Τριπλό ολοκλήρωμα

Για τα τριπλά ολοκληρώματα ισχύει πάλι το Θεώρημα του Fubini που μας επιτρέπει να υπολογίζουμε το τριπλό ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

με διαδοχική ολοκλήρωση.

Στην ειδική περίπτωση που το D είναι ορθογώνιο, $D = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, έχουμε

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Στη γενική περίπτωση, για να αναχθούμε σε διαδοχική ολοκλήρωση, το στερεό χωρίο D θα πρέπει να είναι «απλό», δηλαδή να γράφεται στη μορφή:

$$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),\ \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y) \}$$

όπου οι συναρτήσεις $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ είναι συνεχείς και a, b σταθερές (ή σε ανάλογη μορφή για οποιαδήποτε εναλλαγή των ρόλων των συντεταγμένων x, y, z).

Αν το D είναι όπως παραπάνω και η f συνεχής, τότε

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Υπενθυμίζουμε ότι για τον όγκο $V(D)$ του στερεού χωρίου D, ισχύει:

$$V(D) = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz$$

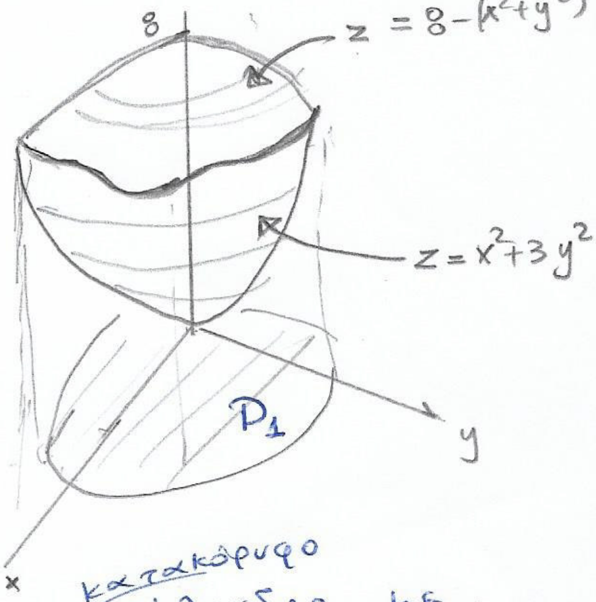
Παράδειγμα 1

Βρείτε τον όγκο του στερεού D που φράσσεται από τις επιφάνειες
$$z = x^2 + 3y^2 \qquad z = 8 - (x^2+y^2)$$

Λύση

Ο όγκος δίνεται από το ολοκλήρωμα
$$V(D) = \iiint_D 1\, dx\,dy\,dz$$

Για να γράψουμε το D στη μορφή απλού χωρίου, ξεκινάμε βρίσκοντας την προβολή του, D_1, πάνω στο xy-επίπεδο.



Η προβολή στο xy επίπεδο της καμπύλης στην οποία τέμνονται οι δύο επιφάνειες βρίσκεται εξισώνοντας τα z:

$$x^2+3y^2 = 8-(x^2+y^2)$$
$$\Leftrightarrow\ 2x^2+4y^2 = 8$$
$$\Leftrightarrow\ x^2+2y^2 = 4.$$

Συμπεραίνουμε ότι οι δύο επιφάνειες τέμνονται πάνω στον κατακόρυφο κύλινδρο με βάση την έλλειψη $x^2+2y^2=4$ ($\Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$).

Άρα η προβολή D_1 του στερεού D στο xy επίπεδο είναι το χωρίο που περικλείεται από αυτή την έλλειψη. Άρα
$$D_1 = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2\le x\le 2,\ -\sqrt{\tfrac{4-x^2}{2}}\le y\le\sqrt{\tfrac{4-x^2}{2}} \right\}$$

και τελικά
$$D = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -2\le x\le 2,\ -\sqrt{\tfrac{4-x^2}{2}}\le y\le\sqrt{\tfrac{4-x^2}{2}},\ x^2+3y^2\le z\le 8-(x^2+y^2) \right\}$$

και
$$V(D) = \int_{x=-2}^{2}\int_{y=-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}\int_{x^2+3y^2}^{8-(x^2+y^2)} dz\,dy\,dx$$

Έχουμε

$$V(D) = \int_{x=-2}^{2} \int_{y=-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} (8-2x^2-4y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=-2}^{2} \left[(8-2x^2)y - \frac{4y^3}{3} \right]_{y=-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} dx$$

$$= \int_{x=-2}^{2} 2\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\,(8-2x^2) - \frac{4}{3}\cdot 2\left(\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\right)^3 dx$$

$$= \int_{x=-2}^{2} \left[\frac{8}{2\sqrt{2}}(4-x^2)^{3/2} - \frac{8}{3\cdot 2\sqrt{2}}(4-x^2)^{3/2} \right] dx$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{x=-2}^{2} (4-x^2)^{3/2}\,dx$$

Εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\,dt$,
$\sqrt{4-x^2} = 2\cos t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$,

έχουμε:

$$\int_{-2}^{2} (4-x^2)^{3/2}\,dx = 2^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt = \frac{16}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)^2\,dt$$

$$= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \cos^2 2t + 2\cos 2t\right] dt = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 4t)\,dt + 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt$$

$$= 8\cdot\frac{\pi}{2} + 4\,\frac{\pi}{2} = 6\pi$$ και, τελικά,

$$V(D) = 8\sqrt{2}\,\pi$$ κυβικές μονάδες.

Αλλαγή μεταβλητών σε πολλαπλά ολοκληρώματα

Ορισμός

A) Έστω $T : D^* \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ μια C^1 απεικόνιση με $T(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v))$.

Η Ιακωβιανή ορίζουσα (ή απλά Ιακωβιανή) της T είναι η ορίζουσα του πίνακα των μερικών παραγώγων της T και συμβολίζεται με $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, δηλαδή

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

B) Ανάλογα στις τρεις διαστάσεις:

Αν $T : D^* \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μια C^1 απεικόνιση με $T(u,v,w) = (x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w))$, τότε η Ιακωβιανή της T είναι η ορίζουσα

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Βασικά Παραδείγματα

1. Αν $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ η απεικόνιση που μετασχηματίζει τις πολικές συντεταγμένες σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, δηλαδή
$T(r,\theta) = (x(r,\theta),\ y(r,\theta)) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$
(ή, πιο απλά, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$), τότε

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

2. Αν $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η απεικόνιση που μετασχηματίζει τις κυλινδρικές συντεταγμένες σε Καρτεσιανές, δηλαδή

$$T(r,\theta,z) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)$$

(ή $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$), τότε

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \dots = r$$

3. Αν $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η απεικόνιση που μετασχηματίζει τις σφαιρικές συντεταγμένες σε Καρτεσιανές, δηλαδή

$$T(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi)$$

(ή $x = \rho\sin\varphi\cdot\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\cdot\sin\theta$, $z = \rho\cos\varphi$),

τότε

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \dots = -\rho^2\sin\varphi$$

Θεώρημα Αλλαγής μεταβλητών για διπλά ή τριπλά ολοκληρώματα

Α) Έστω $D, D^* \subseteq \mathbb{R}^2$ και $T : D^* \to D$ απεικόνιση της κλάσης C^1, η οποία είναι 1-1 και επί του D, δηλαδή $T(D^*) = D$. Τότε, για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$, ισχύει

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

Β) Ανάλογα, αν τα D, D^* είναι χωρία του $\mathbb{R}^3$, τότε, με τις αντίστοιχες υποθέσεις, ισχύει

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw$$

Παραδείγματα

1. Αν $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, τότε μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες, έχουμε

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r\,dr\,d\theta$$

όπου D^* η έκφραση του D σε πολικές συντεταγμένες. Για παράδειγμα, αν D ο κυκλικός δίσκος: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le a^2\}$, $(a>0)$,

τότε

$$D^* = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le a, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\},$$

οπότε

$$\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r\,dr\,d\theta$$

2. Αν $D \subseteq \mathbb{R}^3$, $f : D \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, τότε μετασχηματίζοντας σε κυλινδρικές συντεταγμένες έχουμε

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot r\,dr\,d\theta\,dz$$

όπου D^* η έκφραση του D σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Για παράδειγμα, αν D είναι ο κύλινδρος

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq a^2,\ 0 \leq z \leq b\},\ (a,b>0)$$

τότε

$$D^* = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq b\},$$

οπότε

$$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^b f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^b f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,dz\,d\theta\,dr$$

3. Αν $D \subseteq \mathbb{R}^3$, $f : D \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, τότε μετασχηματίζοντας σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} f(\rho\sin\varphi\cdot\cos\theta, \rho\sin\varphi\cdot\sin\theta, \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

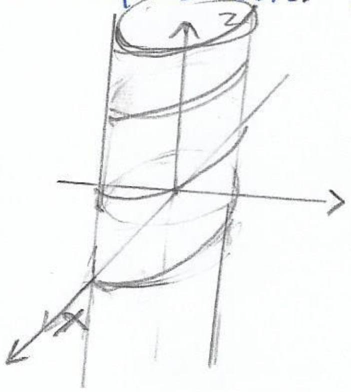
όπου D^* η έκφραση του χωρίου D σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Γενικά, η αλλαγή σε κυλινδρικές συντεταγμένες εφαρμόζεται συνήθως όταν το στερεό χωρίο ολοκλήρωσης ορίζεται μέσω επιφανειών εκ περιστροφής με άξονα τον $z'z$, όπως οι παρακάτω:

Κύλινδρος

Καρτεσιανές συντ.: $x^2+y^2=a^2$

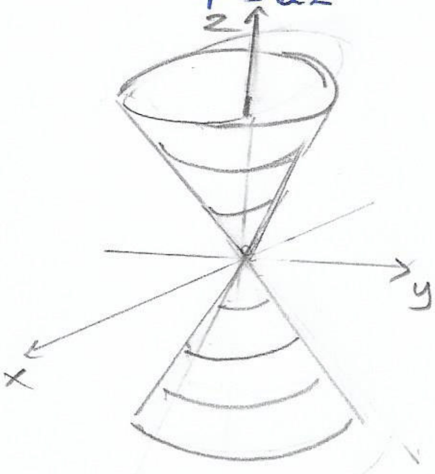
Κυλινδρικές συντ: $r=a$



Κώνος (διπλός)

$x^2+y^2=a^2z^2$

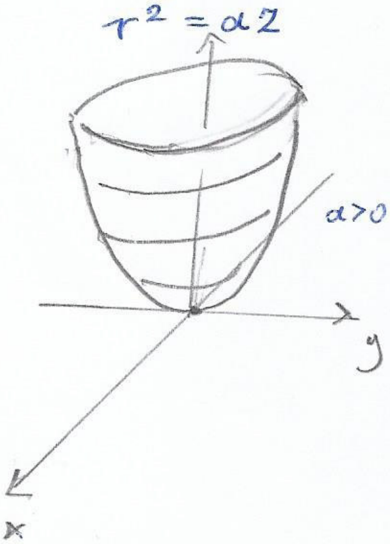
$r=az$



Παραβολοειδές

$x^2+y^2=az$

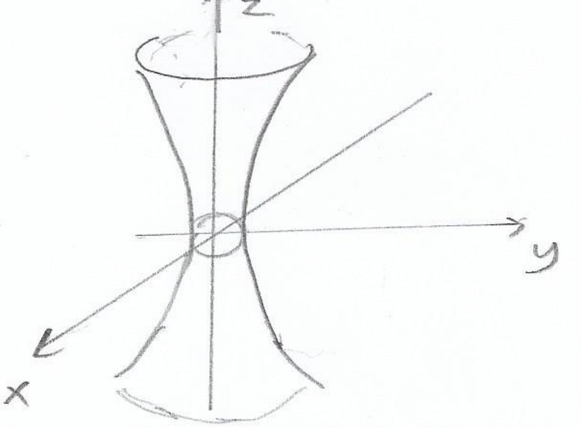
$r^2=az$



Υπερβολοειδές

Καρτεσιανές συντ: $x^2+y^2-z^2=1$

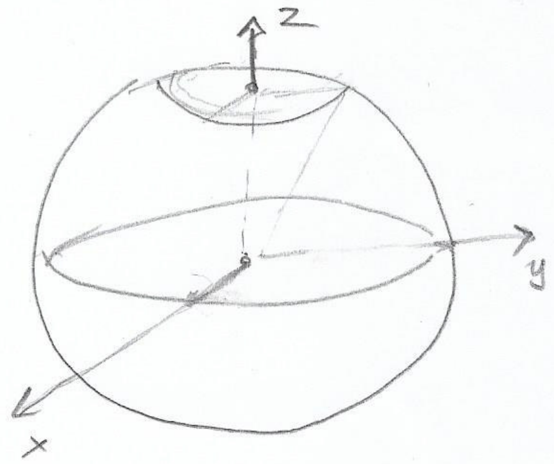
Κυλινδρικές $r^2=z^2+1$



Σφαίρα

$x^2+y^2+z^2=a^2$

$r^2+z^2=a^2$

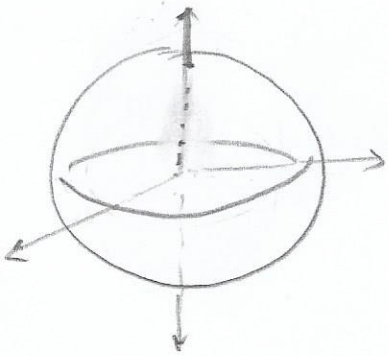


Η αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι κατάλληλη όταν το στερεό χωρίο ολοκλήρωσης ορίζεται μέσω επιφανειών όπως

Σφαίρα

Καρτεσιανές: $x^2+y^2+z^2=a^2$

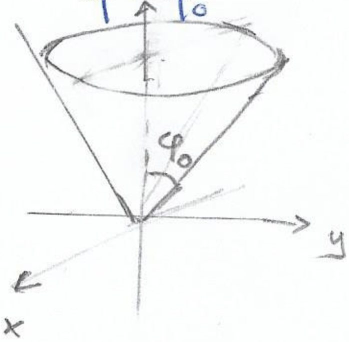
Σφαιρικές: $\rho = a \quad (a>0)$



Κώνος

$z = \cot\varphi_0 \sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi = \varphi_0$



Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί ο όγκος της μπάλας ακτίνας a

a) με ολοκλήρωση σε κυλινδρικές συντεταγμένες

β) με ολοκλήρωση σε σφαιρικές συντεταγμένες.

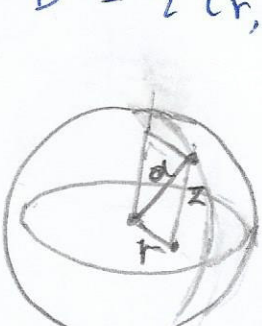
Λύση

a) Έστω D η μπάλα. Είναι $V(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz$.
Με αλλαγή σε κυλινδρικές συντεταγμένες, η μπάλα μετασχηματίζεται σε

$$D^* = \{ (r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \theta \le 2\pi, \ -a \le z \le a, \ 0 \le r \le a^2 - z^2 \}$$

Άρα

$$V(D) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-a}^{a} \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} r\,dr\,dz\,d\theta$$



$z^2+r^2=a^2$ είναι η εξίσωση της σφαίρας σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-a}^{a} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a^2-z^2}} dz\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-a}^{a} \frac{a^2-z^2}{2}\,dz\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\cdot 2a^3 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{a^3}{3}\right) d\theta = 2\pi\cdot\frac{2}{3}a^3 = \frac{4\pi a^3}{3}$$

(β) Με αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες, η μπάλα μετασχηματίζεται σε:

$$D^{**} = \{ (\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \rho \le a \}$$

Άρα

$$V(D) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{a} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin\varphi \, \frac{a^3}{3} \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{a^3}{3} \left[-\cos\varphi \right]_{\varphi=0}^{\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2a^3}{3} \, d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}$$

Παράδειγμα 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dx \, dy \, dz,$$ όπου D η μοναδιαία μπάλα.

Λύση. Με αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες, παίρνουμε

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{1} e^{\rho^3} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{3} \left[e^{\rho^3} \right]_{\rho=0}^{1} \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{3} (e-1) \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{3} (e-1) \left[\cos\varphi \right]_{\varphi=0}^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{2}{3} (e-1) \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi}{3} (e-1)$$

Παράδειγμα 4

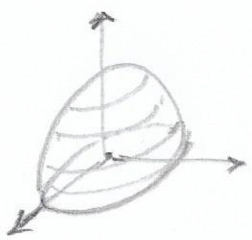
Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iiint_B \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz \quad , \quad \text{όπου}$$

$$B = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1 ,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1+x^2},\ 0 \leq z \leq 1-(x^2+y^2) \}$$

Λύση

Θα μετασχηματίσουμε το ολοκλήρωμα σε κυλινδρικές συντεταγμένες.



Παραβολοειδές
$z = 1-(x^2+y^2)$
Τομή με xy-επίπεδο: κύκλος
$x^2+y^2=1$

Τα όρια της ολοκλήρωσης είναι:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \quad 0 \leq r \leq 1 , \quad 0 \leq z \leq 1-r^2$$

Άρα

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=0}^{1-r^2} r \cdot r \, dz\, dr\, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} (r^2 - r^4)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_{r=0}^{1} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) d\theta$$

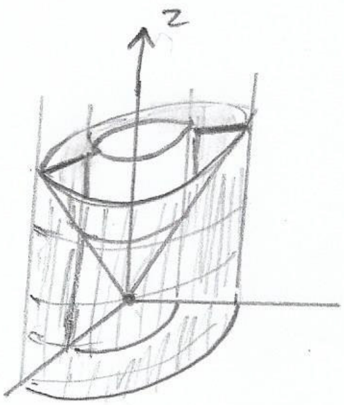
$$= \frac{4\pi}{15} .$$

Παράδειγμα 5

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού B που βρίσκεται στο 1ο ογδοημόριο και φράσσεται από τις επιφάνειες

$x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ και $z^2=x^2+y^2$

Λύση



Το στερεό περικλείεται στα πλάγια μεταξύ δύο κυλίνδρων και από τα επίπεδα xz και yz, από κάτω από το xy επίπεδο και από πάνω από έναν κώνο.

Μετασχηματίζοντας σε κυλινδρικές συντεταγμένες, έχουμε : $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (1ο τεταρτημόριο), $1 \le r \le 2$, $0 \le z \le r$

$$V(B) = \iiint_B dx\,dy\,dz = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=1}^{2} \int_{z=0}^{r} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=1}^{2} r^2\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=1}^{2}$$

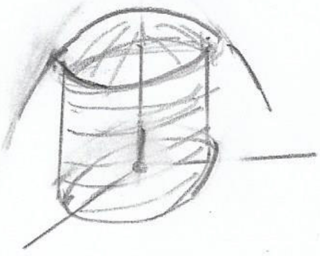
$$= \int_{\theta=0}^{/2} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) d\theta = \frac{7\pi}{6}$$

Παράδειγμα 6

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού B που φράσσεται από πάνω από την επιφάνεια $x^2+y^2+z^2=4$ (σφαίρα), από κάτω από το xy επίπεδο και στο πλάι από τον κύλινδρο $x^2+y^2=1$.

Λύση

Το στερεό είναι ένας κύλινδρος με «καπάκι» μέρος της σφαίρας ακτίνας 2.



Σε κυλινδρικές συντεταγμένες τα όρια ολοκλήρωσης είναι:

$0 \le \theta \le 2\pi$, $\quad 0 \le r \le 1$, $\quad 0 \le z \le \sqrt{4-r^2}$

(Η εξίσωση της σφαίρας σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $r^2+z^2=4$)

Άρα

$$V = \iiint_B dx\,dy\,dz = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r\sqrt{4-r^2}\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2}{3}\left[4-r^2\right]^{3/2}\right]_{r=0}^{1}$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{1}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)d\theta = \frac{2\pi}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)$$