \frac{1}{3+y}ds$, όπου $\sigma(t)=\left(2t^{\frac{3}{2}},3t\right), t\in[0,1]$.

(β) $\int_\sigma (3x-2y)ds$, όπου $\sigma(t)=(\sin t,\cos t), t\in[0,\pi]$

(γ) $\int_\sigma \frac{y^2}{x^3}ds$, όπου $\sigma(t)=\left(2t,t^4\right), 0\le t\le 1$.

(δ) $\int_\sigma (x^2+y^2)ds$, όπου $\sigma(t)=\left(e^{-t}\cos t,e^{-t}\sin t\right), 0\le t\le\pi$.

2)Να υπολογισθούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα δευτέρου είδους:

(α) $\int_\sigma \left(x^2-y^2\right)dx+xdy$, όπου $\sigma(\theta)=(2\cos\theta,2\sin\theta), \theta\in[0,2\pi]$.

(β) $\int_C x^2ydx-xydy$, όπου C είναι η καμπύλη που ξεκινά από το $(0,0)$ και πηγαίνει στο $(1,1)$ μέσω της παραβολής $y=x^2$ και επιστρέφει στο $(0,0)$ επί της ευθείας $y=x$.

(γ) $\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, όπου C είναι το τετράγωνο $|x|+|y|=1$ το οποίο θεωρείται θετικά (αντιωρολογιακά) προσανατολισμένο.

(δ) Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_{\sigma_i} ydx, i=1,2$, όπου $\sigma_1(t)=(\cos t,\sin t), \sigma_2(t)=(\cos 2t,\sin 2t), t\in[0,2\pi]$. Τι παρατηρείτε; [Απάντηση. $\int_{\sigma_1} ydx=-\pi$ και $\int_{\sigma_2} ydx=-2\pi$]

3) Έστω $F=\left(x^2-y^2\right)i+2xyj$ διανυσματικό πεδίο δυνάμεων στο R^2. Να βρεθεί το ολικό έργο που παράγει αυτή η δύναμη όταν μετακινεί αντιωρολογιακά μια σημειακή μάζα στην περίμετρο του τετραγώνου με κορυφές $(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$.

4) Να βρεθεί το έργο που παράγει το διανυσματικό πεδίο δυνάμεων $F=\left(x^2+y^2\right)i+\left(x+y\right)j$ όταν μετακινεί αντιωρολογιακά ένα υλικό σημείο επί του κύκλου $x^2+y^2=1$ από το $\left(1,0\right)$ στο $\left(-1,0\right)$ και κατόπιν πίσω στο $\left(1,0\right)$ πάνω στον άξονα των x.

5) Έστω $\sigma:\left[a,b\right]\to R^3$ ομαλή καμπύλη (δηλαδή η σ είναι C^1 και $\sigma'\left(t\right)\neq 0$ για κάθε $t\in\left[a,b\right]$)

(α) Αν στο $\sigma\left(t\right)$ η F είναι κάθετη στο $\sigma'\left(t\right)$ για κάθε $t\in\left[a,b\right]$, τότε $\int_\sigma F\cdot ds=0$

(β) Αν στο $\sigma\left(t\right)$ η F είναι παράλληλη με το $\sigma'\left(t\right)$ για κάθε $t\in\left[a,b\right]$ δείξτε ότι $\int_\sigma F\cdot ds=\int_\sigma \left\|F\right\|ds$ (όταν λέμε παράλληλη με το $\sigma'\left(t\right)$ εννοούμε ότι $F\left(\sigma\left(t\right)\right)=\lambda\left(t\right)\sigma'\left(t\right)$, όπου $\lambda\left(t\right)>0$).)

(γ) Αν $x\in R^3$ τότε η εξίσωση $\sigma\left(t\right)=x$ έχει το πολύ πεπερασμένες λύσεις στο $\left[a,b\right]$.

(δ) Αν η σ είναι C^2 και $\sigma''\left(t\right)\neq 0,\forall t\in\left[a,b\right]$ τότε η εξίσωση η εξίσωση $\sigma'\left(t\right)=0$ έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων στο $\left[a,b\right]$.

6) Αν η καμπύλη $\sigma:\left[a,b\right]\to R^3$ είναι κατά τμήματα C^1 και $F:\left[\sigma\right]\to R^3$ συνεχής δείξτε ότι $\left|\int_\sigma F\cdot ds\right|\leq \mathrm{M}\cdot\ell$ όπου $\mathrm{M}=\sup\left\{\left\|F\left(\sigma\left(t\right)\right)\right\|,t\in\left[a,b\right]\right\}$ και ℓ το μήκος της σ.

7) Έστω σ και ψ δύο καμπύλες του R^2 με τα ίδια άκρα και $F:R^2\to R^2$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η ισότητα $\int_\sigma F\cdot ds=\int_\psi F\cdot ds$ είναι ισοδύναμη με την $\int_C F\cdot ds=0$, όπου C είναι η κλειστή καμπύλη που προκύπτει αν μετακινηθούμε πρώτα πάνω στην σ και μετά πάνω στην ψ στην αντίθετη κατεύθυνση.

8) Έστω $\nabla f\left(x,y,z\right)=\left(2xyze^{x^2},ze^{x^2},ye^{x^2}\right)$. Αν $f\left(0,0,0\right)=5$, βρείτε το $f\left(1,1,2\right)$.

9) Υπολογίστε το $\int_C 2xyzdx+x^2zdy+x^2ydz$, όπου C είναι μια προσανατολισμένη απλή καμπύλη που ενώνει το $\left(1,1,1\right)$ με το $\left(1,2,4\right)$.