Η Γεωμετρία των Πραγματικών Συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$, μια συνάρτηση

$f : A \to \mathbb{R}^m$, όπου $m \geq 2$,

λέγεται διανυσματική συνάρτηση.

π.χ.

η $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ με

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_1 x_2 x_3, \sqrt{x_1^2 + x_4^2}\right).$$

Μια συνάρτηση

$g : A \to \mathbb{R}$

λέγεται πραγματική συνάρτηση

π.χ. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $g(x, y, z) = x \cdot y + z$

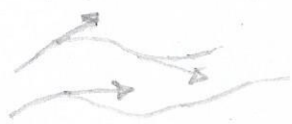
Συναρτήσεις σαν την f ή την g (με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, όπου $n \geq 2$) λέγονται συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Παραδείγματα

1. Αν $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ενα χωρίο στον χώρο, τότε η θερμοκρασία σε κάθε σημείο του A δίνεται από μία συνάρτηση $T : A \to \mathbb{R}^3$, δηλαδή, για κάθε $(x, y, z) \in A$, $T(x, y, z)$ είναι η θερμοκρασία στο σημείο (x, y, z).

2. Για να περιγράψουμε την κίνηση ενός ρευστού στον χώρο, χρειαζόμαστε μία

συνάρτηση $V : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, όπου



$$V(x,y,z,t) = (V_1, V_2, V_3)$$

είναι το διάνυσμα ταχύτητας του ρευστού στο σημείο (x,y,z) τη χρονική στιγμή t.

Γραφήματα πραγματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

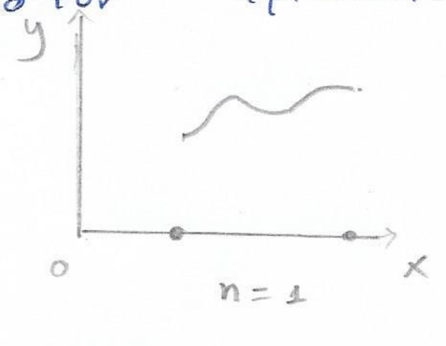
Στην περίπτωση των πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής, δηλαδή $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ όπου $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$, το γράφημα της f μας δίνει μια εικόνα για τη συμπεριφορά της συνάρτησης.

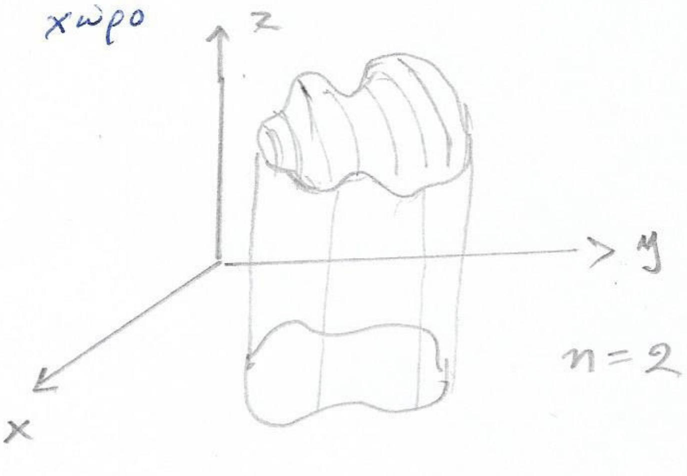
Αν τώρα γενικότερα $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, το <u>γράφημα</u> της f είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$G_f = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U} \text{ και } y = f(x_1, \dots, x_n) \}$$

Αν $n = 1$, το G_f είναι μία καμπύλη στο επίπεδο.

Αν $n = 2$ το G_f είναι μία επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο





Σύνολα στάθμης

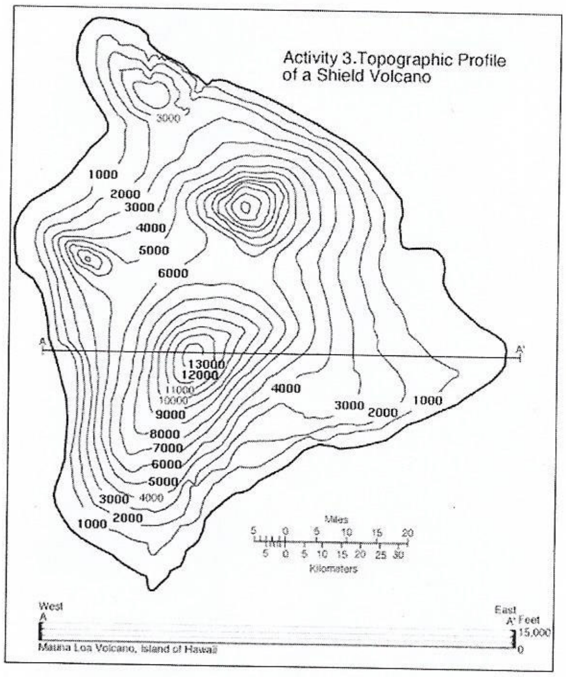
Εστω $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$.

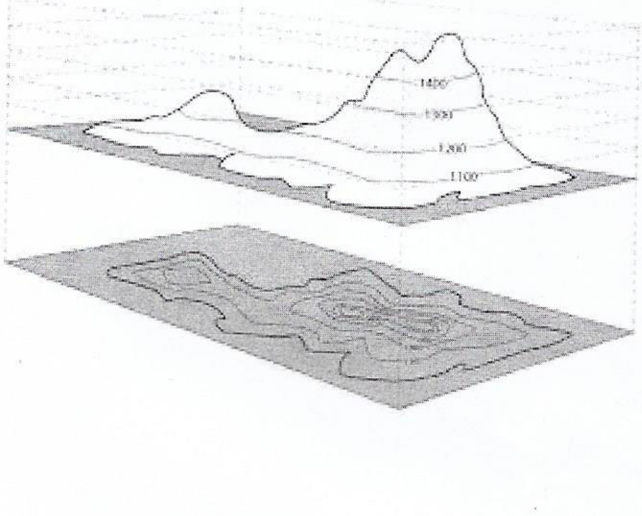
Αν $a \in \mathbb{R}$, το σύνολο στάθμης της f με τιμή a είναι το σύνολο των σημείων $\vec{x} \in \mathcal{U}$ με $f(\vec{x}) = a$.

$$L_a = \{ \vec{x} \in \mathcal{U} : f(\vec{x}) = a \}$$

Για συναρτήσεις δύο μεταβλητών, δηλαδή $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, μιλάμε για καμπύλες στάθμης.

Οι καμπύλες στάθμης αντιστοιχούν στις λεγόμενες ισοϋψείς καμπύλες ενός υψομετρικού χάρτη.





Αν $n=3$, δηλαδή $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ και $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, τότε μιλάμε για επιφάνειες στάθμης.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad g(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

Παρατηρούμε ότι $a > 1$ ή $a \leq 0$, τότε το αντίστοιχο σύνολο στάθμης είναι κενό.

Αν $0 < a \leq 1$, τότε

$$L_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : e^{-(x^2+y^2+z^2)} = a\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = \ln\left(\tfrac{1}{a}\right)\}$$

Δηλαδή, για $a = 1$ έχουμε

$(x,y,z) \in L_1 \iff x^2+y^2+z^2 = 0 \iff (x,y,z) = \vec{0}$,

άρα $L_1 = \{\vec{0}\}$, ενώ, για $0 < a < 1$

$$L_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = \ln\left(\tfrac{1}{a}\right)\}$$

είναι η επιφάνεια της σφαίρας κέντρου O και ακτίνας $\rho = \frac{1}{a}$.

Μία συνάρτηση σαν την g θα μπορούσε να περιγράψει την κατανομή της θερμοκρασίας στον χώρο, όταν μία πηγή θερμότητας βρίσκεται στο σημείο O.

Επιστρέφοντας στις συναρτήσεις δύο μεταβλητών, οι καμπύλες στάθμης μας επιτρέπουν να αποκτήσουμε μια εικόνα για το γράφημα της συνάρτησης:
Ανυψώνοντας νοερά κάθε καμπύλη στάθμης L_c στο ύψος c, σχηματίζεται το γράφημα της συνάρτησης.

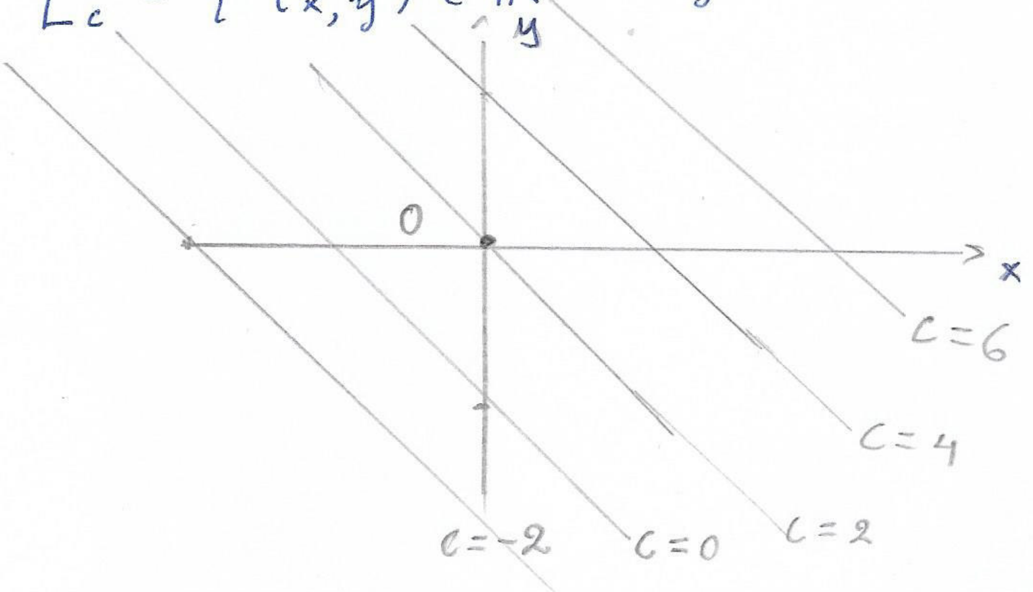
Παραδείγματα

1. $f(x,y) = x+y+2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Το γράφημα της f είναι το κεκλιμένο επίπεδο $z=x+y+2$, το οποίο τέμνει το xy-επίπεδο $(z=0)$ στην ευθεία l: $y=-x-2$ και τον άξονα των z $(x=y=0)$ στο σημείο $A(0,0,2)$.

Οι καμπύλες στάθμης είναι ευθείες παράλληλες με την l:
Για κάθε $c\in\mathbb{R}$,

$$L_c = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = -x+c-2\}$$



2. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Οι καμπύλες στάθμης είναι:

Αν $c<0$, τότε $L_c = \emptyset$.

Αν $c=0$, τότε $L_c = \{(0,0)\}$

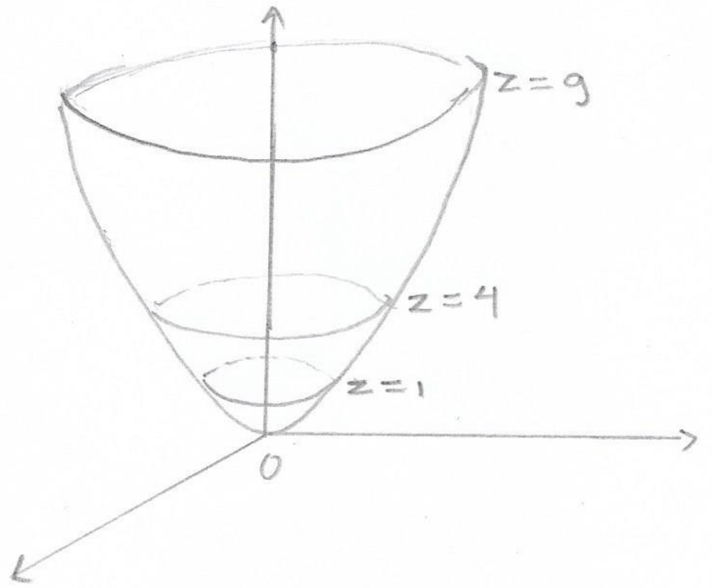
Αν $c>0$, τότε η

$L_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = c\}$

είναι κύκλος κέντρου O και ακτίνας $\sqrt{c}$.

Αυτό δείχνει ότι η τιμή της συνάρτησης σε ένα σημείο $A(x,y)$ εξαρτάται μόνο από την απόσταση του A από την αρχή των αξόνων.

Υψώνοντας τις καμπύλες στάθμης στο κατάλληλο ύψος, παίρνουμε το γράφημα της συνάρτησης. Είναι ένα παραβολοειδές εκ περιστροφής.



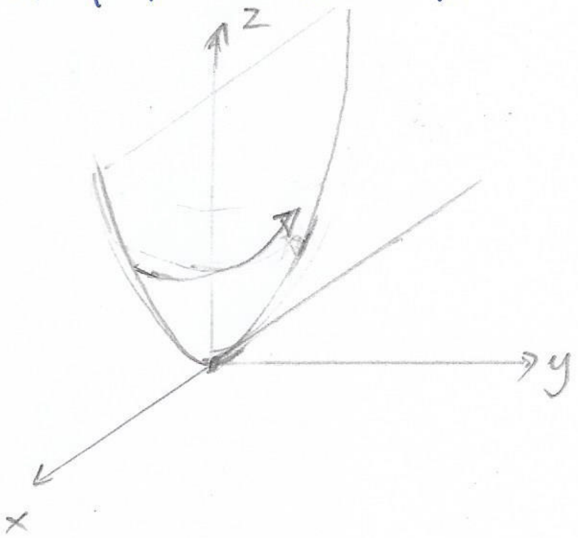
Αυτό φαίνεται καλύτερα αν χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των τομών, θεωρήσουμε δηλαδή την τομή του γραφήματος της f με κατάλληλα κατακόρυφα επίπεδα.

Για παράδειγμα, εδώ, αν P_1 είναι το xz-επίπεδο ($y=0$), έχουμε

$$P_1 \cap G_f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y=0 , \quad z = x^2 \},$$

δηλαδή μία παραβολή στο xz-επίπεδο.

Αφού, όπως παρατηρήσαμε, η τιμή της f σε ένα σημείο A εξαρτάται μόνο από την απόσταση του A από την αρχή O, καταλαβαίνουμε ότι, περιστρέφοντας αυτή την παραβολή γύρω από τον άξονα των z, διαγράφουμε το γράφημα της f.



3. $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Χρησιμοποιώντας καμπύλες στάθμης και τομές με κατακόρυφα επίπεδα, περιγράψτε το γράφημα της g και συγκρίνετέ το με το γράφημα της f του Παραδείγματος 2.

4. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2 - y^2$

Σχεδιάζουμε πρώτα τις καμπύλες στάθμης της f:

$L_c = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = c \}$

Για $c=0$, είναι

$(x,y) \in L_0 \iff y^2 = x^2 \iff y = \pm x$,

δηλαδή το L_0 αποτελείται από τις δύο διχοτόμους των τεταρτημορίων:

$y = x$ και $y = -x$.

Για $c = 1$:

$(x,y) \in L_1 \iff y^2 = x^2 - 1 \iff y = \pm\sqrt{x^2-1}$,

δηλαδή το L_1 αποτελείται από τους δύο κλάδους ($x>0$, $x<0$) της υπερβολής $y = \pm\sqrt{x^2-1}$ με άξονα τον άξονα των x.

Ανάλογα, για κάθε $c>0$

$L_c = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm\sqrt{x^2-c} \}$ υπερβολή με άξονα τον άξονα των x.

Ενώ, για κάθε $c<0$, η

$L_c = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \pm\sqrt{y^2-|c|} \}$

είναι υπερβολή με άξονα τον άξονα των y.

Για να σχηματίσουμε την εικόνα του γραφήματος της f, θα μας βοηθήσει να πάρουμε και κάποιες τομές με κατακόρυφα επίπεδα.

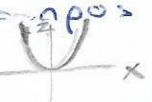
Αν P_1 είναι το xz-επίπεδο $(y=0)$, έχουμε

$$P_1 \cap G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y=0, \ z=x^2\}$$

και, γενικότερα, αν P_1^k $(k \in \mathbb{R})$ είναι το επίπεδο $y=k$ (παράλληλο με το xz-επίπεδο), τότε

$$P_1^k \cap G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y=k, \ z=x^2-k^2\}.$$

Συμπεραίνουμε ότι οι τομές με τα επίπεδα που είναι παράλληλα στο xz-επίπεδο είναι κατακόρυφες μετατοπίσεις προς τα κάτω της κυρτής παραβολής $z=x^2$

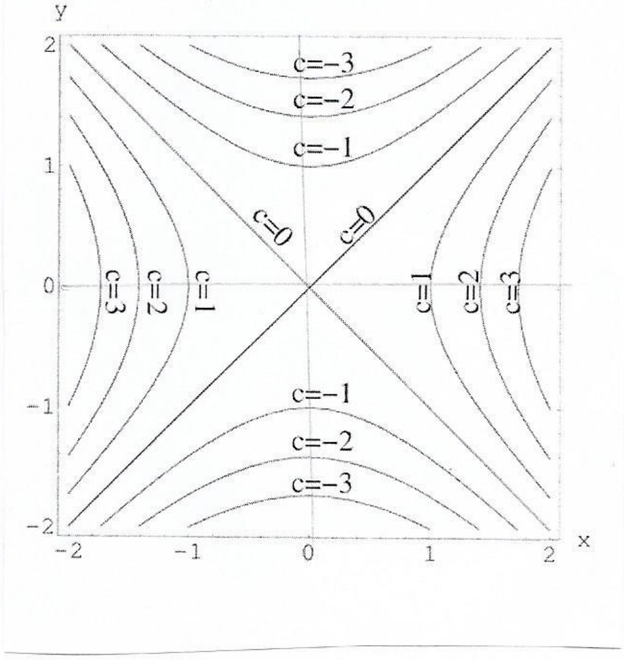


Ανάλογα, αν P_2 είναι το yz-επίπεδο $(x=0)$ και, γενικότερα, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, P_2^λ είναι το επίπεδο $x=\lambda$ που είναι παράλληλο προς το yz-επίπεδο, βλέπουμε ότι

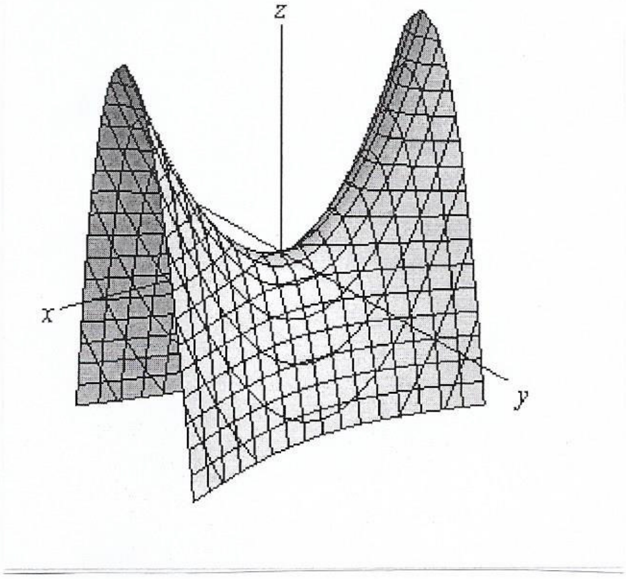
$$P_2^\lambda \cap G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=\lambda, \ z=\lambda^2-y^2\}.$$

Συμπεραίνουμε ότι οι τομές με τα επίπεδα που είναι παράλληλα στο yz-επίπεδο είναι κατακόρυφες μετατοπίσεις προς τα πάνω της κοίλης παραβολής $z=-y^2$.

Οι ισοσταθμικές καμπύλες της $f(x,y) = x^2 - y^2$



Τελικά, η επιφάνεια G_f έχει την παρακάτω μορφή που ονομάζεται υπερβολικό παραβολοειδές ή σάγμα (σαμάρι)



Ασκηση

Περιγράψτε ή σχεδιάστε τις καμπύλες στάθμης και το γράφημα των συναρτήσεων:

(α) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

(β) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

(γ) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

(δ) $f(x,y) = x^3 - x$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$