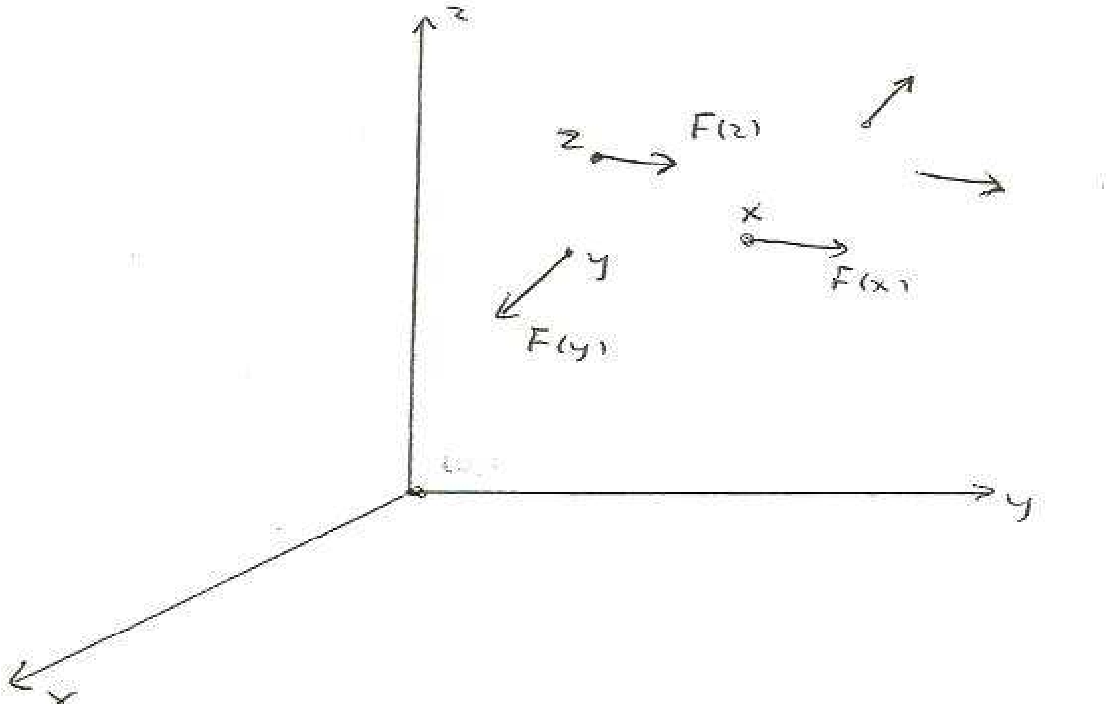
## Διανυσματικά πεδία

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ένα διανυσματικό πεδίο είναι μια συνάρτηση $F:U\subseteq R^n\to R^n$. Για εμάς φυσικά μια τέτοια συνάρτηση θα θεωρείται ότι είναι τουλάχιστον συνεχής και συνήθως $C^1$ και βέβαια το $U$ ανοικτό υποσύνολο του $R^n$.
Ένα διανυσματικό πεδίο $F$, μπορούμε να το φανταζόμαστε ότι αντιστοιχεί σε κάθε $x\in U$ το διάνυσμα ( βέλος ) $F(x)$ όπως στο σχήμα.

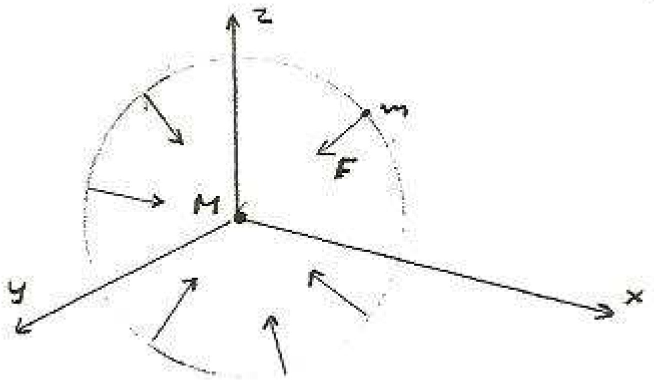



Τα διανυσματικά πεδία που θα μας απασχολήσουν θεωρούνται κυρίως στον $R^2$ και στον $R^3$ ( $F:U\subseteq R^2\to R^2$ ή $F:U\subseteq R^3\to R^3$ )
Παραδείγματα διανυσματικών πεδίων έχουμε ήδη εξετάσει στις προηγούμενες παραγράφους. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων όπως ορίστηκε στην παράγραφο Αλλαγής μεταβλητής στο πολλαπλό ολοκλήρωμα είναι ένα διανυσματικό πεδίο. Ειδικότερα οι, πολικός, κυλινδρικός και σφαιρικός μετασχηματισμός είναι διανυσματικά πεδία
Ένα πολύ ενδιαφέρον διανυσματικό πεδίο – το οποίο έχουμε ήδη εξετάσει στο παράδειγμα (2) μετα το Θεωρημα 22.5– είναι και το πεδίο δυνάμεων βαρύτητας ή βαρυτικό πεδίο, το οποίο παρουσιάζουμε εδώ με περισσότερη λεπτομέρεια.

Έστω Μ μια σημειακή μάζα τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων του $R^3$ και $m$ μια άλλη σημειακή μάζα στο σημείο $r=(x,y,z)$. Τότε η δύναμη έλξης που ασκεί η Μ στην $m$ δίνεται από τον νόμο του Νεύτωνα και είναι $F(x,y,z)=-\frac{Gm\mathrm{M}}{\|r\|^3}\cdot r=-\frac{r}{\|r\|}\cdot\frac{GmM}{\|r\|^2}$

( βέβαια και η $m$ ασκεί στην Μ δύναμη ίση κατά το μέτρο και με αντίθετη φορά) όπου $G$ η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας ή σταθερά της παγκόσμιας έλξης. Όπως έχουμε ήδη διαπιστωσει σ, το $F$ είναι ένα πεδίο κλίσεων, αφού $F=\nabla v$, όπου

$v = \frac{mMG}{\|r\|}$. Η δύναμη $F$ είναι μια κεντρική δύναμη, δηλαδή δρα κατά μήκος της ευθείας που συνδέει τα κέντρα των μαζών $m$ και $M$ και έχει πάντοτε φορά ( αφού η $M$ έχει τοποθετηθεί στην αρχή των αξόνων ) προς την αρχή των αξόνων, αυτό δηλώνεται με το αρνητικό πρόσημο στον παραπάνω τύπο.




Το παραπάνω μοντέλο μπορεί να εφαρμοσθεί, όταν οι διαστάσεις των δύο μαζών είναι μικρές σε σχέση με την μεταξύ τους απόσταση, όποτε θεωρούμε ότι οι δύο μάζες είναι συγκεντρωμένες σε υλικά σημεία. Αν τα $m$ και $M$ είναι μάζες σφαιρικών σωμάτων με πυκνότητες που μεταβάλλονται ομοιόμορφα κατά μήκος της ακτίνας, όπως περίπου συμβαίνει με τον ήλιο και τους πλανήτες, τότε μπορούμε να πούμε ότι $\|r\|$ είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων τους, ακόμη και όταν το $\|r\|$ είναι μικρό. Τέλος αν η μάζα $M$ που είναι τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων είναι μεγάλη σε σχέση με την $m$, όπως για παράδειγμα είναι η μάζα του ήλιου συγκρινόμενη με την μάζα οποιουδήποτε πλανήτη ή η μάζα της Γής συγκρινόμενη με την μάζα ενός τεχνητού δορυφόρου, έχουμε την δυνατότητα να αγνοήσουμε την κίνηση της $M$ σε σχέση με την $m$

**23.1 Ορισμός** Ένα διανυσματικό πεδίο $F : U \subseteq R^n \to R^n$, όπου $U$ ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $R^n$, λέγεται συντηρητικό αν $F = \nabla f$ για κάποια $C^1$ συνάρτηση $f : U \subseteq R^n \to R$, δηλαδή αν η $F$ είναι το πεδίο κλίσεων κάποιας $C^1$ βαθμωτής συνάρτησης $f$. Η $f$ ονομάζεται τότε και συνάρτηση δυναμικού της $F$. Είναι τότε σαφές ότι το ολοκλήρωμα $\int_\sigma F \cdot ds$ για κάποια καμπύλη $\sigma : [a,b] \to U$ εξαρτάται μόνο από τα άκρα της καμπύλης. Ο όρος συντηρητικό πεδίο προέρχεται από την φυσική και σχετίζεται με το νόμο της διατήρησης της ενέργειας.

**Παραδείγματα.** 1) Το βαρυτικό πεδίο είναι ένα συντηρητικό πεδίο όπως είδαμε λίγο πρίν

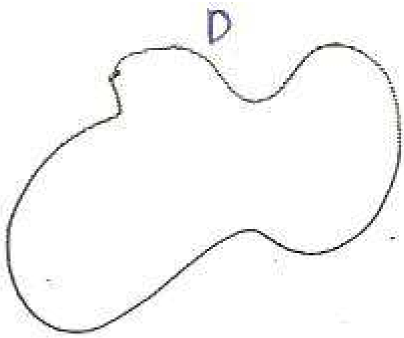
2) Το διανυσματικό πεδίο $F = 2xyi + x^2 j$ είναι συντηρητικό με συνάρτηση δυναμικού την $f(x,y) = x^2 y$.

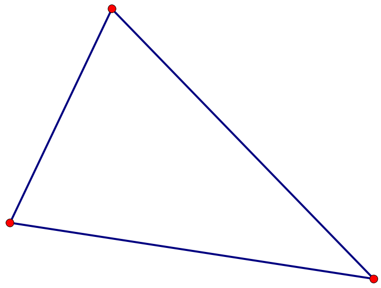
**Λύση** Παρατηρούμε ότι, $\nabla f = 2xyi + x^2 j = (2xy, x^2) = F(x,y)$, $(x,y) \in R^2$, άρα η $F$ είναι συντηρητικό πεδίο.

**Παρατήρηση**. Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό και συνεκτικό και $F : U \subseteq R^n \to R^n$ συντηρητικό πεδίο. Τότε υπάρχει ουσιαστικά μια συνάρτηση δυναμικού για την $F$, δηλαδή αν $g, f : U \to R$ $C^1$ συναρτήσεις ώστε $F = \nabla f = \nabla g$ τότε $f - g = c =$ σταθερά ( Άσκηση ).

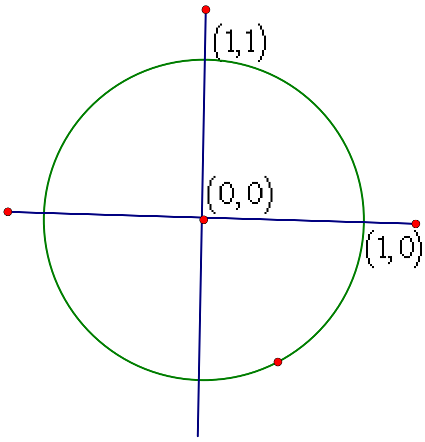
**23.2 Ορισμός** Έστω $D \subseteq R^2$ ανοικτό και συνεκτικό σύνολο, το $D$ λέγεται <u>απλά συνεκτικό</u> ή απλά συνεκτικός τόπος αν κάθε κλειστή απλή καμπύλη $c$ του $D$ εγκλείει <u>μόνο</u> σημεία του $D$
( δηλαδή υπάρχει $G \subseteq D$ ανοικτό με $\partial G = c$ ).

Έτσι το ανοικτό και συνεκτικό σύνολο $D \subseteq R^2$ είναι απλά συνεκτικό αν <u>δεν</u> έχει «τρύπες». Παραδείγματα απλά συνεκτικών ανοικτών συνόλων είναι τα <u>ανοικτά</u> και <u>κυρτά</u> υποσύνολα του $R^2$, όπως είναι το εσωτερικό ενός δίσκου ή μιας έλλειψης στο επίπεδο κτλ.



Απλά συνεκτικά σύνολα




Ο ανοικτός δίσκος $B(0,1)$ του επιπέδου με την εξαίρεση μιας ακτίνας του, π.χ. της ακτίνας $[0,1]$ είναι ένα ( ανοικτό ) απλά συνεκτικό σύνολο, που <u>δεν</u> είναι κυρτό. Ο ίδιος δίσκος με την εξαίρεση του κέντρου του είναι ένα ανοικτό συνεκτικό που δεν είναι απλά συνεκτικό

Σχετικά με την αναγνώριση των συντηρητικών πεδίων στον $R^2$ ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε ( πλήρως ) αργότερα ως συνέπεια του θεωρήματος του Green.

**23.3 Θεώρημα** Έστω $F : D \subseteq R^2 \to R^2$ $C^1$ διανυσματικό πεδίο, όπου $D$ <u>απλά συνεκτικό</u> σύνολο και $F = (u, v)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) Το $F$ είναι συντηρητικό

(ιι) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$

**Απόδειξη** της κατεύθυνσης (ι) $\Rightarrow$ (ιι)

Έστω $F = (u, v)$ $C^1$ διανυσματικό πεδίο. Επειδή το $F$ υποτίθεται συντηρητικό υπάρχει συνάρτηση ( τουλάχιστον ) της κλάσης $C^1$, $f : D \to R$ ώστε $F = \nabla f = \left( \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \right)$. Έπεται αμέσως ότι η $f$ είναι ( τουλάχιστον ) της κλάσης $C^2$

αφού το $F$ είναι $C^1$ και άρα οι μερικές παράγωγοι $u=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ και $v=\dfrac{\partial f}{\partial y}$ της $f$ θα έχουν και αυτές συνεχείς μερικές παραγώγους. Παρατηρούμε ότι $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ και $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

Επειδή η $f$ είναι $C^2$ συνάρτηση στο $D$ έπεται ότι οι μεικτές παράγωγοι της $f$ είναι ίσες. Συνεπώς $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ ή $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

**Σημείωση.** Η κατεύθυνση (ι)$\Rightarrow$(ιι) δεν χρειάζεται, όπως φαίνεται και από την απόδειξή της, την υπόθεση της απλής συνεκτικότητας του $D$. Η υπόθεση αυτή θα χρειασθεί για την απόδειξη της αντίστροφης κατεύθυνσης (ιι)$\Rightarrow$(ι), η απόδειξη αυτή θα γίνει αργότερα με την βοήθεια του θεωρήματος του Green.

**Εφαρμογές** 1) Θεωρούμε το παράδειγμα 3 της σελίδας 229. Δηλαδή $F(x,y)=(y,-x)$. Το διανυσματικό πεδίο $F$ δεν είναι συντηρητικό εφόσον $u(x,y)=y$, $v(x,y)=-x$ και $\dfrac{\partial u}{\partial y}=1\neq -1=\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Βέβαια πριν είχαμε καταλήξει στο ίδιο αποτέλεσμα με ένα απευθείας υπολογισμό.

2) Εξακριβώστε αν το διανυσματικό πεδίο $F(x,y)=\left(ye^{xy},xe^{xy}+x\right)$ είναι συντηρητικό στο $R^2$.

**Λύση** Έχουμε ότι $u(x,y)=ye^{xy}$ και $v(x,y)=xe^{xy}+x$. Άρα $\dfrac{\partial u}{\partial y}=xye^{xy}+e^{xy}$ και $\dfrac{\partial v}{\partial x}=xye^{xy}+e^{xy}+1$. Έπεται ότι $\dfrac{\partial u}{\partial y}\neq\dfrac{\partial v}{\partial x}$ και άρα το πεδίο δεν είναι συντηρητικό.

3) Εξετάστε αν τα διανυσματικά πεδία $F(x,y)=(x,-y)$ και $G(x,y)=\left(2xy,x^2-y^2\right)$ είναι συντηρητικά και αν είναι να βρεθεί σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση δυναμικού.

**Λύση** Για το πρώτο παρατηρούμε ότι $u(x,y)=x$ και $v(x,y)=-y$, επομένως $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0=\dfrac{\partial v}{\partial x}$ και το πεδίο είναι συντηρητικό. Η $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2}$ είναι μια συνάρτηση δυναμικού για την $F(x,y)=(x,-y)$, αφού $\nabla f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=(x,-y)=F$

Για το διανυσματικό πεδίο $G(x,y)=\left(2xy,x^2-y^2\right)$ έχουμε ότι αν θέσουμε $u(x,y)=2xy$ και $v(x,y)=x^2-y^2$ τότε $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2x=\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Έπεται από τον χαρακτηρισμό των συντηρητικών πεδίων ότι $G$ συντηρητικό πεδίο. Εύκολα επίσης διαπιστώνεται ότι η $g(x,y)=yx^2-\dfrac{y^3}{3}$ είναι μια συνάρτηση δυναμικού για την $G$ αφού $\nabla g=\left(\dfrac{\partial g}{\partial x},\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)=\left(2xy,x^2-y^2\right)=G$.

4) Έστω $U \subseteq R^2$ ανοικτό και $f: U \to R^2$ $C^1$ συνάρτηση ώστε $f = (u,v)$. Η $f$ λέγεται <u>ολόμορφη</u> αν ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy και Riemann: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Παρατηρούμε σε σχέση με την συνάρτηση $G(x,y) = \left(2xy, x^2 - y^2\right)$ του προηγουμένου παραδείγματος ότι αν θέσομε $F(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right)$, τότε η $F$ είναι ολόμορφη στο $R^2$.

Το παράδειγμα αυτό γενικεύεται με τον ακόλουθο τρόπο. Θεωρούμε μία ολόμορφη $f: D \subseteq R^2 \to R^2$, όπου $D$ ανοικτό απλά συνεκτικό υποσύνολο του $R^2$ ( π.χ. ανοικτό και κυρτό)

Έστω $f = (u,v)$, τότε η συνάρτηση $g: D \to R^2$ ώστε $g = (v,u)$ ( δηλαδή $g(x,y) = \left(v(x,y), u(x,y)\right), (x,y) \in D$ ) είναι ένα συντηρητικό πεδίο. Πράγματι η $f$ ως ολόμορφη ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy και Riemann στο $D$: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Επομένως $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ και έτσι το διανυσματικό πεδίο $g = (v,u)$ είναι συντηρητικό. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και το διανυσματικό πεδίο $\tilde{g} = (u,-v)$ είναι συντηρητικό.

Σημειώνουμε ότι η $g$ προκύπτει ως η σύνθεση του γραμμικού μετασχηματισμού $\mathrm{T}(x,y) = (y,x)$ με την ολόμορφη $f$, δηλαδή $g = \mathrm{T} o f$.

Η κλάση των ολομόρφων συναρτήσεων μελετάται στην <u>Μιγαδική Ανάλυση</u>.

5) Το πεδίο δυνάμεων βαρύτητας ( ή βαρυτικό πεδίο ) $F: R^3 - \left\{(0,0,0)\right\} \to R^3$ ώστε $F(x,y,z) = -\dfrac{m\mathrm{M}G}{\|r\|^3} r$, όπου $m$ και Μ μάζες, $G$ η παγκόσμια βαρυτική σταθερά και $r = (x,y,z)$ είναι ένα συντηρητικό πεδίο, όπως ηδη διαπιστώσαμε, με συνάρτηση δυναμικού $v(x,y,z) = \dfrac{m\mathrm{M}G}{\|r\|}$.

6) Έστω $\mathrm{T}: R^2 \to R^2$ γραμμικός μετασχηματισμός, $\mathrm{T}(x,y) = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(ax + \beta y, \gamma x + \delta y\right)$, $a, \beta, \gamma, \delta \in R$. Ο Τ είναι ένα συντηρητικό πεδίο αν και μόνο αν $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$, όπου $u(x,y) = ax + \beta y$ και $v(x,y) = \gamma x + \delta y$, δηλαδή αν $\beta = \gamma$. Έτσι ο πίνακας Τ γίνεται $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$.

7) Ο πολικός μετασχηματισμός $\mathrm{T}: R^2 \to R^2 : \mathrm{T}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ δεν είναι συντηρητικό πεδίο καθώς αν $u = r\cos\theta$ και $v = r\sin\theta$ τότε $\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r\sin\theta \neq \sin\theta = \dfrac{\partial v}{\partial r}$.

**Παρατήρηση**. Αν $F: D \subseteq R^2 \to R^2$ είναι συντηρητικό πεδίο, ο προσδιορισμός μιας συνάρτησης δυναμικού για το πεδίο $F$ γίνεται λύνοντας την διαφορική εξίσωση ( που τότε ξέρουμε ότι έχει λύση )

$$\nabla f = F \Leftrightarrow u(x,y) = f_x(x,y) \text{ και } v(x,y) = f_y(x,y).$$

Εννοείται ότι, $F = (u,v)$ και $D$ ανοικτό και συνεκτικό.

**Παράδειγμα**: 1) Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $F = \left(e^x \sin y - y, e^x \cos y - x - 2\right)$ είναι συντηρητικό και βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού $f$ για την $F$ .

**Λύση** Οι συνιστώσες συναρτήσεις $u(x,y) = e^x \sin y - y$ και $v(x,y) = e^x \cos y - x - 2$ του $F$ είναι $C^1$ στο $R^2$ και ισχύει ότι

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y - 1 \text{ και } \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y - 1.$$

Επειδή $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$ έπεται ότι το $F$ είναι συντηρητικό στο $R^2$.

Μια συνάρτηση δυναμικού $f: R^2 \to R$ για την $F$ πρέπει να ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $\nabla f = F \Leftrightarrow u = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ και $v = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Έπεται ότι ( σταθεροποιώντας την μεταβλητή $y$ )

$$f(x,y) = \int u(x,y)\,dx = \int \left(e^x \sin y - y\right) dx = e^x \sin y - xy + \kappa(y) \quad (1)$$

Επειδή η $f$ πρέπει να ικανοποιεί την $\dfrac{\partial f}{\partial y} = v$, θα έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[e^x \sin y - xy + \kappa(y)\right] = e^x \cos y - x + \frac{d\kappa}{dy} = v$$

Συνεπώς $e^x \cos y - x + \dfrac{d\kappa}{dy} = e^x \cos y - x - 2$.

Επιλύοντας την τελευταία εξίσωση ως προς $\dfrac{d\kappa}{dy}$ λαμβάνουμε

$$\frac{d\kappa}{dy} = -2 \Rightarrow \kappa(y) = \int -2\,dy \Rightarrow \kappa(y) = -2y + c \quad (2).$$

Έπεται από τις (1) και (2) ότι $f(x,y) = e^x \sin y - xy - 2y + c$ όπου $c$ πραγματική σταθερά. Κάθε τέτοια συνάρτηση είναι μια ( βαθμωτή ) συνάρτηση δυναμικού για την $F$ . ( Δες και την παρατήρηση μετα τον Ορισμο 23.1 .)