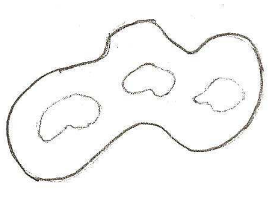
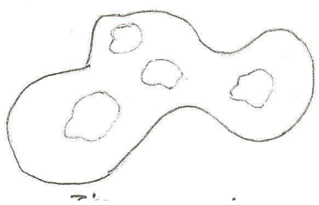
Το θεώρημα του Green

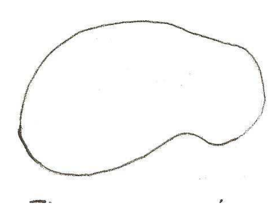
Υπενθυμίζουμε ότι μια απλή κλειστή καμπύλη $\sigma:[a,b]\to R^2$ είναι μια κλειστή καμπύλη ($\sigma(a)=\sigma(b)$) ώστε ο περιορισμός $\sigma\big|[a,b)$ να είναι $1-1$ απεικόνιση.
Μια απλή κλειστή καμπύλη του επιπέδου ονομάζεται και καμπύλη Jordan.
Είναι ένα βαθύ τοπολογικό θεώρημα που ανήκει στον Jordan ότι:
Κάθε απλή κλειστή καμπύλη σ του επιπέδου αποσυνδέει το επίπεδο, δηλαδή το σύνολο $R^2-[\sigma]$ είναι ένωση δύο ξένων ανοικτών και συνεκτικών συνόλων A και B ώστε το ένα είναι φραγμένο και το άλλο μη φραγμένο. Το φραγμένο σύνολο ονομάζεται και εσωτερικό και το μη φραγμένο εξωτερικό της καμπύλης.
Ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του R^2 ονομάζεται και χωρίο Jordan αν είναι το εσωτερικό μιας καμπύλης Jordan του επιπέδου. Είναι βέβαια σαφές ότι ένα χωρίο Jordan είναι απλά συνεκτικό (δηλαδή δεν έχει τρύπες).
Υπενθυμίζουμε ότι όλες οι καμπύλες που θεωρούμε (ειδικότερα σε σχέση με επικαμπύλια ολοκληρώματα) είναι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμες.

Ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο $D\subseteq R^2$ θα λέμε ότι έχει κατά τμήματα ομαλό σύνορο, αν το σύνορο του ∂D αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος απλές κλειστές καμπύλες οι οποίες είναι ξένες ανά δύο. Στην περίπτωση που το D είναι επί πλέον συνεκτικό το σύνορο του D αποτελείται από μια εξωτερική καμπύλη c_0 και κάποιες εσωτερικές καμπύλες $c_1,c_2,...,c_N$ ($\partial D=c_0\bigcup c_1\bigcup...\bigcup c_N$). Όταν ολοκληρώνουμε μια συνάρτηση πάνω στο σύνορο ∂D του D οι εσωτερικές καμπύλες $c_1,c_2,...,c_N$ προσανατολίζονται αρνητικά και η εξωτερική καμπύλη c_0 προσανατολίζεται θετικά (αντιωρολογιακά), δηλαδή ούτως ώστε να αφήνουν το σύνολο D στα αριστερά των.
Η σύμβαση αυτή δηλώνεται συμβολικά γράφοντας $\partial D=c_0-c_1-c_2-...-c_N$ υπονοώντας με τον τρόπο αυτό τον τρόπο που γίνεται η ολοκλήρωση επί του ∂D.

Παρατήρηση Με διαφορετική ορολογία ένα φραγμένο ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του επιπέδου με κατά τμήματα ομαλό σύνορο είναι ένα ανοικτό και συνεκτικό πολλαπλά συνεκτικό υποσύνολο του R^2 του οποίου το σύνορο αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο καμπύλων Jordan. Δηλαδή ένα ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο του R^2 που φράσσεται από ένα πεπερασμένο σύνολο καμπύλων Jordan.
Διαισθητικά ένας τόπος του R^2 (ανοικτό και συνεκτικό σύνολο) είναι πολλαπλά συνεκτικός αν έχει ένα πεπερασμένο αριθμό από τρύπες. Έτσι διακρίνουμε τους πολλαπλά συνεκτικούς τόπους σε τόπους συνεκτικότητας n, $n\geq 1$, αν έχουν $n-1$ αριθμό από τρύπες



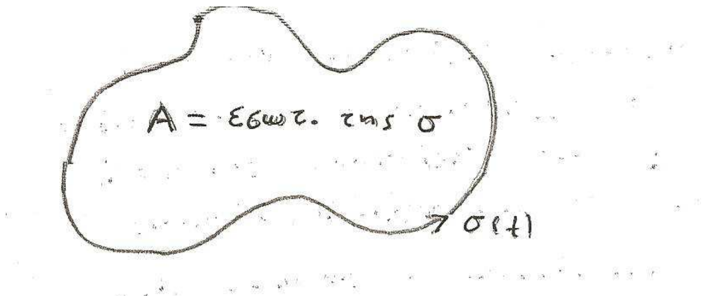




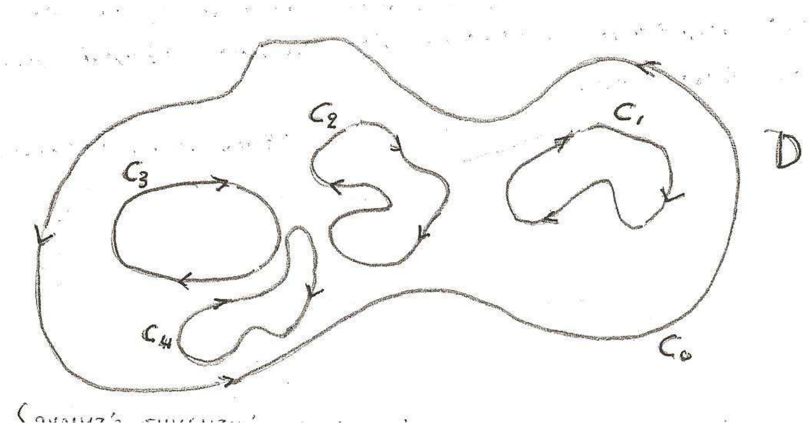
Τόπος συνεκτικότητας 4 Τόπος συνεκτικότητας 5 Τόπος συνεκτικότητας 1 δηλ. απλά συνεκτικός

Παραδείγματα

$\sigma(a)=\sigma(b)$ B= εξωτερικό της σ



$\sigma:[a,b]\to R^2$ καμπύλη Jordan



Ένα ανοικτό συνεκτικό και φραγμένο σύνολο με κατά τμήματα ομαλό σύνορο

Με τις παραπάνω συμβάσεις το θεώρημα του Green διατυπώνεται ως ακολούθως.

25.1 Θεώρημα (του Green). Έστω $D\subseteq R^2$ ένα ανοικτό συνεκτικό και φραγμένο σύνολο του οποίου το σύνορο ∂D είναι <u>κατά τμήματα ομαλό</u>.
Αν p και q είναι πραγματικές συναρτήσεις οι οποίες είναι ορισμένες και C^1 σε μια περιοχή του $\overline{D}$, τότε ισχύει ο τύπος:

$$\int_{\partial D}(pdx+qdy)=\int_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy\,.$$

Όπου, αν $\partial D=c_0-c_1-...-c_N$, τότε το αριστερό μέλος της παραπάνω ισότητας ισούται με $\int_{\partial D}(pdx+qdy)=\int_{c_0}(pdx+qdy)-\sum_{k=1}^{N}\int_{c_k}(pdx+qdy)$.

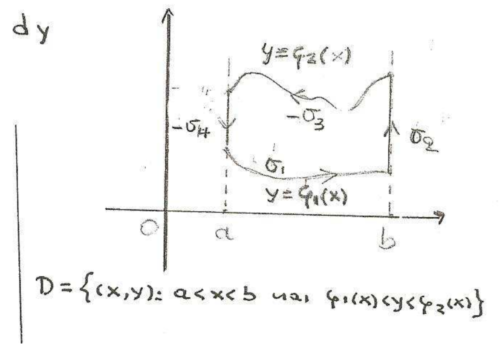
Δεν θα δώσουμε πλήρη απόδειξη του θεωρήματος του Green. Θα αποδείξουμε όμως τον <u>αναλυτικό πυρήνα</u> αυτού του σημαντικού αποτελέσματος ο οποίος εντοπίζεται στην περίπτωση που το D είναι ένα ανοικτό <u>στοιχειώδες χωρίο</u> . Ένα ανοικτό στοιχειώδες χωρίο είναι βέβαια απλά συνεκτικός τόπος που φράσσεται από μια καμπύλη Jordan.

25.2 Λήμμα Έστω $D \subseteq R^2$ ένα ανοικτό χωρίο τύπου 1 και ∂D το σύνορό του. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση p είναι C^1 σε μια περιοχή του $\overline{D}$. Τότε

$$\int_{\partial D} p dx = -\int_D \frac{\partial p}{\partial y} dxdy$$

(όπου $\int_{\partial D} p dx = \int_{\partial D} pdx + qdy$ με $q = 0$).

Απόδειξη:



Υποθέτουμε ότι το $\overline{D}$ περιγράφεται από τις σχέσεις $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, όπου $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to R$ είναι C^1 συναρτήσεις με $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ για κάθε $x \in (a,b)$.

Το σύνορο ∂D του D είναι μια θετικά προσανατολισμένη καμπύλη η οποία σύμφωνα με το σχήμα γράφεται ως $\partial D = \sigma_1 + \sigma_2 + (-\sigma_3) + (-\sigma_4)$ (το πρόσημο $-$ δηλώνει την αντίθετη καμπύλη) , όπου $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ είναι οι καμπύλες: $\sigma_1(t) = (t, \varphi_1(t))$, $t \in [a,b]$, $\sigma_2(t) = (b,t)$, $t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)]$, $\sigma_3(t) = (t, \varphi_2(t))$, $t \in [a,b]$, $\sigma_4(t) = (a,t)$, $t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)]$.

Από το θεώρημα του Fubini μπορούμε να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα ως ένα διαδοχικό ολοκλήρωμα και μετά να χρησιμοποιήσουμε το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού:

$$(1)\quad \int_D \frac{\partial p}{\partial y}(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial p}{\partial y}(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left[p(x, \varphi_2(x)) - p(x, \varphi_1(x)) \right] dx$$

Από την άλλη μεριά θα έχουμε: $\int_{\partial D} pdx = \int_{\sigma_1} pdx + \int_{\sigma_2} pdx - \int_{\sigma_3} pdx - \int_{\sigma_4} pdx$

Αφού το x είναι σταθερό πάνω στα ίχνη των καμπύλων σ_2 και σ_4 θα έχουμε $\int_{\sigma_2} pdx = \int_{\sigma_4} pdx = 0$.

Πράγματι, $\int_{\sigma_2} pdx = \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} (p(b,t), 0) \cdot (0,1) dt = 0$, ομοίως $\int_{\sigma_4} pdx = 0$ (Η φυσική ερμηνεία του μηδενισμού αυτών των ολοκληρωμάτων είναι ότι αν π.χ. η $(p(x,y), 0)$ θεωρηθεί ως δύναμη που μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά μήκος του κατακόρυφου ευθύγραμμου τμήματος $[(b, \varphi_1(b)), (b, \varphi_2(b))]$ τότε δεν παράγει έργο αφού είναι κάθετη σε αυτό.)

Επίσης θα έχουμε: $\int_{\sigma_1} pdx = \int_a^b (p(t, \varphi_1(t)), 0) \cdot (1, \varphi_1'(t)) dt = \int_a^b p(t, \varphi_1(t)) dt =$

$$\int_a^b p\left(x,\varphi_1(x)\right)dx$$

$$\int_{\sigma_3} pdx = \int_a^b \left(p\left(t,\varphi_2(t)\right),0\right)\cdot\left(1,\varphi_2'(t)\right)dt = \int_a^b p\left(t,\varphi_2(t)\right)dt = \int_a^b p\left(x,\varphi_2(x)\right)dx .$$

Επομένως, (2)

$$\int_{\partial D} pdx = \int_a^b p\left(x,\varphi_1(x)\right)dx - \int_a^b p\left(x,\varphi_2(x)\right)dx = \int_a^b \left[p\left(x,\varphi_1(x)\right) - p\left(x,\varphi_2(x)\right)\right]dx .$$

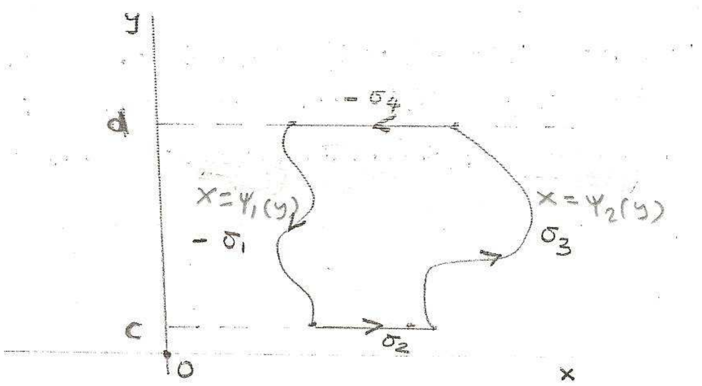
Έπεται από τις (1) και (2) ότι $\int_{\partial D} pdx = -\int_D \frac{\partial p}{\partial y}dxdy$.

Σημειώνουμε ότι μπορεί να αποδειχθεί και το ανάλογο του παραπάνω Λήμματος με τους ρόλους των x και y αντεστραμμένους.

25.3 Λήμμα Έστω D ένα ανοικτό χωρίο τύπου 2 με σύνορο το ∂D. Αν η συνάρτηση q είναι C^1 σε μια περιοχή του $\overline{D}$, τότε $\int_{\partial D} qdy = \int_D \frac{\partial q}{\partial x}dxdy$.

Η απόδειξη αυτού του Λήμματος είναι όμοια με την προηγούμενη και έτσι παραλείπεται. Σημειώνουμε μόνο ότι το αρνητικό πρόσημο απουσιάζει στην περίπτωση αυτή, εφόσον η αντιστροφή των ρόλων των x και y σημαίνει και αλλαγή του προσανατολισμού του επιπέδου.

Ένα παράδειγμα χωρίου τύπου 2 και η διάσπαση του θετικά προσανατολισμένου συνόρου του σε προσανατολισμένες επί μέρους καμπύλες.



$$D=\left\{(x,y): c<y<d \text{ και } \psi_1(y)<x<\psi_2(y)\right\}$$

$$\sigma_1(t)=\left(\psi_1(t),t\right),\ t\in[c,d],\ \sigma_2(t)=(t,c),\ t\in\left[\psi_1(c),\psi_2(c)\right]$$

$$\sigma_3(t)=\left(\psi_2(t),t\right),\ t\in[c,d],\ \sigma_4(t)=(t,d),\ t\in\left[\psi_1(d),\psi_2(d)\right]$$

$$\partial D=-\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-\sigma_4$$

Από τα προηγούμενα 2 λήμματα λαμβάνομε αμέσως την ακόλουθη ειδική αλλά σημαντική περίπτωση του θεωρήματος του Green.

25.4 Πρόταση (Green) Έστω D ένα ανοικτό χωρίο <u>τύπου 3</u> και ∂D το σύνορό του. Υποθέτουμε ότι οι πραγματικές συναρτήσεις p και q είναι C^1 σε μια περιοχή του $\overline{D}$. Τότε $\int\limits_{\partial D} pdx + qdy = \int\limits_{D} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dxdy$.

Παρατηρήσεις 1) Ο παραπάνω τύπος αποδεικνύεται με λίγο περισσότερη δουλειά και για στοιχειώδη χωρία που είναι είτε του τύπου 1 ή του τύπου 2. Περαιτέρω αποδεικνύεται – με μη τετριμμένα γεωμετρικά επιχειρήματα – ότι ένα ανοικτό συνεκτικό και φραγμένο σύνολο με κατά τμήματα ομαλό σύνορο (που είναι για εμάς η γενική περίπτωση του θεωρήματος του Green) διασπάται σε ένα πεπερασμένο πλήθος από στοιχειώδη χωρία $D_1, ..., D_m$, που το καθένα είναι είτε τύπου 1 είτε τύπου2 κατά τέτοιο τρόπο ώστε,

$$\Big(\int\limits_{D} = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{D_k} \quad \text{και} \quad \int\limits_{\partial D} = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\partial D_k} \Big)$$

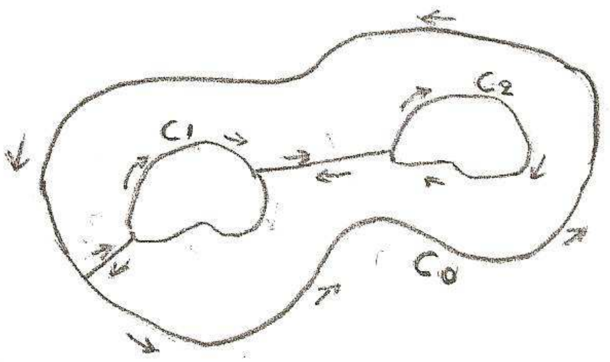
Το θεώρημα του Green εφαρμόζεται στο καθένα από τα D_k, $1 \le k \le m$ και ο τύπος του Green έπεται στην γενική περίπτωση προσθέτοντας τα αποτελέσματα. Σύμφωνα με την παρατήρηση 3 παρακάτω η διάσπαση του D αρκεί να γίνει στην περίπτωση που το D είναι χωρίο Jordan.

Οι παραπάνω δύο εξισώσεις αποδεικνύονται εύκολα (στην περίπτωση της διάσπασης του D σε στοιχειώδη χωρία $D_1, ..., D_m$).
Αρκεί να παρατηρήσουμε αν τα D_k και D_λ με $1 \le k < \lambda \le m$ έχουν ένα κοινό τμήμα στο σύνορό τους (τα εσωτερικά τους είναι βέβαια ξένα) τότε το τμήμα αυτό εμφανίζεται με διαφορετικό προσανατολισμό και απλοποιείται στο άθροισμα $\sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{\partial D_k}$ (πρβλ και την παρατήρηση (3)).

2) Το θεώρημα του Green είναι πολύ σημαντικό εφόσον <u>συνδέει</u> ένα <u>επικαμπύλιο</u> ολοκλήρωμα (β΄ είδους) πάνω στο σύνορο ενός χωρίου του επιπέδου με ένα <u>διπλό ολοκλήρωμα</u> στο εσωτερικό του χωρίου. Σε πολλές περιπτώσεις είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα απ' ότι το διπλό ολοκλήρωμα.
Το θεώρημα του Green θεωρείται και αυτό όπως και το θεώρημα 22.5 της σελίδας 227 ένα <u>ανάλογο</u> του <u>θεμελιώδους θεωρήματος</u> του Απειροστικού Λογισμού. Πράγματι αν $\mathrm{I} \subseteq R$ διάστημα, $a, b \in R$ με $a < b$ και $F : \mathrm{I} \to R$ C^1 συνάρτηση τότε όπως γνωρίζουμε $\int\limits_{a}^{b} F'(t)dt = F(b) - F(a)$.
Εδώ το σύνορο του $D = [a, b]$ είναι το δισύνολο $\{a, b\}$.
Θα πρέπει να τονίσουμε ότι αν και αποδείξαμε το θεώρημα του Green στην ειδική περίπτωση ενός στοιχειώδους χωρίου (τύπου 3), τα χωρία τα οποία εμφανίζονται στην πράξη είναι στις περισσότερες περιπτώσεις εύκολο να χωρισθούν σε στοιχειώδη χωρία ούτως ώστε να εφαρμόζεται η παρατήρηση (1).

3) Ιδιαίτερα το θεώρημα του Green ισχύει για ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο $D \subseteq R^2$ που φράσσεται από μια καμπύλη Jordan c_0, δηλαδή D είναι <u>χωρίο Jordan</u> και άρα απλά συνεκτικός τόπος.

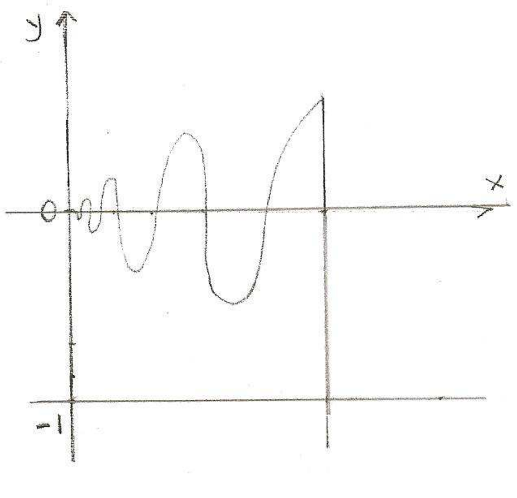
Αξίζει να σημειωθεί ότι η γενικότερη περίπτωση που το D είναι πολλαπλά συνεκτικός τόπος (που φράσσεται από πεπερασμένο πλήθος καμπύλων Jordan) ανάγεται στην περίπτωση του απλά συνεκτικού τόπου (που φράσσεται από μια καμπύλη Jordan).
Έτσι αν ο D είναι τόπος συνεκτικότητας n (με $n \geq 1$) τότε μπορούμε με $n-1$ «κοψίματα» (crosscuts) να το μετατρέψουμε σε απλά συνεκτικό τόπο. Τα κοψίματα αυτά μπορούν να επιλεγούν να είναι C^1 απλές καμπύλες . Το σχήμα εξηγεί γεωμετρικά πως μπορεί να γίνει αυτό.



Ένας τόπος συνεκτικότητας 3

Επειδή το πρόσημο του επικαμπυλίου ολοκληρώματος δευτέρου είδους αλλάζει όταν η κατεύθυνση της ολοκλήρωσης αλλάζει, έπεται ότι τα επικαμπύλια ολοκληρώματα πάνω στις καμπύλες που «κόβουν» το D αλληλοαναιρούνται. Έτσι τα μόνα ολοκληρώματα που «επιβιώνουν» είναι αυτά πάνω στο σύνορο του D, που στο σχήμα μας είναι το $\partial D = c_0 - c_1 - c_2$.
Είναι σαφές ότι αν εξαιρέσουμε από το D τα ίχνη των καμπύλων γ, δ, που «κόβουν» το D, τότε το $D - [\gamma] \cup [\delta]$ είναι απλά συνεκτικός τόπος .(Με n κοψίματα αναγόμαστε στην περίπτωση όπου το D χωρίζεται σε δυο απλά συνεκτικούς τόπους που φράσσονται από καμπύλες Jordan.) Σημειώνουμε ότι οι παρατηρήσεις αυτές μπορεί να οδηγήσουν σε μια απόδειξη του θεωρήματος του Green (θεώρημα 25.1), βασισμένη στην πρόταση 25.4, προσεγγίζοντας τον απλά συνεκτικό τόπο D(που φράσσεται από μια καμπύλη Jordan) με απλά συνεκτικούς τόπους που φράσσονται από απλές κλειστές πολυγωνικές γραμμές (πρβλ την άσκηση 11)

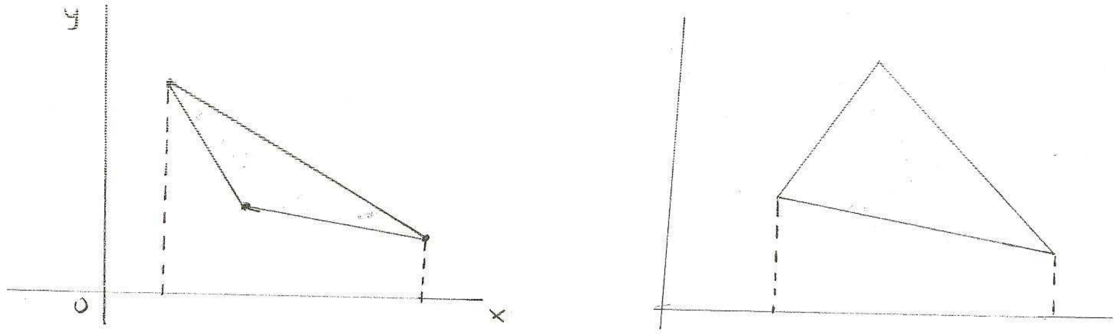
4) Ένα φραγμένο ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο του R^2 με κατά τμήματα ομαλό σύνορο δεν διασπάται αναγκαία σε ένα πεπερασμένο πλήθος από στοιχειώδη χωρία τύπου 3.
Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το ακόλουθο.



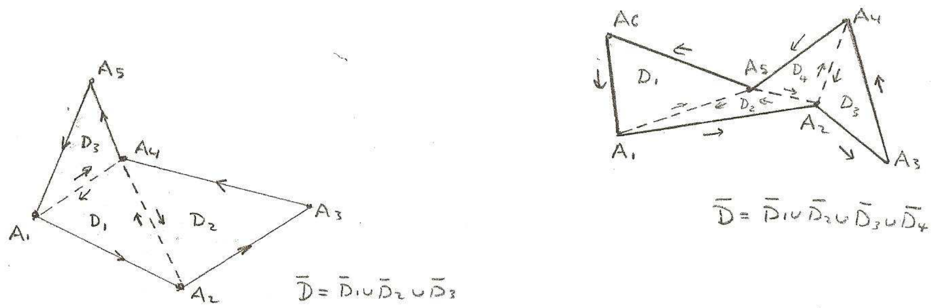
$\overline{D} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ και } -1 \leq y \leq \varphi(x)\}$
, όπου $\varphi(x) = x^3 \cdot \sin\frac{1}{x}, x \neq 0$, $\varphi(0) = 0$.
Η φ είναι βέβαια συνεχώς διαφορίσιμη στο R.
Το D είναι τύπου 1, αλλά δεν μπορεί να διαμερισθεί σε ένα πεπερασμένο πλήθος χωρίων τύπου 2 (συνεπώς ούτε και

τύπου 3). Η παρατήρηση αυτή αφήνεται ως άσκηση.

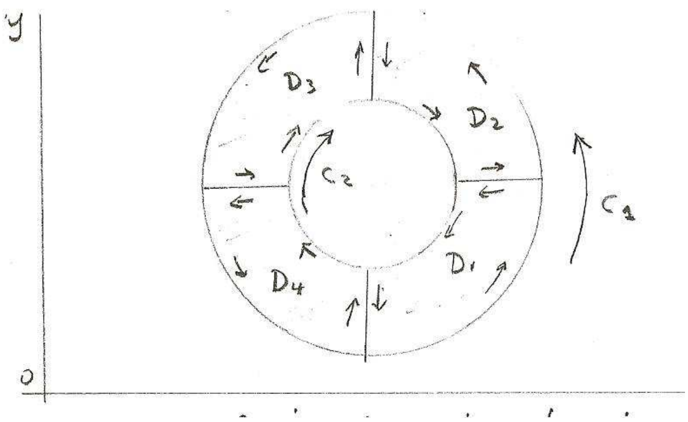
Παραδείγματα φραγμένων συνόλων με κατά τμήματα ομαλό σύνορο



1)Το εσωτερικό ενός <u>τριγώνου</u> στο xy επίπεδο είναι ένα στοιχειώδες σύνολο <u>τύπου 3.</u>



2)Ένα <u>απλό</u> πολύγωνο του επιπέδου χωρίζεται σε τρίγωνα τα οποία είναι στοιχειώδη σύνολα <u>τύπου 3</u>. Οι προσανατολισμοί είναι σημειωμένοι στα σχήματα. (Πρβλ την άσκηση 11)



Το καθένα από τα χωρία D_1, D_2, D_3, D_4 που χωρίζεται ο δακτύλιος είναι τύπου 3.

3)Το χωρίο D είναι εδώ ένας (ανοικτός) δακτύλιος το σύνορο του οποίου αποτελείται από τους κύκλους C_1 και C_2, $\partial D = C_1 \cup C_2$. Ο χωρισμός του D σε στοιχειώδη χωρία γίνεται με δύο κάθετες ευθείες που διέρχονται από το κέντρο. Το θεώρημα Green εφαρμόζεται στο καθένα από τα D_1, D_2, D_3, D_4 και προσθέτουμε τα αποτελέσματα.

25.5 Πρόταση Έστω c μια απλή κλειστή καμπύλη του επιπέδου με εσωτερικό το

(απλά συνεκτικό) σύνολο D. Τότε το εμβαδόν του D (που έχει σύνορο την c) δίδεται από τον τύπο

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx$$

(δηλαδή $\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_{\partial D} F \cdot ds$, όπου $F(x,y) = (-y,x), \quad (x,y) \in R^2$).

Απόδειξη Θέτομε $F(x,y) = (-y,x) = \big(p(x,y), q(x,y)\big)$ δηλαδή θέτομε $p(x,y) = -y$ και $q(x,y) = x$. (Το F δεν είναι συντηρητικό πεδίο αφού $\frac{\partial p}{\partial y} = -1$ και $\frac{\partial q}{\partial x} = 1$)

Το θεώρημα του Green εφαρμόζεται γιατί το D είναι ένα φραγμένο ανοικτό απλά συνεκτικό σύνολο με σύνορο το οποίο υποτίθεται ότι είναι μια κατά τμήματα C^1 καμπύλη.

Έτσι έχουμε, $\frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_D \left[\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right] dxdy = \frac{1}{2}\int_D (1+1) dxdy = \int_D dxdy = \mathrm{A}$.

Παρατήρηση. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\mathrm{A} = \frac{1}{2i}\int_\gamma \bar{z}dz$, όπου με $\int_\gamma f(z)dz$ συμβολίζουμε το <u>μιγαδικό επικαμπύλιο</u> ολοκλήρωμα της $f : [\gamma] \to C$ κατά μήκος της γ. (Το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα χρησιμοποιείται στην Μιγαδική Ανάλυση).

Παράδειγμα (1) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από την υποκυκλοειδή καμπύλη $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$, χρησιμοποιώντας την παραμέτρηση $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

<u>Λύση</u> Η καμπύλη μας είναι η $\sigma(\theta) = \left(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta\right), \theta \in [0, 2\pi]$ και είναι απλή και κλειστή όπως εύκολα διαπιστώνεται αναλυτικά αλλά και από το σχήμα. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_\sigma xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a\cos^3\theta\left(3a\sin^2\theta\cos\theta\right) - a\sin^3\theta\left(-3a\cos^2\theta\sin\theta\right)\right]d\theta =$$

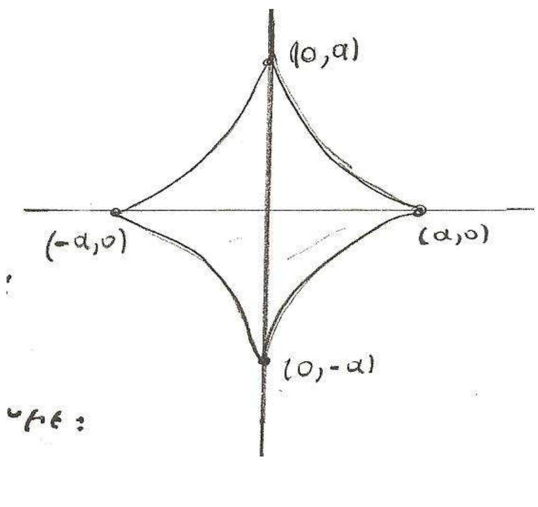
$$\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\theta\cos^4\theta + \cos^2\theta\sin^4\theta\right)d\theta =$$

$$\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta d\theta =$$

$$\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)d\theta$$

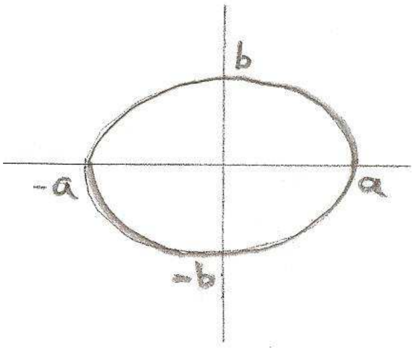
$$= \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}d\theta - \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}\cos 4\theta d\theta$$

$$= \frac{3}{16}a^2 \cdot 2\pi - \frac{3}{16}a^2 \cdot 0 = \frac{3}{8}\pi a^2.$$



Παράδειγμα 2 Αποδείξτε ότι η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ έχει εμβαδόν πab ($a>0$ και $b>0$).

Λύση Η έλλειψη παραμετρικοποιείται ως, $\sigma(\theta)=(a\cos\theta, b\sin\theta), \theta\in[0,2\pi]$, δηλαδή $x(\theta)=a\cos\theta$ και $y(\theta)=b\sin\theta$. Επομένως



$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}\int_{\sigma}(-ydx+xdy)=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[-b\sin\theta(-a\sin\theta)+a\cos\theta(b\cos\theta)\right]d\theta=$$

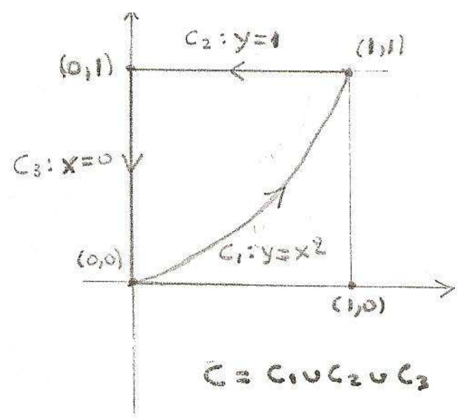
$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}abd\theta=\pi ab.$$

Σημειώνουμε ότι η $\sigma(\theta)=(a\cos\theta, b\sin\theta), \theta\in[0,2\pi]$ είναι C^1 απλή κλειστή καμπύλη.

Παράδειγμα 3 Υπολογίστε το έργο που παράγεται από το πεδίο δυνάμεων $F(x,y)=\left(x+xy^2, 2\left(x^2y-y^2\sin y\right)\right)$ κατά μήκος της κλειστής απλής καμπύλης c του σχήματος.

Λύση Το διανυσματικό πεδίο (δυνάμεων) $F=(p,q)$ είναι βέβαια C^1 στο R^2. Αν το D συμβολίζει το χωρίο (Jordan) που περιβάλλει η θετικά προσανατολισμένη καμπύλη Jordan c τότε από το θεώρημα του Green θα έχουμε ότι το έργο που μας ζητείται ισούται με:

$$W=\int_c F\cdot ds=\int_c pdx+qdy=\int_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=$$



$$\int_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y-2y^2\sin y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(x+xy^2\right)\right]dxdy=$$

$$\int_D(4xy-2xy)dxdy=$$

$$2\int_0^1\left(\int_{x^2}^1 xydy\right)dx=2\int_0^1\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=x^2}^{y=1}dx$$

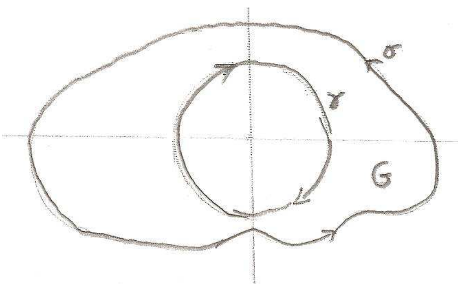
$$=\int_0^1\left(x-x^5\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^6\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

Σημειώνουμε ότι το χωρίο είναι τύπου 3 και μπορεί να περιγραφεί ως τύπου 1 ως εξής: $D=\left\{(x,y): 0<x<1 \text{ και } x^2<y<1\right\}$.

Έχουμε αποδείξει για το διανυσματικό πεδίο $F(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $(x,y)\neq(0,0)$, ότι $\int_\sigma F\cdot ds=2\pi$, όπου $\sigma(t)=(\cos t,\sin t), t\in[0,2\pi]$, ο μοναδιαίος κύκλος με την συνήθη παραμέτρηση που τον καθιστά καμπύλη Jordan. Το επόμενο παράδειγμα γενικεύει αυτό το αποτέλεσμα. (Σύγκρινε αυτό το παράδειγμα και με την παρατήρηση της σελίδας 256)

Παράδειγμα 4 Έστω $\sigma:[a,b]\to R^2$ καμπύλη Jordan στο εσωτερικό της οποίας περιέχεται το $(0,0)$. Αν $F(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $(x,y)\neq(0,0)$ τότε ισχύει $\int_\sigma F\cdot ds=2\pi$.

Λύση



Έστω C_r ένας κύκλος κέντρου $(0,0)$ και αρκετά μικρή ακτίνα $r>0$, ώστε $C_r\subseteq D$, όπου D το εσωτερικό της καμπύλης σ. Θεωρούμε το χωρίο G του επιπέδου το οποίο περιβάλλεται (έχει ως σύνορο $\partial G=[\sigma]\cup C_r$) από τις καμπύλες $[\sigma]$ και C_r. Ο κύκλος C_r θεωρείται με την συνήθη παραμέτρηση $\gamma(t)=r(\cos t,\sin t), t\in[0,2\pi]$.

Επειδή το πεδίο F είναι όπως έχουμε αποδείξει αστρόβιλο ισχύει ότι: $\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}-\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}=0$ (όπου, $p(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$ και $q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$).

Έπεται από το θεώρημα του Green για τον τόπο G ότι: $\int_{\partial G}F\cdot ds=\int_{\partial G}pdx+qdy=\int_G\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=\int_G 0dxdy=0$ ή $\int_\sigma F\cdot ds+\int_{-\gamma}F\cdot ds=0$ ή $\int_\sigma F\cdot ds-\int_\gamma F\cdot ds=0$ ή $\int_\sigma F\cdot ds=\int_\gamma F\cdot ds=2\pi$.

<u>Σημείωση</u>. Ένα υποσύνολο D του R^n λέγεται <u>αστρόμορφο</u> αν υπάρχει $a\in D$ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[a,z]\subseteq D,\forall z\in D$.

(ι) Κάθε αστρόμορφο σύνολο είναι συνεκτικό (πρβλ την απόδειξη της πρότασης 3.24 (ιι)).

(ιι) Κάθε κυρτό σύνολο είναι αστρόμορφο (προφανές).

(ιιι) Κάθε ανοικτό και αστρόμορφο υποσύνολο του R^2 είναι απλά συνεκτικό.
(Διαισθητικά προφανές.)

(ιν) Παραδείγματα ανοικτών και αστρόμορφων (άρα απλά συνεκτικών) υποσυνόλων του R^2 που <u>δεν</u> είναι κυρτά είναι και τα ακόλουθα:

(α) Έστω L= $[z,\infty)$ κλειστή ημιευθεία του R^2 τότε το $D=R^2-[z,\infty)$ έχει την ιδιότητα.

(β) Έστω $\mathrm{B}(a,r)$ ανοικτός δίσκος του R^2. Αν $z \in \mathrm{B}(a,r)$ και L είναι κλειστή ημιευθεία του επιπεδου με αρχή το z , τότε το D=B(α,r)-L εχει επισης την ιδιοτητα.