Θα αποδείξουμε στην συνέχεια- ως εφαρμογή του θεωρήματος του Green- την κατεύθυνση (ιι) $\Rightarrow$(ι) του θεωρήματος που χαρακτηρίζει τα συντηρητικά πεδία $F : D \subseteq R^2 \to R^2$, όπου D απλά συνεκτικός τόπος του R^2. (Θεώρημα 23.3)

Αν $D \subseteq R^2$ είναι απλά συνεκτικός τόπος και $F : D \subseteq R^2 \to R^2$ C^1 διανυσματικό πεδίο, $F = (p,q)$ ώστε $\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial q}{\partial x}$ στο D τότε το F είναι συντηρητικό (υπάρχει $f : D \to R$ C^1 συνάρτηση ώστε $F = \nabla f$).

Απόδειξη Ας σταθεροποιήσουμε ένα τυχόν σημείο $(a,b) \in D$. Για κάθε $(x,y) \in D$ θεωρούμε μια πολυγωνική γραμμή $\Gamma_{(x,y)} \subseteq D$ με αρχικό σημείο το (a,b) και τελικό το (x,y) (το D είναι συνεκτικό και ανοικτό σύνολο, πρβλ.θεώρημα 3.25).

Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση $f : D \to R$ ως ακολούθως:

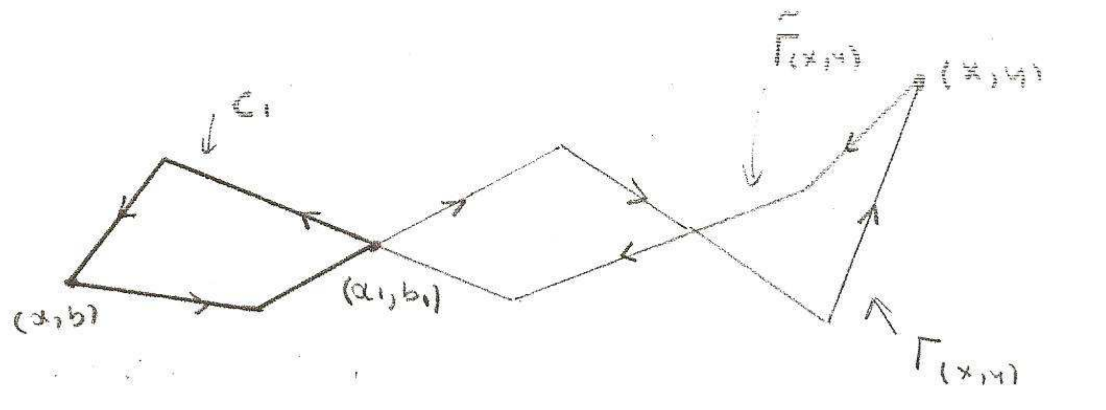
$$f(x,y) = \int_{\Gamma_{(x,y)}} F \cdot ds = \int_{\Gamma_{(x,y)}} pdx + qdy .$$

Ισχυριζόμαστε ότι η f είναι καλά ορισμένη, δηλαδή αν $\tilde{\Gamma}_{(x,y)}$ είναι μια άλλη πολυγωνική γραμμή με $\tilde{\Gamma}_{(x,y)} \subseteq D$ που ξεκινά από το (a,b)και καταλήγει στο (x,y) τότε (1) $\displaystyle\int_{\Gamma_{(x,y)}} pdx + qdy = \int_{\tilde{\Gamma}_{(x,y)}} pdx + qdy$.

Για να δείξουμε την (1) είναι αρκετό να δείξουμε την

(2) $\displaystyle\int_{\Gamma_{(x,y)} - \tilde{\Gamma}_{(x,y)}} pdx + qdy = \int_{\Gamma_{(x,y)}} pdx + qdy - \int_{\tilde{\Gamma}_{(x,y)}} pdx + qdy = 0$.

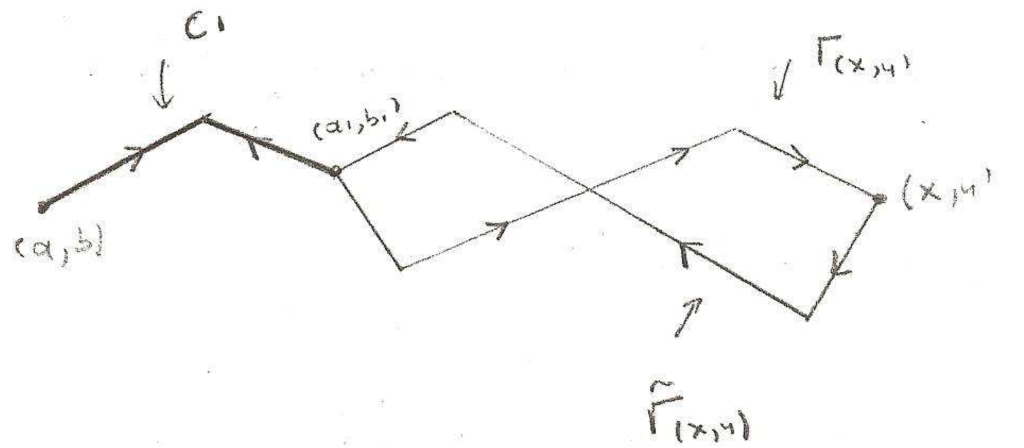
Οι πολυγωνικές γραμμές $\Gamma_{(x,y)}$ και $\tilde{\Gamma}_{(x,y)}$ ξεκινούν από το σημείο (a,b) και έστω



(a_1,b_1) το πρώτο σημείο που συναντώνται μετά το (a,b). Τότε η πολυγωνική γραμμή c_1 που ξεκινά από το (a,b) πηγαίνει στο (a_1,b_1) μέσω της $\Gamma_{(x,y)}$ και επιστρέφει στο (a,b) μέσω της $\tilde{\Gamma}_{(x,y)}$ είναι μια <u>απλή κλειστή καμπύλη</u> του απλά συνεκτικού τόπου D και επομένως είναι το σύνορο ενός ανοικτού απλά συνεκτικού συνόλου $G \subseteq D$. Από το θεώρημα του Green και την υπόθεσή μας έπεται ότι $\int_{\partial G = c_1} pdx + qdy = \iint_G \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dxdy = 0$.

Επομένως $\int_{c_1} pdx + qdy = 0$

Οφείλουμε να παρατηρήσουμε ότι, ενδέχεται οι δύο πολυγωνικές $\Gamma_{(x,y)}$ και $\widetilde{\Gamma}_{(x,y)}$ να



ταυτίζονται σε ένα αρχικό κομμάτι τους. Στην περίπτωση αυτή αν (a_1, b_1) είναι το πρώτο σημείο στο οποίο ξεχωρίζουν, τότε η πολυγωνική γραμμή που ξεκινά από το (a,b) πηγαίνει στο (a_1, b_1) μέσω της $\Gamma_{(x,y)}$ και επιστρέφει στο (a,b) μέσω της $\widetilde{\Gamma}_{(x,y)}$ - είναι βέβαια κλειστή, και – λόγω αντιθέτων προσήμων των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων (αφού ολοκληρώνουμε σε αντίθετες καμπύλες) ικανοποιεί προφανώς την σχέση $\int_{c_1} pdx + qdy = 0$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή δουλεύοντας τώρα με το (a_1, b_1) στην θέση του (a,b), μετά από πεπερασμένα βήματα (αφού αν Γ είναι κλειστή πολυγωνική γραμμή του επιπέδου, το ανοικτό σύνολο $R^2 - \Gamma$ του R^2 έχει πεπερασμένο πλήθος συνεκτικών συνιστωσών) καταλήγουμε στο ότι $\Gamma_{(x,y)} - \widetilde{\Gamma}_{(x,y)} = c_1 + c_2 + \ldots + c_N$ όπου οι $c_k, k = 1, 2, \ldots, N$ είναι (κλειστές) πολυγωνικές γραμμές του R^2 που ικανοποιούν τη σχέση (3) $\int_{c_k} pdx + qdy = 0$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots, N$.

Η σχέση (3) έπεται την (2) και άρα την (1).

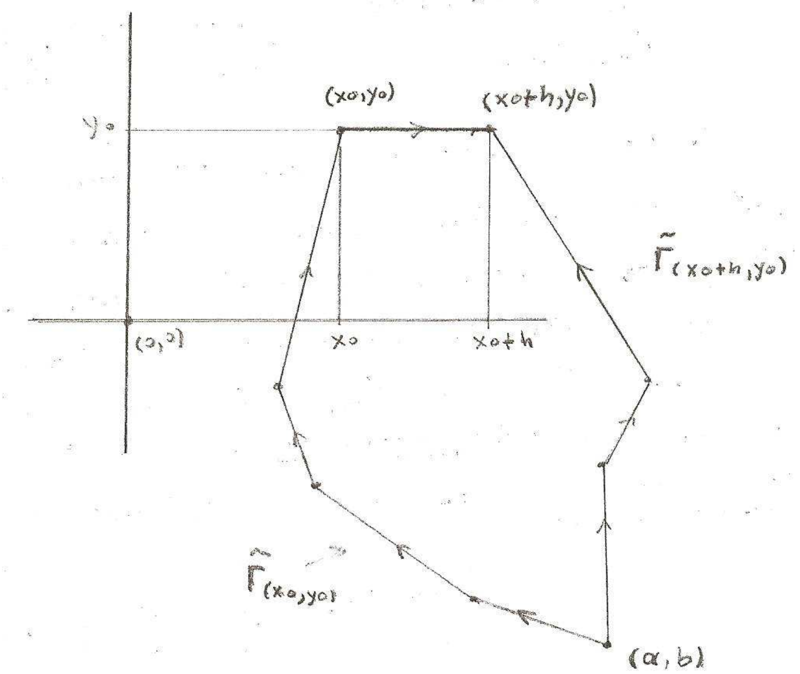
Απομένει να δείξουμε ότι: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = p(x,y)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = q(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in D$.

Σταθεροποιούμε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in D$ και σχηματίζουμε τις διαφορές $f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = \int_{\Gamma_{(x_0+h, y_0)}} pdx + qdy - \int_{\Gamma(x_0, y_0)} pdx + qdy$ για h αρκετά μικρό (έστω $h > 0$) ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[(x_0, y_0), (x_0 + h, y_0)]$ να περιέχεται στο D.

Έπεται αμέσως ότι $\int\limits_{\Gamma_{(x_0+h,y_0)}} pdx+qdy - \int\limits_{\Gamma(x_0,y_0)} pdx+qdy = \int\limits_{[(x_0,y_0),(x_0+h,y_0)]} pdx+qdy$ και

συνεπώς (4) $f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)=\int\limits_{[(x_0,y_0),(x_0+h,y_0)]} pdx+qdy$.

Παραμετρικοποιούμε το ευθύγραμμο τμήμα $[(x_0,y_0),(x_0+h,y_0)]$ ως $\sigma(t)=(x_0,y_0)+t((x_0+h,y_0)-(x_0,y_0))=(x_0+th,y_0)$, $t\in[0,1]$. Συνεπώς $\sigma'(t)=0,\ t\in[0,1]$



Οπότε από την (4) υπολογίζουμε,

$$f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)=\int_0^1 p(x_0+th,y_0)hdt=h\int_0^1 p(x_0+th,y_0)dt.$$

Έπεται ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\int_0^1 p(x_0+th,y_0)dt=$

$\int_0^1 p(x_0,y_0)dt=p(x_0,y_0)$ δηλαδή $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=p(x_0,y_0)$.

Σημειώνουμε ότι αν $h_n\to 0$, τότε η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\geq 1}$ με $f_n(t)=p(x_0+th_n,y_0), n\geq 1, t\in[0,1]$ συγκλίνει (από την συνέχεια της p στο (x_0,y_0)) ομοιόμορφα στην σταθερά $p(x_0,y_0)$ και αυτό δικαιολογεί την ισότητα $\lim\limits_{h\to 0}\int_0^1 p(x_0+th,y_0)dt=\int_0^1 p(x_0,y_0)dt$.

Αναλόγως αποδεικνύεται ότι, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=q(x_0,y_0)$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

Σημειώνουμε ότι (σε ένα ανοικτό και συνεκτικό $D \subseteq R^2$) η πολυγωνική γραμμή που συνδέει τα σημεία (a,b) και (x,y) του D μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι απλή (να μην τέμνει τον εαυτό της) και επί πλέον τα ευθύγραμμα τμήματά της να είναι παράλληλα είτε προς τον άξονα των x ή προς τον άξονα των y. Περαιτέρω σημειώνουμε ότι η απόδειξη απλοποιείται σε κάποιο βαθμό, υποθέτοντας ότι το D είναι αστρόμορφο. Πράγματι αν το D είναι αστρόμορφο ως προς το σημείο $(a,b) \in D$, τότε ορίζουμε την $f : D \to R$ ως εξής: $f(x,y) = \int\limits_{\Gamma(x,y)} pdx + qdy$, όπου $\Gamma(x,y) = \left[(a,b),(x,y)\right]$ το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα από το (a,b) στο (x,y).

25.5.1 Παρατήρηση. Το θεώρημα που αποδείξαμε μας λέει σε διαφορετική αλλά <u>ισοδύναμη</u> διατύπωση ότι: Ένα C^1 διανυσματικό πεδίο $F : U \subseteq R^2 \to R^2$, όπου U απλά συνεκτικός τόπος είναι συντηρητικό αν και μόνο αν είναι αστρόβιλο. (Δες και την παρατήρηση 24.2.1). Σημειώνουμε ότι ένας ανάλογος χαρακτηρισμός ισχύει και για διανυσματικά πεδία $F : U \subseteq R^3 \to R^3$ υποθέτοντας ότι το U είναι ανοικτό και <u>απλά συνεκτικό</u> υποσύνολο του R^3. Επειδή δεν θα δώσουμε τον ακριβή ορισμό της απλής συνεκτικότητας στον R^3, σημειώνουμε απλώς ότι παραδείγματα ανοικτών και απλά συνεκτικών συνόλων στον R^3 είναι τα ανοικτά και κυρτά σύνολα, (άρα οι ανοικτές σφαίρες ο ίδιος ο R^3, και τα ανοικτά ορθογώνια) το $R^3 - \mathrm{K}$, όπου K πεπερασμένο σύνολο επίσης τα ανοικτά και αστρόμορφα υποσύνολα του R^3 κτλ. Αν L είναι ευθεία του R^3 τότε το ανοικτό σύνολο $R^3 - L$ είναι συνεκτικό αλλά όχι απλά συνεκτικό. Έτσι αποδεικνύεται ότι αν $F : U \subseteq R^3 \to R^3$ είναι C^1 διανυσματικό πεδίο και το U απλά συνεκτικό σύνολο, τότε το F είναι συντηρητικό ακριβώς τότε αν το F είναι αστρόβιλο.

Το θεώρημα του Green στην γλώσσα των διανυσματικών πεδίων έχει τις ακόλουθες μορφές (διατυπώσεις).

25.6 Θεώρημα (Διανυσματική μορφή του θεωρήματος του Green).Έστω D φραγμένος τόπος του R^2 με κατά τμήματα ομαλό σύνορο και $F : D \to R^2$, $F = pi + qj$, ένα C^1 διανυσματικό πεδίο ορισμένο σε μια περιοχή του $\overline{D}$. Τότε

$$\int\limits_{\partial D} F \cdot ds = \int\limits_{D} (curlF) \cdot k d\mathrm{A}, \text{ (όπου } k = (0,0,1) \text{).}$$

Απόδειξη: Θέτομε $\widetilde{F} : D \times R \to R^3 : \widetilde{F}(x,y,z) = \left(F(x,y),0\right), (x,y) \in D, z \in R$, τότε – όπως γνωρίζουμε – ορίζουμε ως $curlF$ τον στροβιλισμό του πεδίου $\widetilde{F}$, δηλαδή $curlF \underset{o\rho}{=\!=} curl\widetilde{F}$.

Έχουμε υπολογίσει ότι $curl\widetilde{F} = \left(\dfrac{\partial q}{\partial x} - \dfrac{\partial p}{\partial y}\right)k$ όπου $k = (0,0,1) \in R^3$. (Παρατήρηση 2 της σελίδας 239).

Επειδή προφανώς $(curlF) \cdot k = curl\widetilde{F} \cdot k = \left(\dfrac{\partial q}{\partial x} - \dfrac{\partial p}{\partial y}\right)$ με αντικατάσταση έχουμε το συμπέρασμα.

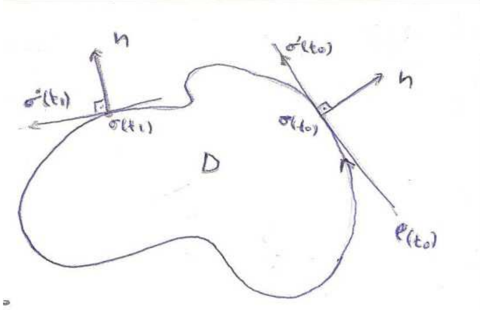
Σημείωση. Υπενθυμίζουμε ότι με τον όρο <u>τόπος</u> εννοούμε ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του R^2.

25.7 Θεώρημα (της απόκλισης στο επίπεδο). Έστω D απλά συνεκτικός τόπος στο επίπεδο που φράσσεται από την απλή κλειστή καμπύλη $\sigma:[a,b]\to R^2$ για την οποία υποθέτομε ότι $\sigma'(t)\neq 0$ για κάθε $t\in[a,b]$. Αν n συμβολίζει το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο $\partial D=[\sigma]$ και $F=(p,q)$ είναι ένα C^1 διανυσματικό πεδίο σε μια περιοχή του $\overline{D}$ τότε

$$(1)\ \int_{\partial D} F\cdot n ds=\int_D divFd\mathrm{A}.$$

Όπου το αριστερό μέλος της (1) συμβολίζει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα <u>πρώτου είδους</u> της βαθμωτής συνάρτησης, $t\in[a,b]\to F(\sigma(t))\cdot\dfrac{(y'(t),-x(t))}{\|\sigma'(t)\|}$, όπου $\sigma(t)=(x(t),y(t)),t\in[a,b]$.

Απόδειξη Το εφαπτόμενο διάνυσμα στο $\sigma(t_0)$ είναι το $\sigma'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0))$ και η εφαπτόμενη ευθεία στο $\sigma(t_0)$ έχει εξίσωση $\ell(t)=\sigma(t_0)+\sigma'(t_0)(t-t_0),t\in R$



Το διάνυσμα n είναι κάθετο στην ευθεία $\ell(t)$ στο σημείο $\sigma(t_0)$ και το πρόσημό του επιλέγεται ώστε να αντιστοιχεί προς την εξωτερική κατεύθυνση. Έτσι το n στο σημείο $\sigma(t_0)$ του ∂D δίνεται από τον τύπο, $n=\dfrac{(y'(t_0),-x'(t_0))}{\|\sigma'(t_0)\|}$. Το $n\perp\ell(t_0)$, αφού $n\cdot\sigma'(t_0)=0$. Έπεται ότι $\int_{\partial D} F\cdot n ds=$

$$\int_a^b \frac{p(x(t),y(t))\cdot y'(t)-q(x(t),y(t))\cdot x'(t)}{\|\sigma'(t)\|}\cdot\|\sigma'(t)\|dt=$$

$$\int_a^b\left[p(x(t),y(t))\cdot y'(t)-q(x(t),y(t))\cdot x'(t)\right]dt=\int_{\partial D} pdy-qdx \quad (2)$$

Επίσης $$\int_D divFd\mathrm{A}=\int_D\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}\right)dxdy \quad (3)$$

Από το θεώρημα του Green και τις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\partial D} F\cdot n ds=\int_D divFd\mathrm{A}.$$

Παρατήρηση Το γεγονός ότι το πρόσημο του διανύσματος επελέγη ώστε να αντιστοιχεί στην εξωτερική κατεύθυνση μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: Η γραμμική απεικόνιση $\varphi:(x,y)\in R^2\to(y,-x)\in R^2$, στρέφει κατά την αρνητική φορά το διάνυσμα (x,y) κατά $-\frac{\pi}{2}$. Αυτό φαίνεται καλύτερα αν χρησιμοποιήσουμε μιγαδικό συμβολισμό, αφού τότε $\varphi(z)=-iz$ ($z=x+yi$) και το πρωτεύον όρισμα του $-i$ στο $(-\pi,\pi)$ είναι το $-\frac{\pi}{2}$. Έτσι το εφαπτόμενο διάνυσμα $\sigma'(t)=(x'(t),y'(t))$ της καμπύλης σ, στρέφεται κατά την αρνητική φορά κατά $\frac{\pi}{2}$ και συνεπώς γίνεται $(y'(t),-x'(t))$. Με κανονικοποίηση παίρνουμε το η.

Παραδείγματα 1) Έστω $F=(xy^2,y+x)$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_D (curlF)\cdot k d\mathrm{A}$, πάνω στο χωρίο D του πρώτου τεταρτημόριου που φράσσεται από τις $y=x^2$ και $y=x$.

Λύση Πρώτα υπολογίζουμε τον στροβιλισμό του F, ισοδύναμα, του $\widetilde{F}(x,y,z)=(xy^2,y+x,0)$, που είναι ,

$$curl\widetilde{F}=\nabla\times\widetilde{F}=\left(0,0,\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)=(0,0,1-2xy)=(1-2xy)k.$$

Άρα $curlF=curl\widetilde{F}=(1-2xy)k$.

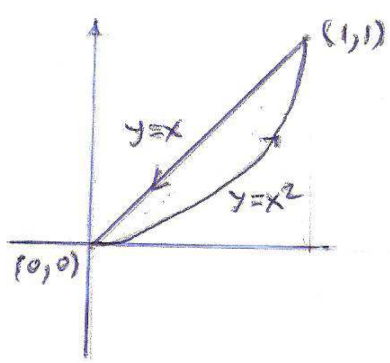
Έπεται ότι, $(curlF)\cdot k=1-2xy$. Η συνάρτηση αυτή ολοκληρώνεται πάνω στο D που είναι χωρίο τύπου 3 με την χρήση ενός διαδοχικού ολοκληρώματος.

$$\int_D (1-2xy)dxdy=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{x}(1-2xy)\,dy\right)dx=\int_0^1\left[y-xy^2\right]_{x^2}^{x}dx=$$

$$\int_0^1\left[x-x^3-x^2+x^5\right]dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{12}.$$

(Εδώ θεωρούμε το D ως χωρίο τύπου 1, $D=\{(x,y):0\le x\le 1 \text{ και } x^2\le y\le x\}$).

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε πρώτα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\partial D} F\cdot ds$, όπου ∂D είναι το σύνορο του χωρίου D (δες το σχήμα) και κατόπιν χρησιμοποιώντας την διανυσματική μορφή του θεωρήματος του Green να έχουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα



Το θετικά προσανατολισμένο σύνορο ∂D του D είναι το «άθροισμα» των καμπυλών σ_1 και σ_2, $\partial D=\sigma_1+(-\sigma_2)$, όπου $\sigma_1(t)=(t,t^2), t\in[0,1]$ και $\sigma_2(t)=(t,t), t\in[0,1]$.

Έτσι έχουμε: $\int_{\partial D} F\cdot ds=\int_{\sigma_1} F\cdot ds-\int_{\sigma_2} F\cdot ds$,

$$\int_{\sigma_1} F\cdot ds=\int_0^1 F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt=$$

$$\int_0^1 F\left(x_1(t), y_1(t)\right)\cdot\left(x_1'(t), y_1'(t)\right)dt = \int_0^1 F\left(t, t^2\right)\cdot(1, 2t)\,dt = \int_0^1 \left(t\cdot t^4, t^2+t\right)\cdot(1, 2t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(t^5 + 2t^3 + 2t^2\right)dt = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

$$\int_{\sigma_2} F\cdot ds = \int_0^1 F\left(\sigma_2(t)\right)\cdot\sigma_2'(t)\,dt = \int_0^1 F\left(x_2(t), y_2(t)\right)\cdot\left(x_2'(t), y_2'(t)\right)dt = \int_0^1 F(t,t)\cdot(1,1)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(t^3, 2t\right)\cdot(1,1)dt = \int_0^1 \left(t^3 + 2t\right)dt = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$

Επομένως, $\int_{\partial D} F\cdot ds = \frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{1}{12}$ και από την διανυσματική μορφή του θεωρήματος Green $\int_D (curlF)\cdot k\,d\mathrm{A} = \int_{\partial D} F\cdot ds = \frac{1}{12}$.

2) Έστω $F = \left(y^3, x^5\right)$. Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (πρώτου είδους) $\int_{\partial D} F\cdot nds$ στο σύνορο του μοναδιαίου τετραγώνου D.

Λύση Από το θεώρημα της απόκλισης έχουμε: $\int_{\partial D} F\cdot nds = \int_D divF\cdot d\mathrm{A}$

Επειδή , $divF = \frac{\partial\left(y^3\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(x^5\right)}{\partial y} = 0$, άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με μηδέν.