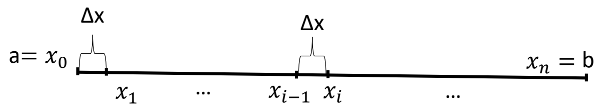
Φροντιστηριακό μάθημα 03-12-2021

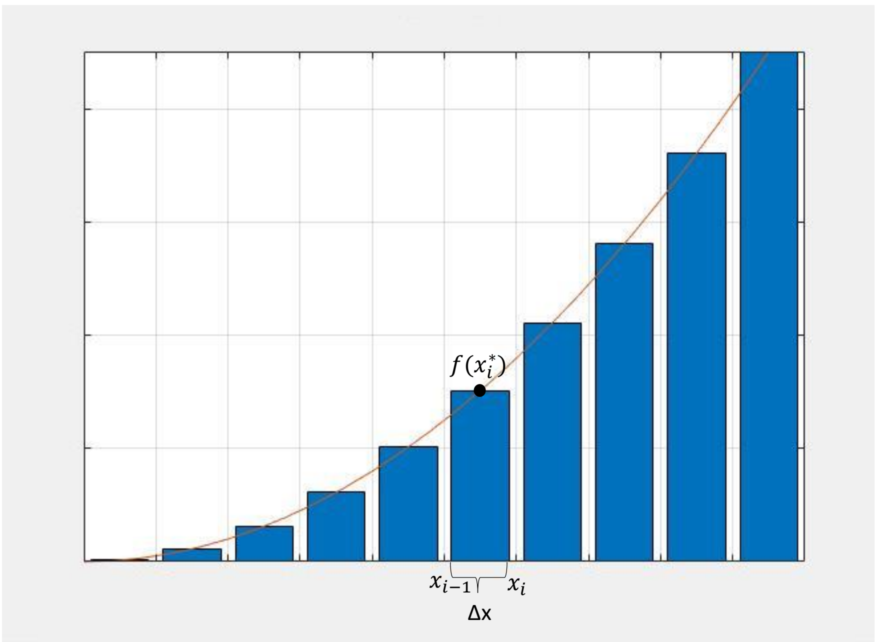
Σύντομη υπενθύμιση θεωρίας

Ολοκλήρωση συναρτήσεων μίας μεταβλητής

Έστω μία $f(x)$ συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$. Αν διαμερίσουμε το διάστημα $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα $[x_{i-1}, x_i]$ ίσου πλάτους $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ και διαλέξουμε ένα σημείο x_i^* στο κάθε υποδιάστημα τότε φτιάχνουμε το άθροισμα Ριεμανν

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \ .$$

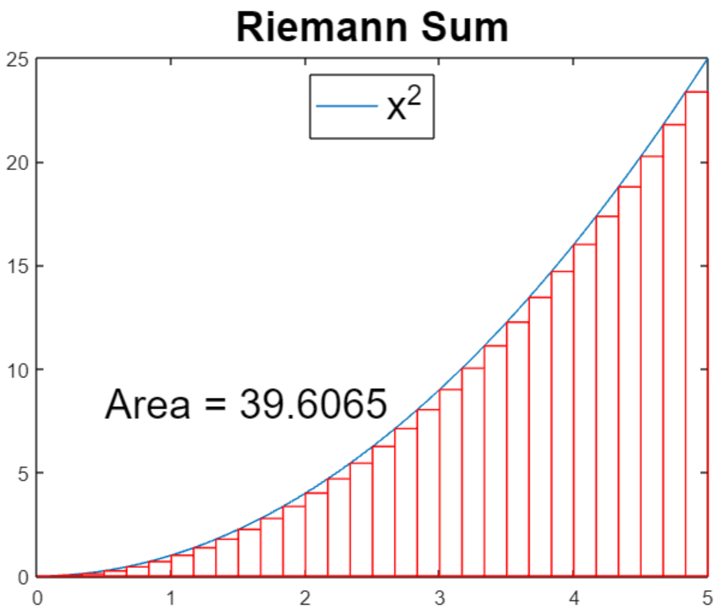


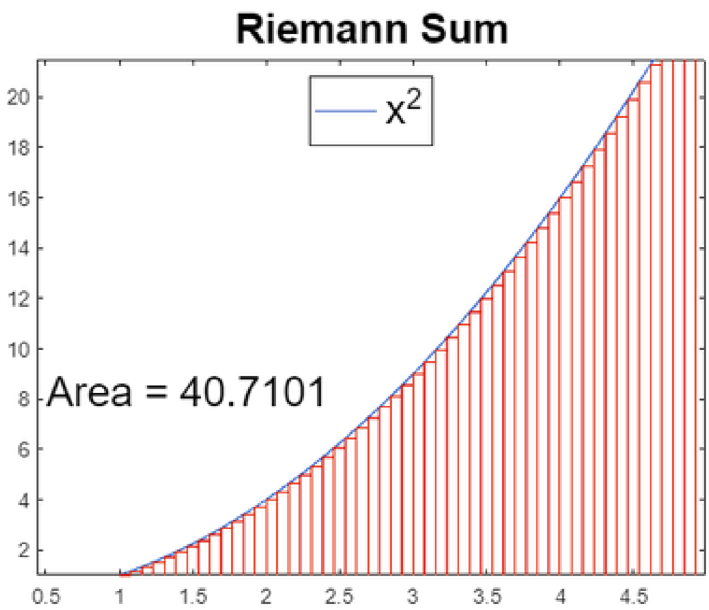


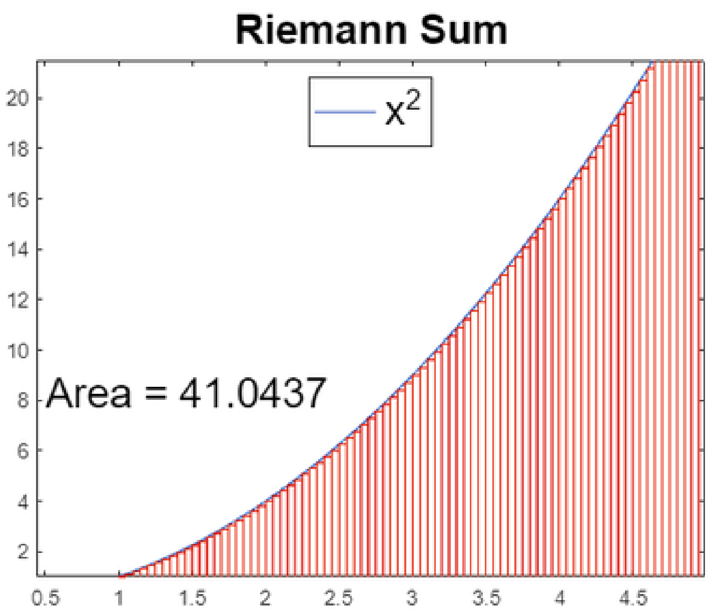
Παίρνοντας το $n \to \infty$ έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\ to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Παράδειγμα


Riemann Sum
x^2
Area = 39.6065


Riemann Sum
x^2
Area = 40.7101


Riemann Sum
x^2
Area = 41.0437

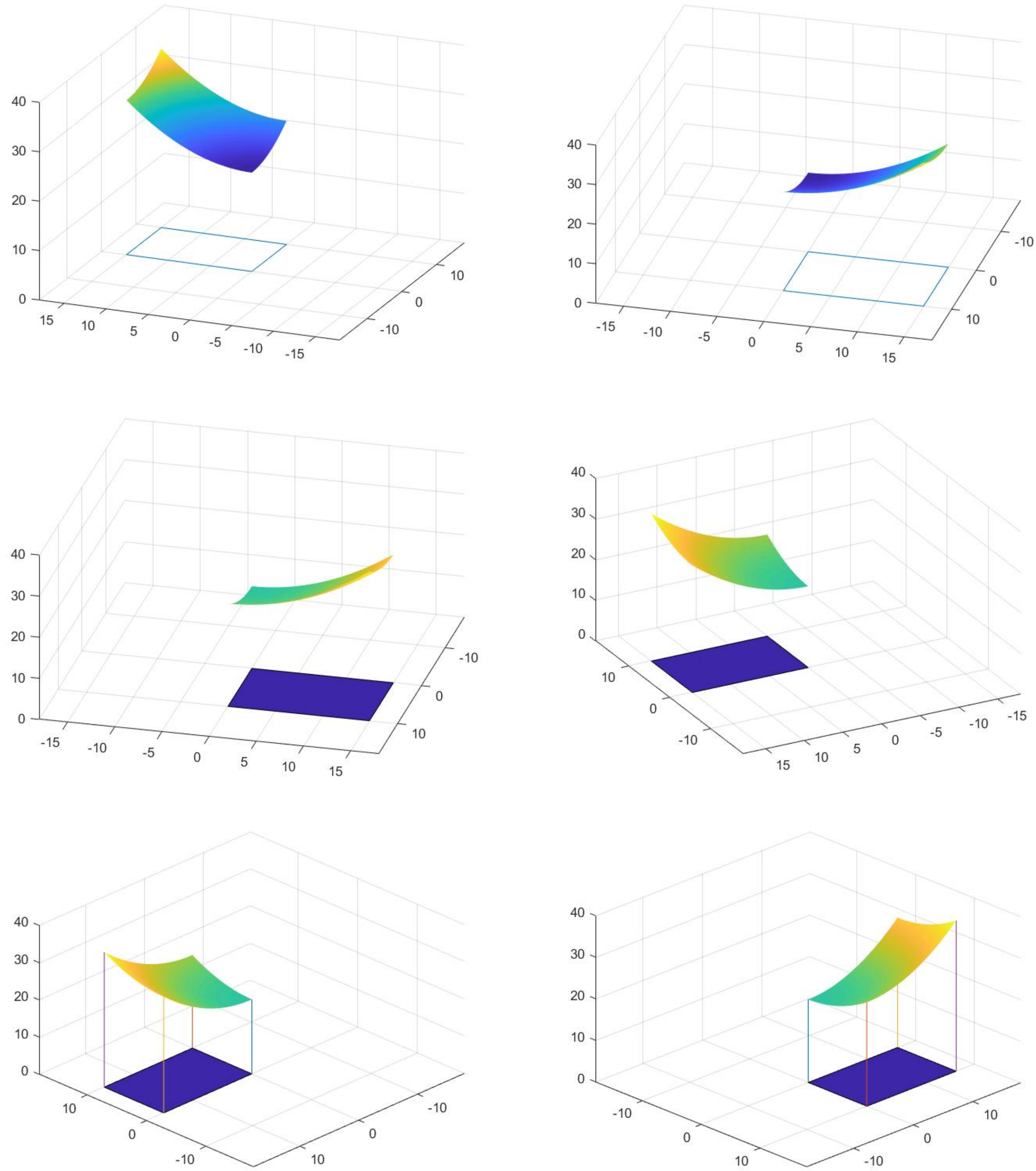
Ολοκλήρωση συναρτήσεων 2 μεταβλητών σε ορθογώνια

Αντίστοιχα με τη μία διάσταση, έστω f συνάρτηση 2 μεταβλητών με πεδίο ορισμού το κλειστό ορθογώνιο

$$R = [a,b] \times [c,d] = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\big\}\ ,$$

και υποθέτουμε ότι $f(x,y) \geqslant 0$. Το γράφημα της f είναι επιφάνεια με εξίσωση $z = f(x,y)$ και έστω S το στερεό που βρίσκεται ανάμεσα στο R και το γράφημα της f

$$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leqslant z \leqslant f(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}\big\}\ .$$

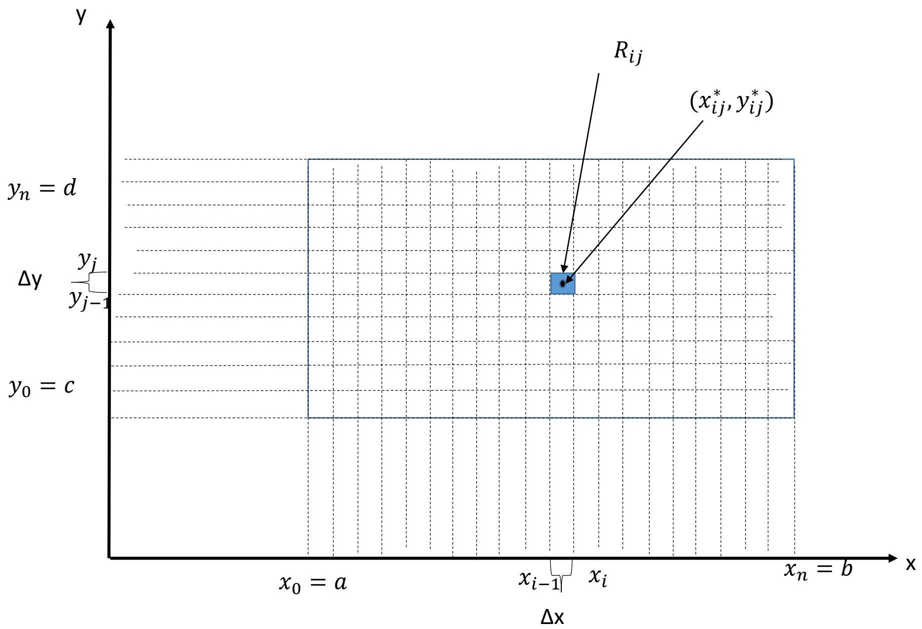


Σχήμα 1: $f(x,y) = 0.05x^2 + 0.05y^2 + 20$ στο ορθογώνιο $[0,10] \times [0,15]$

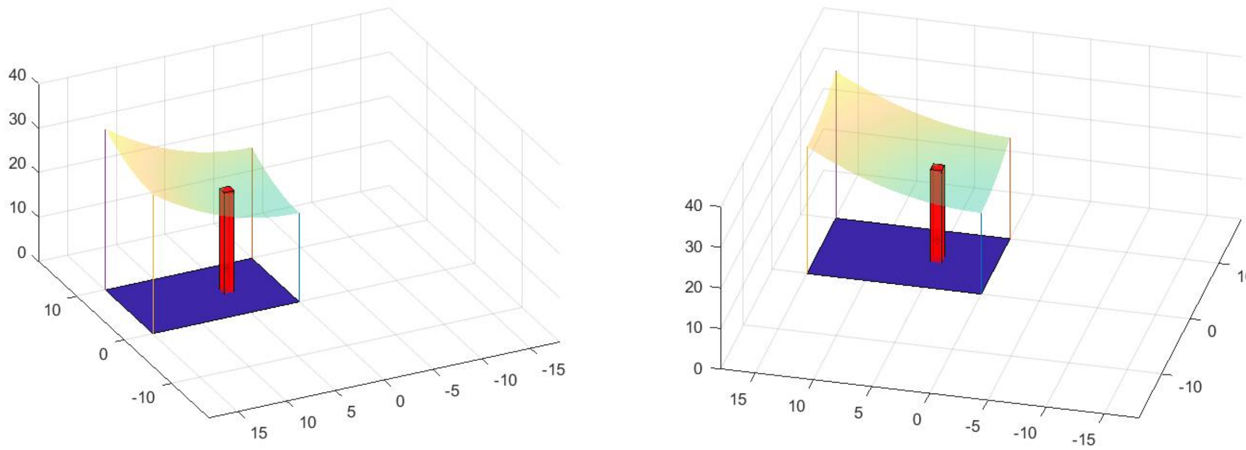
Όπως πήραμε διαμερίσεις για το $[a, b]$ αντίστοιχα εδώ αντί για υποδιαστήματα θα πάρουμε ϋποορθογώνια'

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) | x_{i=1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y_{j=1} \leqslant y \leqslant y_j\}\ ,$$

όπου θα είναι όλα ίσης επιφάνειας (εμβαδόν) $\Delta A = \Delta x \Delta y$.



Αν λοιπόν διαλέξουμε ένα (x_{ij}^*, y_{ij}^*) σε κάθε R_{ij} τότε μπορούμε να πάρουμε ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με βάση $\Delta A = \Delta x \Delta y$ και ύψος $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$.



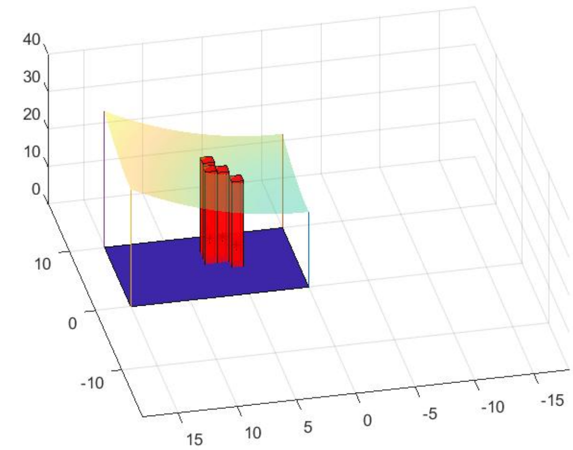
Σχήμα 2: Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με όγκο $V_{ij} = f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$

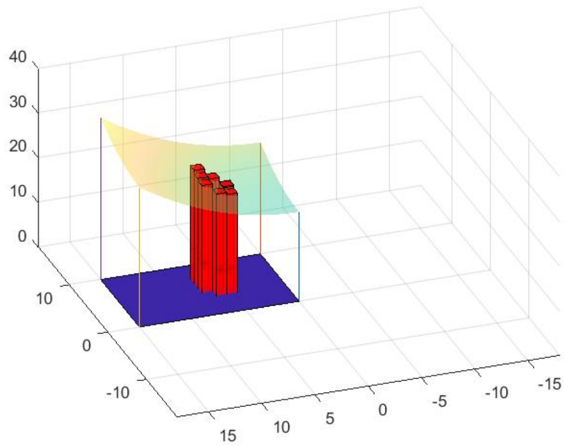
Παίρνοντας λοιπόν $n \cdot m$ υποορθογώνια παραλληλεπίπεδα προκύπτει

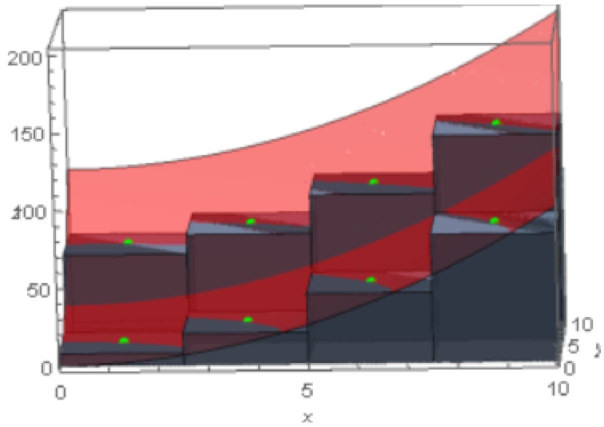
$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A\ .$$

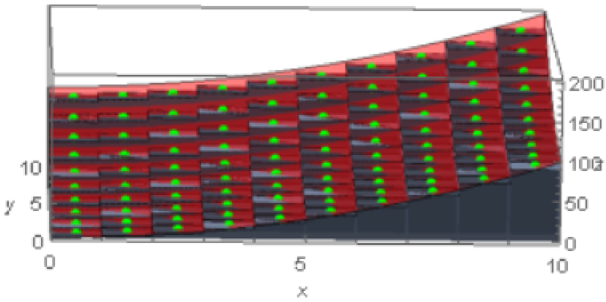
Οπότε για $m, n \to \infty$ (δεδομένου ότι το όριο θα υπάρχει) έχουμε

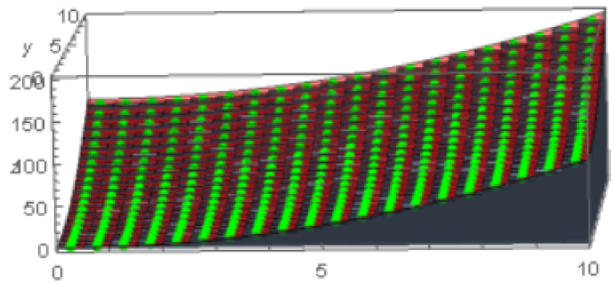
$$V = \iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A\ .$$

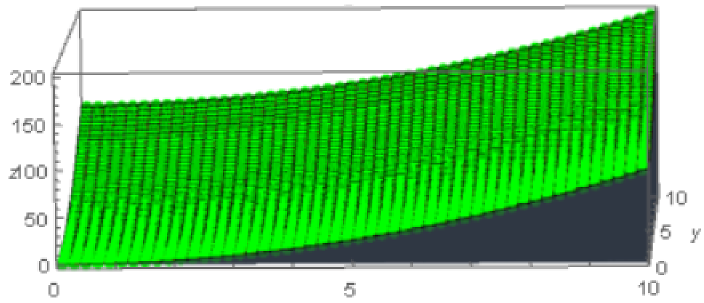












Ολοκλήρωση συναρτήσεων 2 μεταβλητών σε γενικά χωρία

Σε αντίθεση με την ολοκλήρωση συναρτήσεων μίας μεταβλητής, στην περίπτωση των 2 μεταβλητών θέλουμε να επεκτείνουμε το διπλό ολοκλήρωμα σε χωρία γενικότερα των ορθογωνίων.

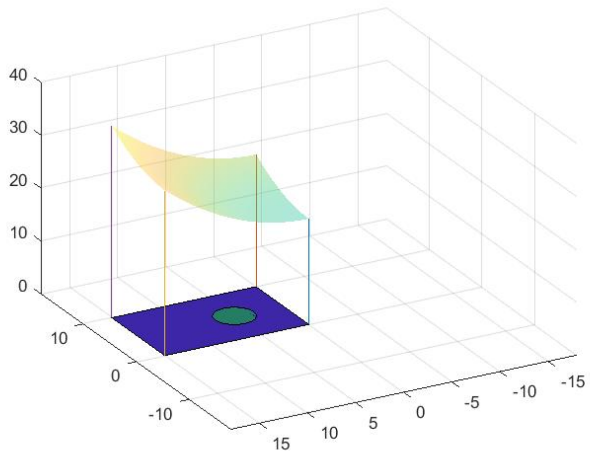
Έστω λοιπόν D φραγμένο $\subset \mathbb{R}^2$ δηλαδή $\exists$ R κλειστό ορθογώνιο τέτοιο ώστε $D \subset R$. Ορίζουμε μία νέα F στο R τέτοια ώστε

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) \ , & (x,y) \in D \ , \\ \quad 0 \ , & (x,y) \in R \setminus D \ . \end{cases}$$

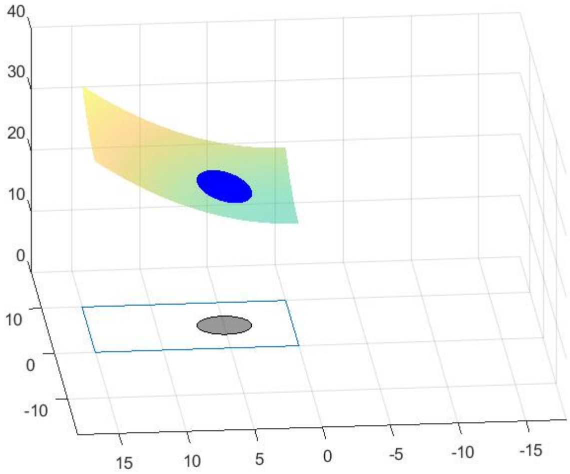
Επομένως δεδομένου ότι F ολοκληρώσιμη στο R έχουμε

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dA \ .$$

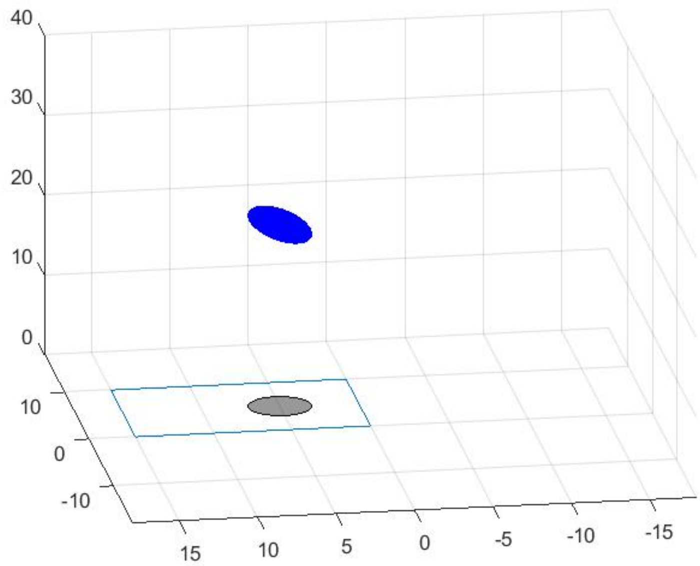
Όταν $f(x,y) \geqslant 0$ στο D, τότε το $\iint_D f(x,y)dA$ είναι ο όγκος του στερεού μεταξύ του γραφήματος της f και του χωρίου D.



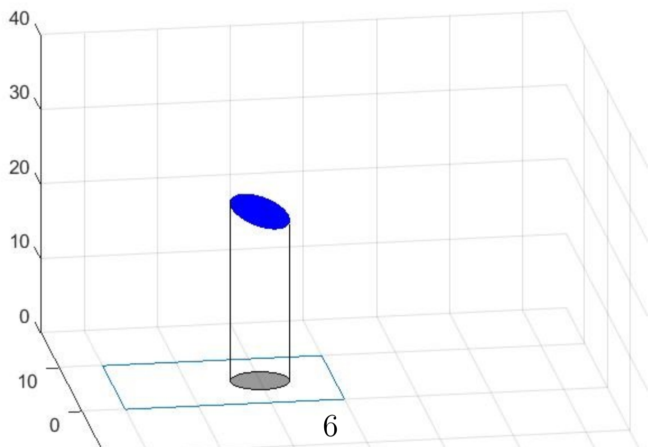
40
30
20
10
0
10
0
-10
15
10
5
0
-5
-10
-15



40
30
20
10
0
10
0
-10
15
10
5
0
-5
-10
-15



40
30
20
10
0
10
0
-10
15
10
5
0
-5
-10
-15



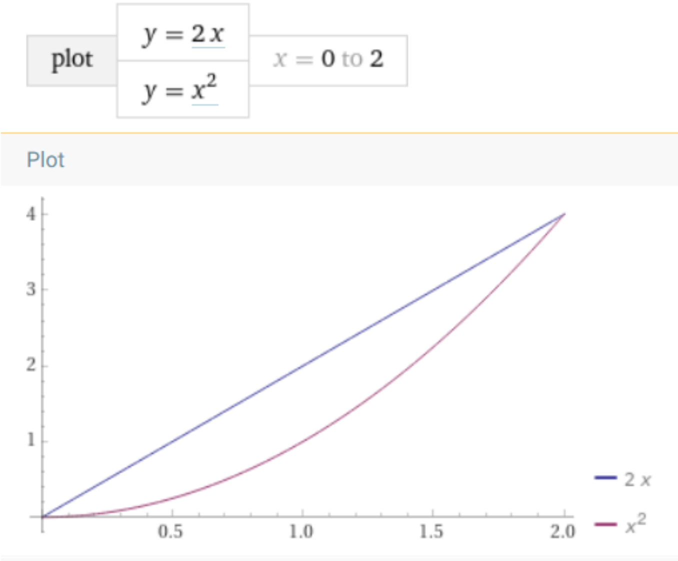
40
30
20
10
0
10
0

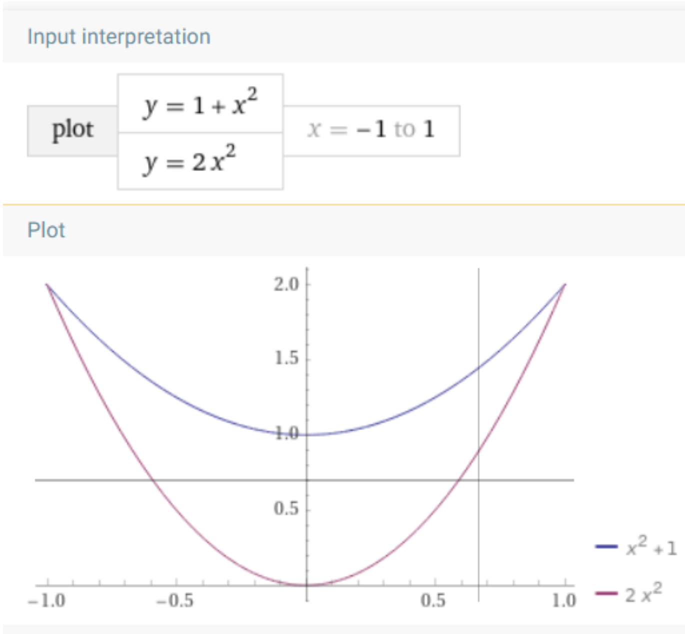
y απλή περιοχή

Έστω D φραγμένο και $R = [a, b] \times [c, d]$ τέτοιο ώστε $D \subset R$. Το D λέγεται y **απλό** αν αποτελείται από τα (x, y) τέτοια ώστε $x \in [a, b]$ και $\phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)$ όπου $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $\phi_1(x) \leqslant \phi_2(x)$ για $x \in [a, b]$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d F(x,y)dydx \overset{F=0 \text{ εκτός του } D}{=} \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx$$

Παραδείγματα



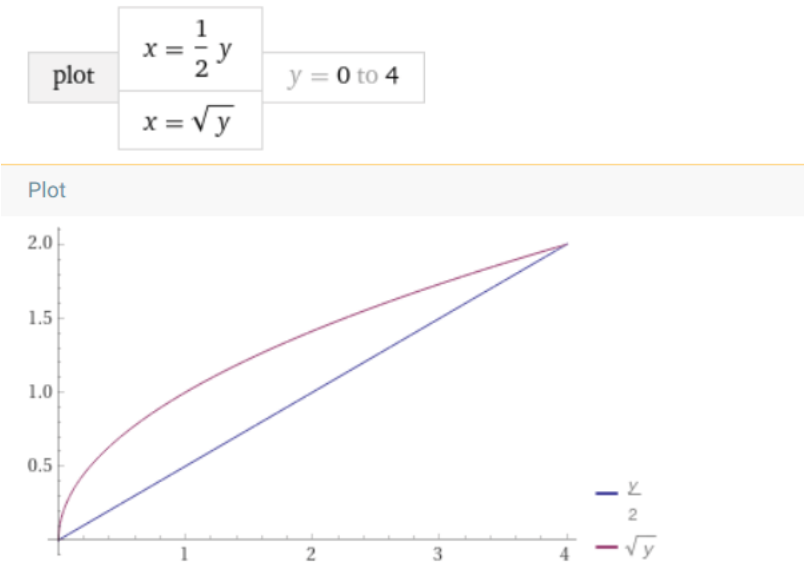


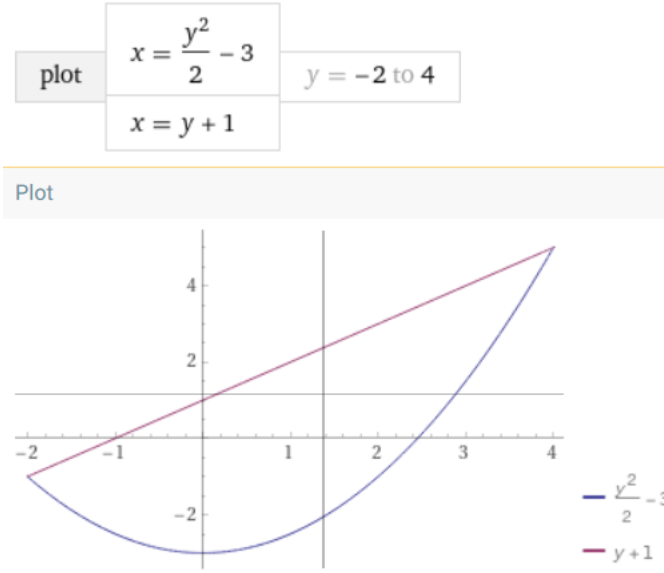
x απλή περιοχή

Έστω D φραγμένο και $R = [a, b] \times [c, d]$ τέτοιο ώστε $D \subset R$. Το D λέγεται x **απλό** αν αποτελείται από τα (x, y) τέτοια ώστε $y \in [c, d]$ και $\phi_1(y) \leqslant x \leqslant \phi_2(y)$ όπου $\phi_1, \phi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ με $\phi_1(y) \leqslant \phi_2(y)$ για $y \in [c, d]$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b F(x,y)dxdy \overset{F=0 \text{ εκτός του } D}{=} \int_c^d \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dxdy$$

Παραδείγματα





Στην περίπτωση που το χωρίο είναι και ξ απλό και ψ απλό (π.χ εικόνες 1 και 3 πάνω) τότε το χωρίο λέγεται **απλό**. Αν πάρουμε $f(x,y) = 1\ \forall (x,y) \in D$ τότε προκύπτουν:

- (y απλό) $\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx = \int_a^b [\phi_2(x) - \phi_1(x)]dx = A(D)$.
- (x απλό) $\int_c^d \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dydx = \int_c^d [\phi_2(y) - \phi_1(y)]dy = A(D)$.

Δηλαδή παίρνουμε το εμβαδόν του D. Επομένως $A(D) = \iint_D dA$.

Σημειώσεις:

- Τα x απλά και y απλά λέγονται και τύπου I, τύπου II και τύπου III αν είναι και τα δύο. Αναφέρονται επίσης και ως στοιχειώδη χωρία. Ένα στοιχειώδες χωρίο είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.
- Αποδεικνύεται ότι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα φραγένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ είναι ολοκληρώσιμη δεδομένου ότι το σύνορο του είναι μηδενικού μέτρου.
- Μία C^1 καμπύλη ή γενικότερα μία αριθμήσιμη ένωση C^1 καμπυλών είναι σύνολο μηδενικού μέτρου.
- **Θεώρημα**

  Έστω $f : R \to \mathbb{R}$ (R ορθογώνιο) φραγμένη. Αν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι σύνολο μηδενικού μέτρου τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R.
- Ένα σύνολο $D \subset \mathbb{R}^2$ λέγεται μετρήσιμο αν η $f(x,y) = 1$ για $(x,y) \in D$ είναι ολοκληρώσιμη στο D. Στην περίπτωση αυτή το εμβαδόν του D ορίζεται ως

  $$E(D) = \iint_D dA\ .$$

  (Η έννοια αυτή της μετρησιμότητας είναι κατά *Jordan* και διαφέρει από την μετρησιμότητα κατά *Lebesque*).
- Ένα φραγμένο χωρίο $S \subset \mathbb{R}^n$ είναι μετρήσιμο κατά *Jordan* αν και μόνο αν το σύνορο του είναι μηδενικού μέτρου.

- Στην πράξη είναι χρήσιμη η ακόλουθη πρόταση για ολοκληρωσιμότητα

  Πρόταση

  Έστω ότι το σύνορο ∂D ενός φραγμένου υποσυνόλου D του $\mathbb{R}^2$ είναι πεπερασμένη ένωση C^1 καμπυλών και $f : D \to \mathbb{R}$ φραγμένη, η οποία είτε είναι συνεχής είτε το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της είναι πεπερασμένη ένωση C^1 καμπυλών. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο D.

Θεώρημα

Έστω D φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $D_1, D_2, ..., D_n \subset D$ ξένα ανά δύο μεταξύ τους (ή η τομή τους ανά δύο είναι σύνολο μηδενικού μέτρου). Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ολοκληρώσιμη στα $D_1, D_2, ..., D_n$. Τότε f θα είναι ολοκληρώσιμη στο D και

$$\iint_D f dA = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f dA \ .$$

Η απόδειξη βασίζεται στην εξής πρόταση

Πρόταση

Έστω D φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ Και $D_1, D_2 \subset D$ τέτοια ώστε $D = D_1 \cup D_2$. Επιπλέον έστω $f : D \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν f είναι ολοκληρώσιμη στα $D_1, D_2, D_1 \cap D_2$ τότε είναι ολοκληρώσιμη και στο D Και ισχύει

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f - \iint_{D_1 \cap D_2} f \ .$$

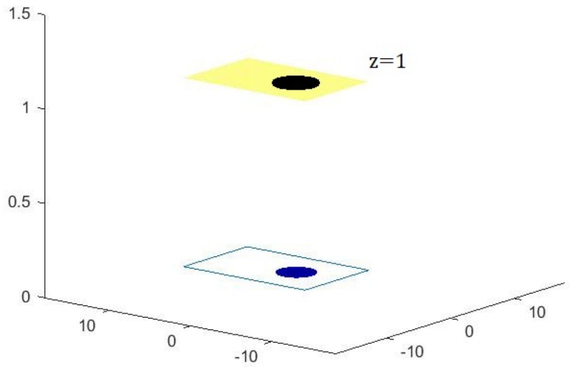
Αντίστροφα, αν f είναι ολοκληρώσιμη στο D και $\partial D_1, \partial D_2$ είναι μηδενικού μέτρου, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στα D_1 , D_2 και $D_1 \cap D_2$.

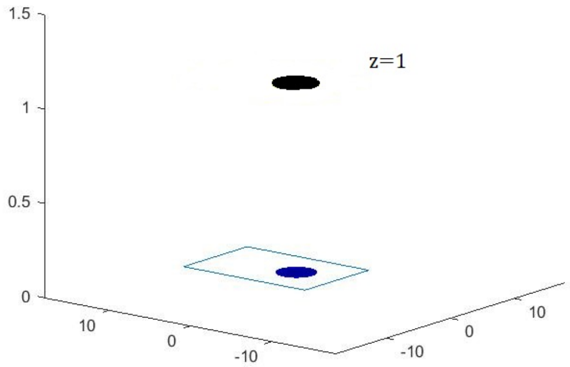
Εμβαδόν γενικού χωρίου με χρήση διπλού ολοκληρώματος

Έστω $f(x, y)$ ορισμένη σε ένα χωρίο D. Όπως αναφέραμε πιο πάνω το $\iint_D f(x, y)dA$ δίνει τον όγκο V του στερεού μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και του D. Επομένως για $f(x, y) = 1$ (άρα ύψος στερεού ίσο με 1) έχουμε $V = 1 \cdot A(D) = A(D)$. Άρα

$$\iint_D 1dA = A(D) \ .$$

Π.χ. αν πάρουμε το εμβαδόν βάσης ενός κυλίνδρου και το πολλ/με με ύψος 1 θα έχουμε $A(D) \cdot 1 = A(D)$ (βλέπε σχήμα)





Ασκήσεις

Άσκηση 3 κεφ. 5.3 Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα και σχεδιάστε την περιοχή D για κάθε περίπτωση. Προσδιορίστε αν τα χωρία είναι x-απλά ή y-απλά.

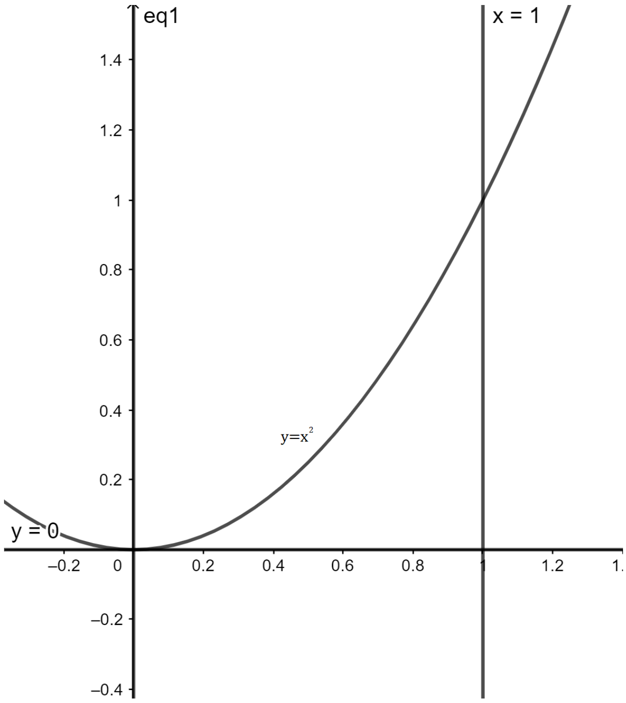
$$a)\ \int_0^1\int_0^{x^2} dydx \qquad b)\ \int_1^2\int_{2x}^{3x+1} dydx$$
$$c)\ \int_0^1\int_1^{e^x} (x+y)dydx \qquad d)\ \int_0^1\int_{x^3}^{x^2} ydydx\ .$$

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι

$$D = \left\{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ και } 0 \leqslant y = y(x) \leqslant x^2\right\} = \{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ και } \sqrt{y} \leqslant x \leqslant 1\}\ ,$$

επομένως το χωρίο είναι απλό (x-απλό και y-απλό).



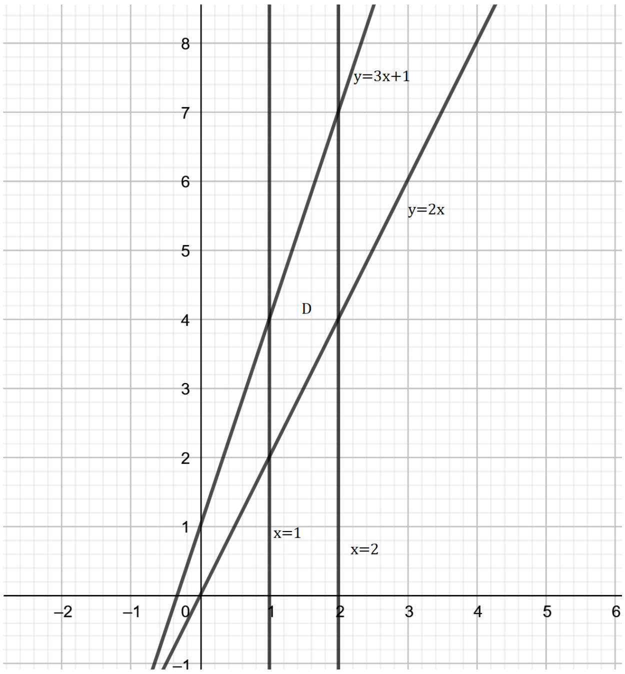
$$\iint_D 1dA = \int_0^1\int_0^{x^2} dydx = \int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 dxdy\ .$$

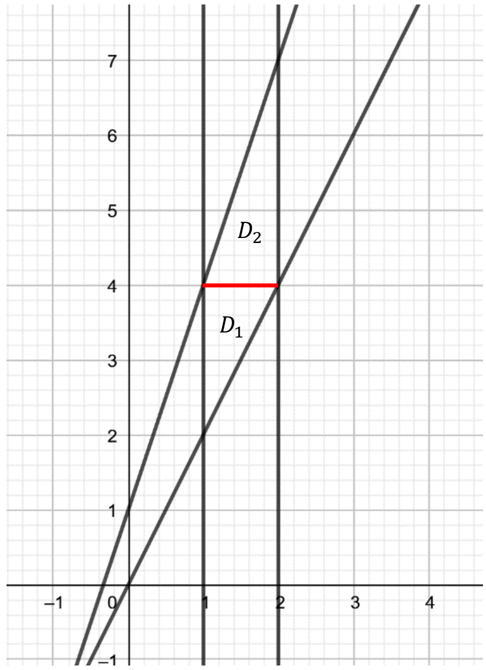
Επομένως Μπορούμε να πάρουμε όποια από τις δύο μορφές βολεύει περισσότερο

$$\int_0^1\int_0^{x^2} dydx = \int_0^1\int_0^{x^2} (y)'dydx = \int_0^1 [x^2-0]dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}\ .$$

β) Παρατηρούμε ότι

$$D = \{(x,y) : 1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ και } 2x \leqslant y = y(x) \leqslant 3x+1\}\ , \quad y \text{ απλό.}$$





Επομένως

$$\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dydx = \int_1^2 [3x+1-2x]dx = \int_1^2 (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x\Big|_1^2 = (\frac{4}{2}+2) - (\frac{1}{2}+1) = \frac{5}{2}$$

Μπορούμε ωστόσο να γράψουμε το D σαν την ένωση δύο x απλών χωρίων D_1 και D_2 όπως βλέπουμε και στο σχήμα όπου

$$D_1 = \left\{(x,y) : 2 \leqslant y \leqslant 4 \text{ και } 1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}y\right\}$$
$$D_2 = \left\{(x,y) : 4 \leqslant y \leqslant 7 \text{ και } \frac{y-1}{3} \leqslant x \leqslant 2\right\}$$

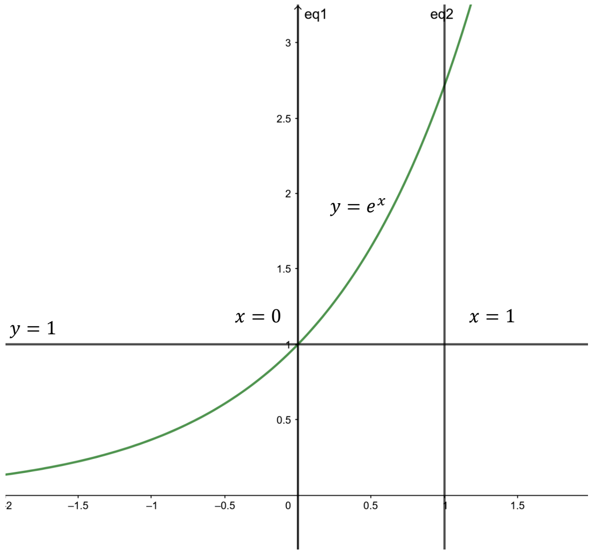
Οπότε $\iint_D dxdy = \iint_{D_1} dxdy + \iint_{D_2} dxdy$

$$\iint_{D_1} dxdy = \int_2^4 \int_1^{\frac{1}{2}y} dxdy = \int_2^4 [\frac{1}{2}y - 1]dy = \frac{1}{4}y^2 - y\Big|_2^4 = 1$$
$$\iint_{D_2} dxdy = \int_4^7 \int_{\frac{y-1}{3}}^2 dxdy = \int_4^7 \left[2 - \frac{y-1}{3}\right] dy = 2y - \frac{y^2}{6} + \frac{1}{3}y\Big|_4^7 = \frac{3}{2} \ ,$$

Άρα $\iint_D dxdy = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$.

c) Παρατηρούμε ότι

$$D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ και } 1 \leqslant y = y(x) \leqslant e^x\} \ , \quad y \text{ απλό.}$$



Ωστόσο το D είναι και x απλό καθώς

$$D = \{(x,y) : 1 \leqslant y \leqslant e \text{ και } lny \leqslant x = x(y) \leqslant 1\} \ , \quad x \text{ απλό}$$

Το e προέκυψε ως το σημείο τομής της $y = e^x$ και της $x = 1$. Άρα το D είναι απλό χωρίο (x απλό και y απλό).

• υπολογισμός ως y απλό:

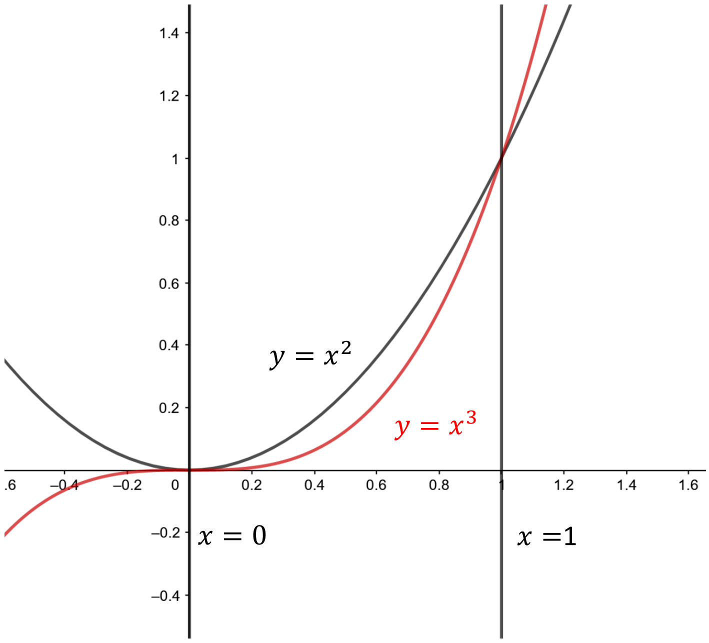
$$\iint_D (x+y)dydx = \int_0^1 \int_1^{e^x} (x+y)dydx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_1^{e^x} dx = \int_0^1 \left[xe^x + \frac{e^{2x}}{2} - x - \frac{1}{2}\right] dx$$
$$= xe^x - e^x + \frac{e^{2x}}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{e^2}{4} - 1 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{e^2-1}{4} \ .$$

• υπολογισμός ως x απλό:

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_1^e \int_{lny}^1 (x+y)dxdy = \int_1^e \left[\frac{x^2}{2} + yx\right]_{lny}^1 dy = \int_1^e \left[\frac{1}{2} + y - \frac{ln^2y}{2} - ylny\right] dy$$
$$= \left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}y(ln^2y - 2lny + 2) - \frac{1}{4}y^2(2lny - 1)\right]_1^e = \ldots = \frac{e^2-1}{4} \ .$$

d) Παρατηρούμε ότι

$$D = \left\{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ και } x^3 \leqslant y = y(x) \leqslant x^2\right\} \ , \quad y \text{ απλό.}$$



Το χωρίο D είναι και x απλό:

$$D = \{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ και } \sqrt[2]{y} \leqslant x = x(y) \leqslant \sqrt[3]{y}\} \ ,$$

• υπολογισμός ως x απλό:

$$\iint_D ydydx = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} ydydx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^3}^{x^2} dx = \int_0^1 \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{2}\right] dx = \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{14}\bigg|_0^1 = 1/10 - 1/14 = \frac{1}{35}$$

Το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα θα πάρουμε από το $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} ydxdy$.

Άσκηση 5 Κεφ 5.3

Με χρήση διπλών ολοκληρωμάτων να υπολογισθεί το εμβαδόν ενός κύκλικου δίσκου ακτίνας r.

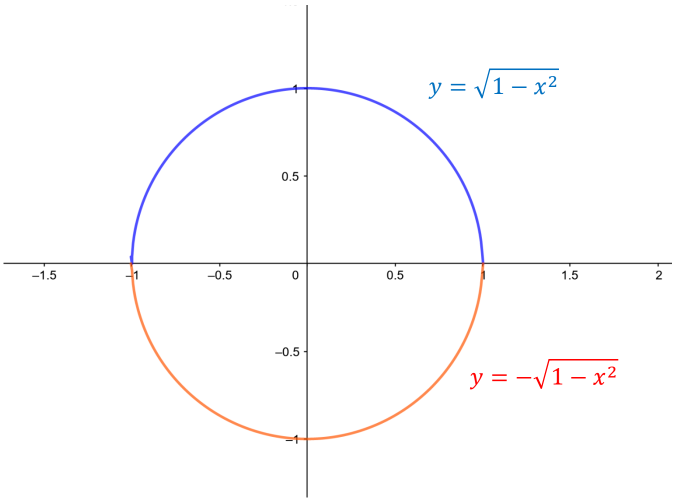
Λύση

Όπως αναφέραμε και στη θεωρία $A(D) = \iint_D 1dA$. Έχουμε $x^2 + y^2 = r^2$. Το χωρίο D είναι απλό (x y):

$$D = \left\{(x, y) : -r \leqslant x \leqslant r,\ -\sqrt{r^2 - x^2} \leqslant y = y(x) \leqslant \sqrt{r^2 - x^2}\right\}$$
$$D = \left\{(x, y) : -r \leqslant y \leqslant r,\ -\sqrt{r^2 - y^2} \leqslant x = x(y) \leqslant \sqrt{r^2 - y^2}\right\}$$

Διαλέγουμε όποιο από τα δύο θέλουμε (το ίδιο ακριβώς είναι και τα δύο σε αυτή την περίπτωση)

$$A(D) = \iint_D dydx = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dydx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx = ... = \pi r^2$$



Μπορούμε εδώ λόγω συμμετρίας του σχήματος από την αρχή να υπολογίσουμε το 1 τεταρτημόριο του κύκλου και να πάρουμε το αποτέλεσμα $\cdot 4$. Δηλαδή:

$$A(D) = 4\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dydx = 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx = 4\frac{\pi r^2}{4} = \pi r^2 \ .$$

Μπορούμε να αποφύγουμε όλες αυτές τις πράξεις άμα κάνουμε χρήση πολικών συντεταγμένων

$$x = rcos\theta \ , \quad dx = -rsin\theta d\theta$$
$$x \to 0 \ \Leftrightarrow \theta \to \pi/2 \ , \quad x \to r \ \Leftrightarrow \theta \to 0 \ ,$$

Επομένως

$$A(D) = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2cos^2\theta}(-rsin\theta)d\theta = 4\int_0^{\pi} \sqrt{r^2sin^2\theta}(-rsin\theta)d\theta \overset{sin\theta\geqslant 0 \ , \ \theta\in[0,\pi/2]}{=} 4\int_0^{\pi/2} r^2sin^2\theta d\theta$$
$$\overset{2sin^2\theta=1-cos2\theta}{=} 2\int_0^{\pi/2} r^2(1-cos2\theta)d\theta = 2\left(r^2\theta - \frac{r^2}{2}sin2\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} = \pi r^2 \ .$$

Άσκηση 6 Κεφ. 5.3

Με χρήση διπλών ολοκληρωμάτων να υπολογιστεί το εμβαδόν έλλειψης με ημιάξονες μήκους a και b.

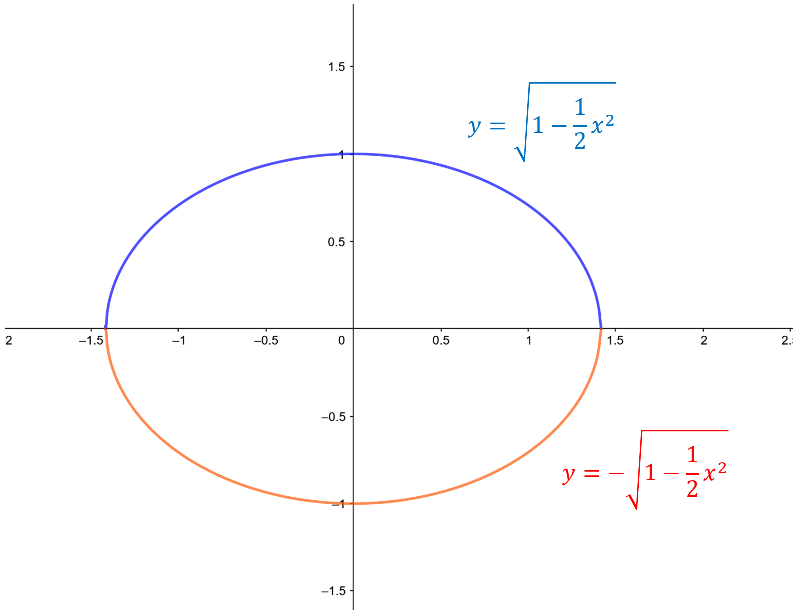
Λύση

Όπως αναφέραμε και στη θεωρία $A(D) = \iint_D 1dA$. Έχουμε $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ η εξίσωση της έλλειψης. Το χωρίο D είναι απλό $(x \ y)$:

$$D = \left\{(x,y) : -a \leqslant x \leqslant a, \ -\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} \leqslant y = y(x) \leqslant \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}\right\}$$
$$D = \left\{(x,y) : -b \leqslant y \leqslant b, \ -\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2} \leqslant x = x(y) \leqslant \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2}\right\}$$

Διαλέγουμε όποιο από τα δύο θέλουμε

$$A(D) = \iint_D dydx = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}}^{\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}} dydx = 2\int_{-a}^{a} \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}dx = \ldots = \pi ab$$



Όπως και στην άσκηση 5 έτσι κ εδώ θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες (διαφορετική ακτίνα για x και y)

$$x = acos\theta \ , \quad y = bsin\theta \ , \quad dx = -asin\theta d\theta$$
$$x \to -a \ \Rightarrow \ \theta \to -\pi \ , \quad x \to a \ \Rightarrow \ \theta \to 0$$

Οπότε πάμε στο τελευταίο ολοκλήρωμα πάνω και έχουμε

$$2\int_{-a}^{a}\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}dx = 2\int_{-\pi}^{0}\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}(a^2cos^2\theta)}(-asin\theta)d\theta = 2\int_{-\pi}^{0}\sqrt{\beta^2 sin^2\theta)}(-asin\theta)d\theta$$
$$\overset{sin\theta\leqslant 0 \ , \ \theta\in[-\pi,0]}{=} 2b\int_{-\pi}^{0}(-sin\theta)(-asin\theta)d\theta = 2ab\int_{-\pi}^{0}sin^2\theta d\theta \overset{2sin^2\theta=1-cos2\theta}{=} \int_{-\pi}^{0}ab(1-cos2\theta)d\theta$$
$$= ab\theta - \frac{ab}{2}sin2\theta\Big|_{-\pi}^{0} = \pi ab \ .$$

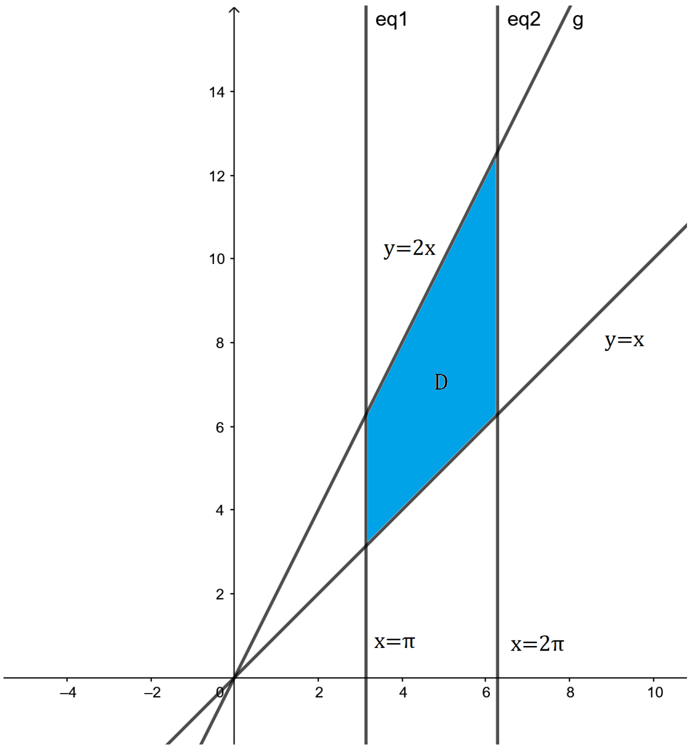
Άσκηση 12 Κεφ 5.3

Να υπολογισθεί το ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D cosydxdy \ ,$$

όπου D η περιοχή που περιβάλλεται από τις ευθείες $y = x$, $y = 2x$, $x = \pi$ και $x = 2\pi$.

Λύση



Το D είναι x και y απλό.

$D = \{(x, y) : \pi \leqslant x \leqslant 2\pi \ , \ x \leqslant y = y(x) \leqslant 2x\}$ (y απλό)
$D = \{(x, y) : \pi \leqslant y \leqslant 2\pi \ , \ \pi \leqslant x = x(y) \leqslant y\} \cup \left\{(x, y) : 2\pi \leqslant y \leqslant 4\pi \ , \ \dfrac{y}{2} \leqslant x = x(y) \leqslant 2\pi\right\}$ (x απλό)

Επειδή η άσκηση είναι στο κεφ 5.3 (πριν το $Fubini$) και δίνει $dxdy$ στην εκφώνιση θα ξεκινήσουμε με το x απλό όπου θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα $\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy$.

$$\iint_{D_1} cosydxdy = \int_\pi^{2\pi} \int_\pi^y cosydxdy = \int_\pi^{2\pi} [xcosy]_\pi^y \, dy = \int_\pi^{2\pi} [ycosy - \pi cosy] \, dy$$
$$= ysiny\Big|_\pi^{2\pi} - \int_\pi^{2\pi} sinydy - \int_\pi^{2\pi} \pi cosydy = 0 - 0 - (-cosy)\Big|_\pi^{2\pi} - \pi siny\Big|_\pi^{2\pi} = 2 \ .$$

$$\iint_{D_2} cosydxdy = \int_{2\pi}^{4\pi} \int_{y/2}^{2\pi} cosydxdy = \int_{2\pi}^{4\pi} [xcosy]_{y/2}^{2\pi} \, dy = \int_{2\pi}^{4\pi} \left[2\pi cosy - \frac{y}{2}cosy\right] dy$$
$$2\pi siny\Big|_{2\pi}^{4\pi} - \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} ycosydy = 0 - \frac{1}{2}\left[\cancelto{0}{ysiny\Big|_{2\pi}^{4\pi}} - \int_{2\pi}^{4\pi} sinydy\right] = ... = 0 \ .$$

Άρα $\iint_D cosydxdy = 2 + 0 = 2$.

Αν πάμε με τη y απλή μορφή έχουμε:

$$\iint_D cosydxdy = \int_{\pi}^{2\pi}\int_{x}^{2x} cosydydx = \int_{\pi}^{2\pi} [siny]_x^{2x}\, dx = \int_{\pi}^{2\pi} [sin2x - sinx]\, dx = \left[-\frac{1}{2}cos2x + cosx\right]_{\pi}^{2\pi}$$
$$= -1/2 + 1/2 + 1 - (-1) = 2\ .$$

Άσκηση 2 φυλλάδιο 8

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

i) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\, dydx\ .$

ii) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \int_y^1 x^3 y e^{xy^2}\, dxdy\,.$

iii) $I_3 = \displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dydx\,.$

iv) $I_4 = \displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dydx}{y^4+1}\ .$

Λύση

i) Έχουμε ότι $0 \le x \le 1$ και $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$. Θα κάνουμε αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης.

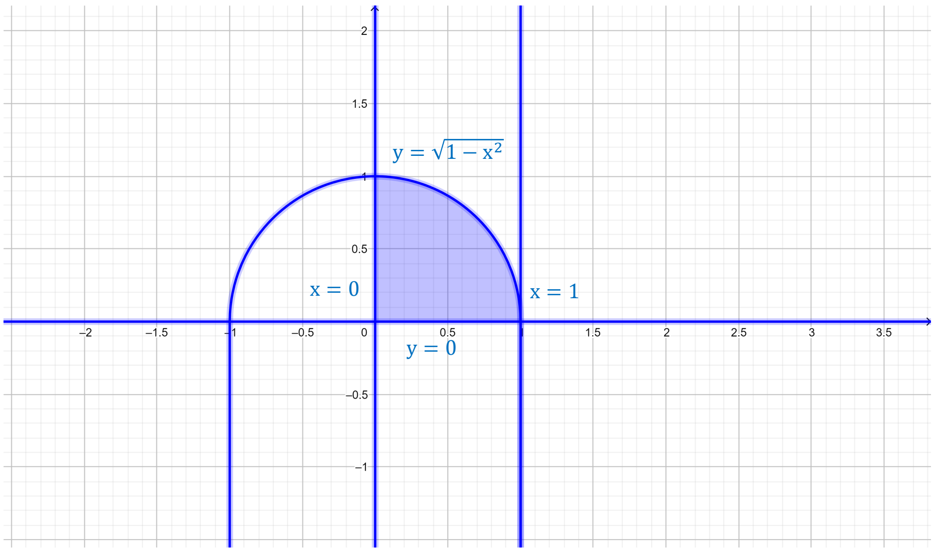
Επομένως $0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \le \sqrt{1-0} = 1$ δηλαδή $0 \le y \le 1$

και $y \le \sqrt{1-x^2} \overset{y\ge 0}{\Longrightarrow} y^2 \le 1-x^2 \ \Rightarrow\ x^2 \le 1-y^2 \overset{x\ge 0}{\Longrightarrow} x \le \sqrt{1-y^2}$

δηλαδή $0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$.

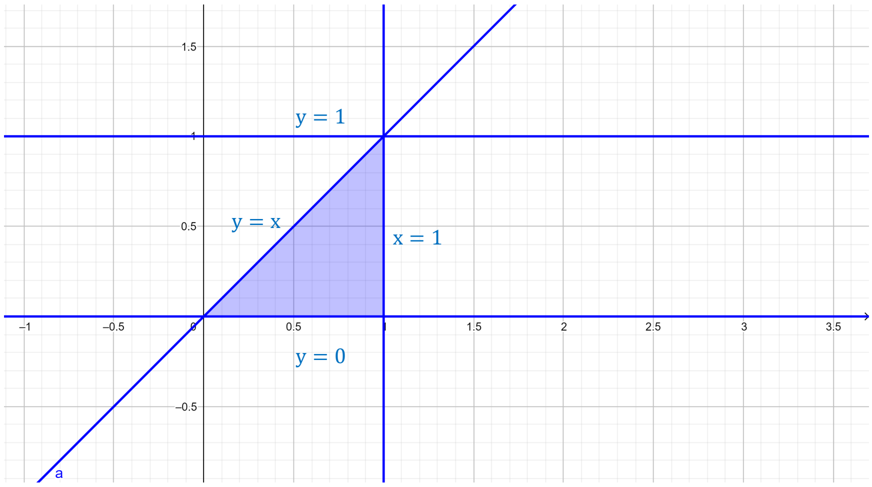
Οπότε

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\, dydx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\, dxdy \\
&= \int_0^1 \left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dxdy = \int_0^1 \left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}} [x]_0^{\sqrt{1-y^2}}\, dy \\
&= \int_0^1 \left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}} \left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}\, dy = \int_0^1 \left(1-y^2\right)^2\, dy \\
&= \int_0^1 \left(y^4 - 2y^2 + 1\right)\, dy = \left[\frac{y^5}{5} - 2\frac{y^3}{3} + y\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{8}{15}\ .
\end{aligned}$$



ii) Έχουμε ότι $0 \leq y \leq 1$ και $y \leq x \leq 1$. Θα κάνουμε αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης.

Επομένως $0 \leq y \leq x \leq 1$ δηλαδή $0 \leq x \leq 1$ και $0 \leq y \leq x$.



Οπότε

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \int_y^1 x^3 y e^{xy^2}\, dxdy = \int_0^1 \int_0^x x^3 y e^{xy^2}\, dydx = \int_0^1 x^3 \int_0^x y e^{xy^2}\, dydx \\
&= \int_0^1 x^3 \left[\frac{e^{xy^2}}{2x}\right]_0^x dx = \int_0^1 x^3 \frac{1}{2x}\left(e^{x^3}-1\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 e^{x^3} - x^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left((e-1)-(1-0)\right) = \frac{e-2}{6}\,.
\end{aligned}
$$

Όπου χρησιμοποιήθηκαν οι $\frac{\partial\left(e^{xy^2}/2x\right)}{\partial y} = \frac{1}{2x} 2xye^{xy^2} = ye^{xy^2}$ και $(e^{x^3})' = 3x^2 e^{x^3}$.

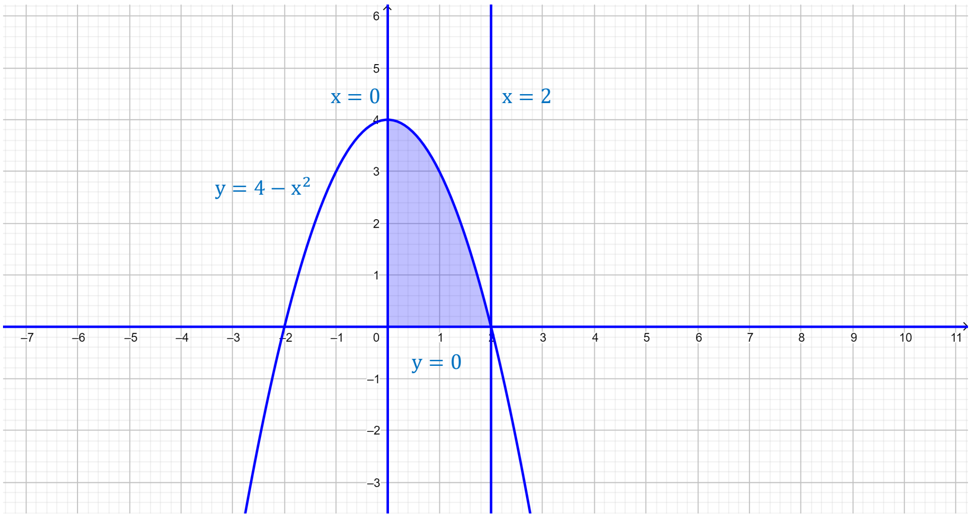
iii) Έχουμε ότι $0 \leq x \leq 2$ και $0 \leq y \leq 4 - x^2$. Θα κάνουμε αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης.

Επομένως $0 \leq y \leq 4 - x^2 \leq 4 - 0 = 4$ δηλαδή $0 \leq y \leq 4$

και $y \leq 4 - x^2 \ \Rightarrow x^2 \leq 4 - y \ \xRightarrow{x \geq 0} \ x \leq \sqrt{4-y}$, δηλαδή $0 \leq x \leq \sqrt{4-y}$.

Οπότε

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dydx = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dxdy = \int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y} \int_0^{\sqrt{4-y}} x\, dxdy \\ &= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-y}} dy = \int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y} \frac{4-y}{2}\, dy = \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2}\, dy = \left[\frac{e^{2y}}{4}\right]_0^4 = \frac{e^8-1}{4}\, , \end{aligned}$$



iv) Έχουμε ότι $0 \leq x \leq 8$ και $\sqrt[3]{x} \leq y \leq 2$. Θα κάνουμε αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης.

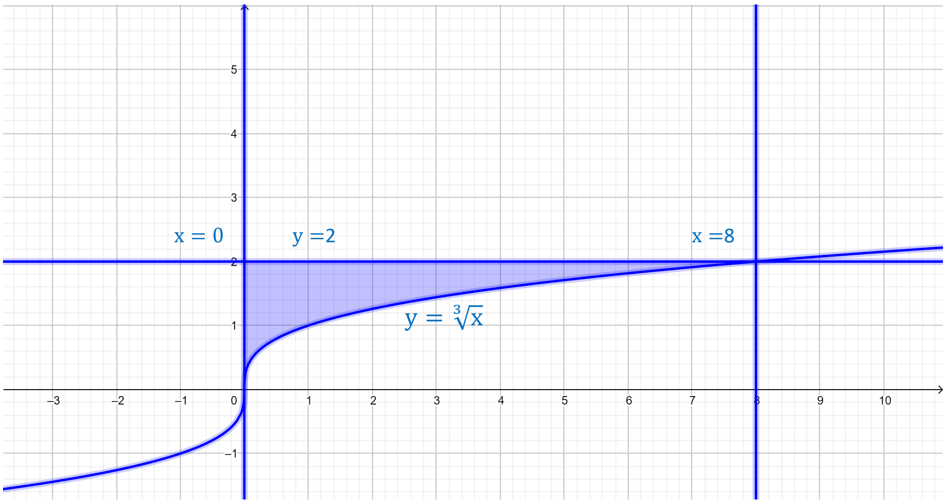
Επομένως $0 \leq \sqrt[3]{x} \leq y \leq 2$, δηλαδή $0 \leq y \leq 2$

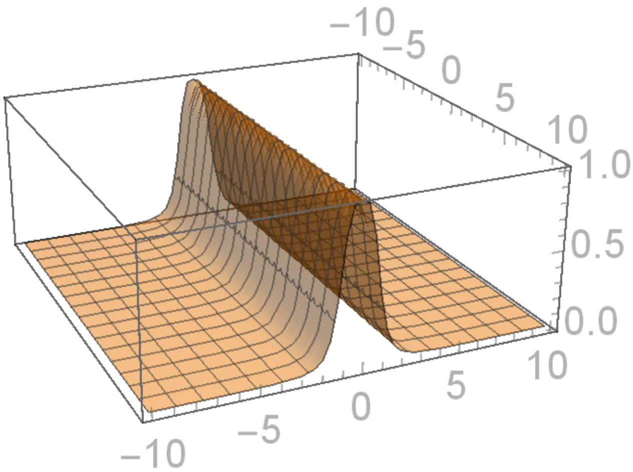
και $\sqrt[3]{x} \leq y \ \Rightarrow x \leq y^3$, άρα τελικ $0 \leq x \leq y^3$.

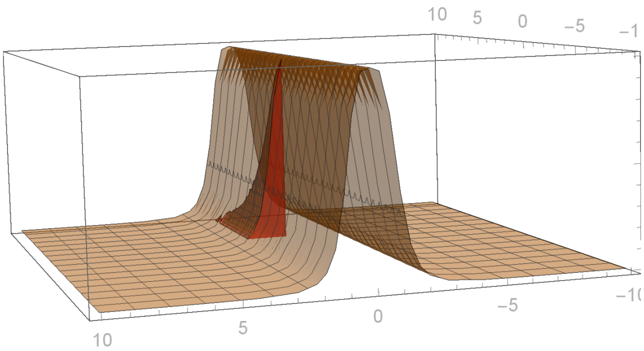
Οπότε

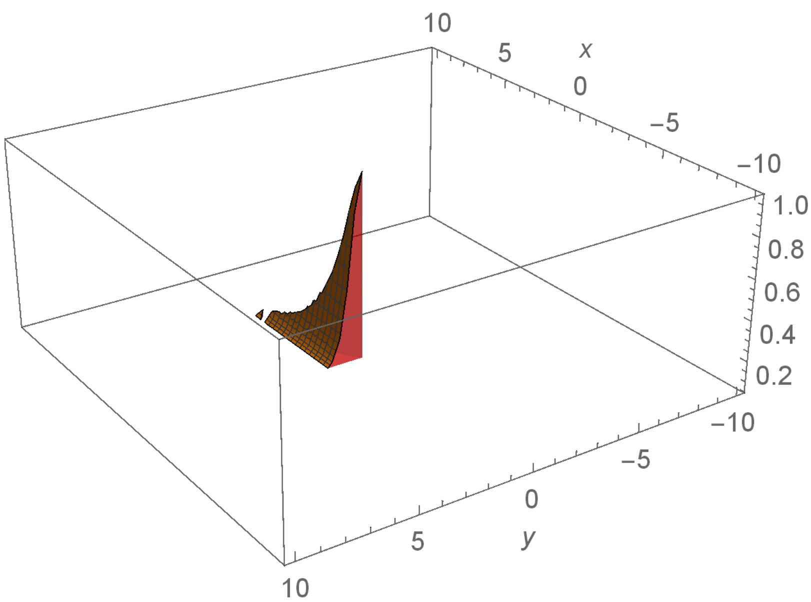
$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\, dydx = \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\, dxdy = \int_0^2 \frac{1}{y^4+1} \int_0^{y^3} dxdy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{y^4+1} \left[x\right]_0^{y^3} dx = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1}\, dx = \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{4y^3}{y^4+1}\, dx = \frac{1}{4} \left[ln(y^4+1)\right]_0^2 = \frac{1}{4} ln(17)\ . \end{aligned}$$

Όπου χρησιμοποιήθηκε η $(ln(y^4+1))' = \dfrac{(y^4+1)'}{y^4+1} = \dfrac{4y^3}{y^4+1}$.


x = 0
y =2
x =8
y = $\sqrt[3]{x}$






x
y

Άσκηση 3 φυλλάδιο 8

Βρείτε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από κάτω από το xy επίπεδο, από πάνω από την επιφάνεια $z = 1 + x^2$ και από τα πλάγια από το επίπεδο $y = x$ και την επιφάνεια $y = 2 - x^2$.

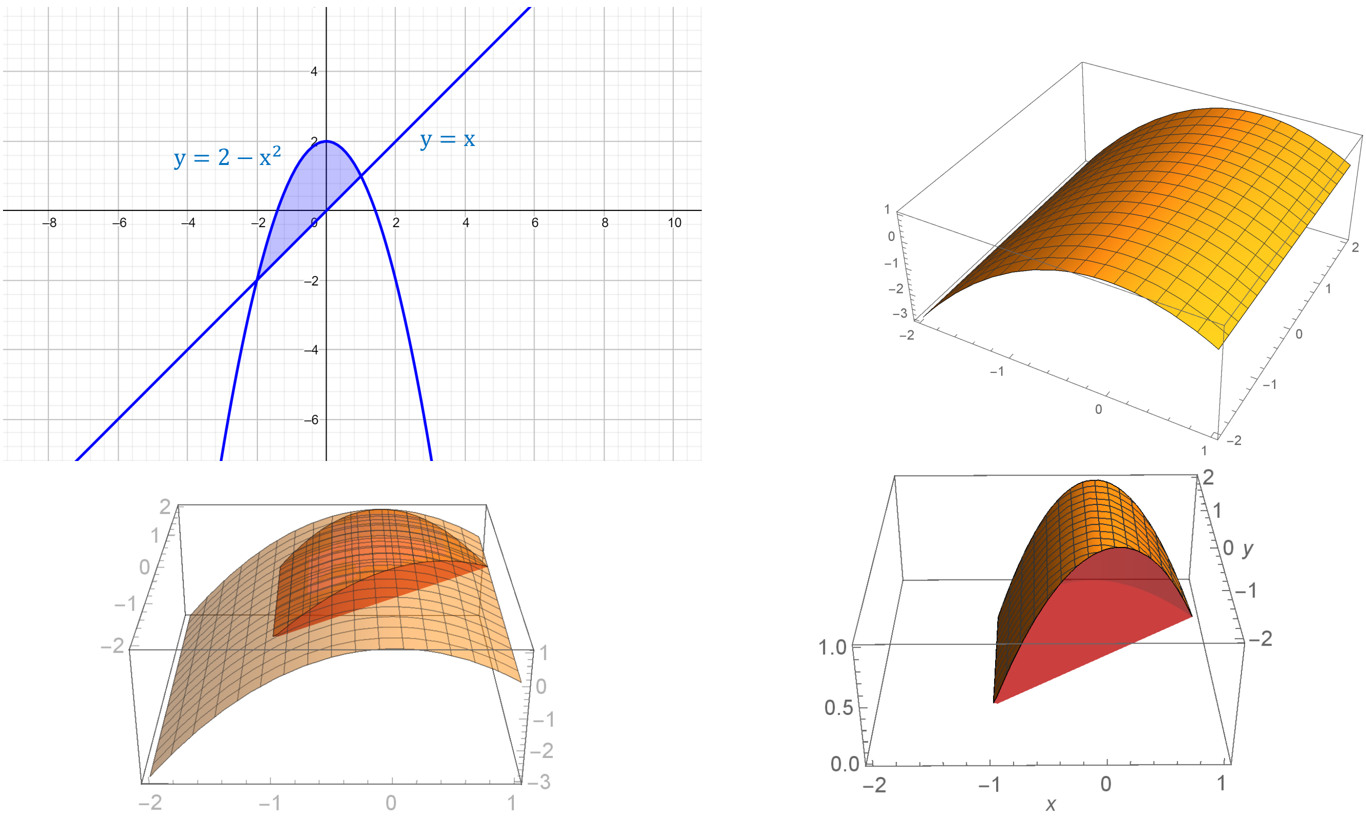
Λύση

Έχουμε να υπολογίσουμε τον όγκο $V = \iint_D ((1 - x^2))\, dxdy$, όπου D το χωρίο του παρακάτω σχήματος.

Τα σημεία τομής των καμπυλών $y = x$ και $y = 2 - x^2$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x = 2 - x^2$ $\Rightarrow$ $x^2 + x - 2 = 0$ $\Rightarrow$ δηλαδή τα $x = -2$, $x = 1$.

Επομένως

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D (1 - x^2)\, dxdy = \int_{-2}^{1} \int_{x}^{2-x^2} (1 + x^2)\, dydx = \int_{-2}^{1} (1 + x^2) \int_{x}^{2-x^2} dydx \\
&= \int_{-2}^{1} (1 + x^2)(2 - x^2 - x)\, dx = \int_{-2}^{1} \left(-x^4 - x^3 + x^2 - x + 2\right) dx \\
&= \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} \\
&= \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(-\frac{(-2)^5}{5} - \frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2(-2) \right) \\
&= \frac{153}{20} \, .
\end{aligned}
$$



Σχήμα 3: Όγκος στερεού μεταξύ $z = 0$ και $z = 1 - x^2$ για $x \leqslant y \leqslant 2 - x^2$ και $-2 \leqslant x \leqslant 1$

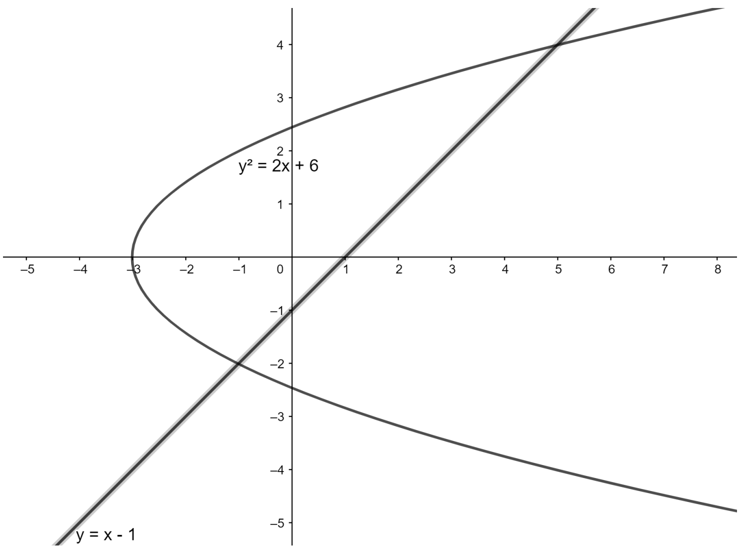
Φροντιστηριακό Μάθημα 10-12-2021

Διπλά Ολοκληρώματα

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_D xydA$ όπου D το χωρίο που φράσσεται από την ευθεία $y = x - 1$ και την παραβολή $y^2 = 2x + 6$.

Λύση



Αρχικά πρέπει να βρούμε τα 2 σημεία τομής των 2 καμπυλών.

$$\begin{cases} y^2 = 2x + 6 \\ y = x - 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \; y^2 = 2(y+1) + 6 \; .$$

Λύνουμε το πολυώνυμο 2ου βαθμού ως προς y και αντικαθιστούμε σε μία από τις δύο εξισώσεις για να βρούμε και το x. Προκύπτουν λοιπόν τα σημεία $(-1, 2)$ και $(5, 4)$. Το χωρίο είναι απλό (x και y). Ωστόσο είναι ευκολότερο να το εκφράσουμε ως x απλό.

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leqslant y \leqslant 4 \; , \; -3 + \frac{y^2}{2} \leqslant x = x(y) \leqslant y + 1 \right\} \; .$$

Σε αυτήν την περίπτωση το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

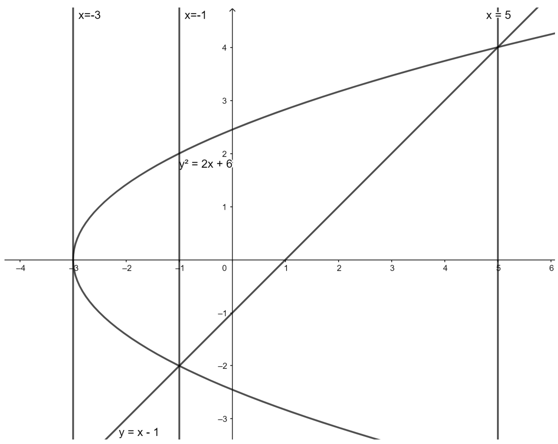
$$\iint_D xydA = \int_{-2}^{4} \int_{\frac{1}{2}y^2 - 3}^{y+1} xydxdy = \int_{-2}^{4} \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} = \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} y \left[(y+1)^2 - (\frac{1}{2}y - 2)^2 \right] dy$$

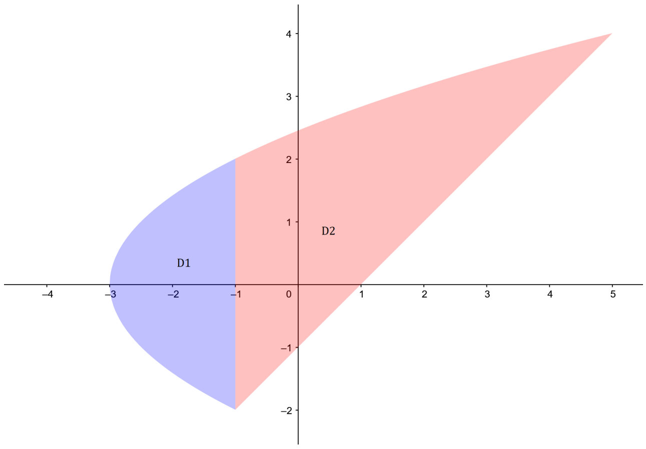
$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} \left(-\frac{y^3}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y \right) dy = \frac{1}{2} \left[\frac{-y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2 \right]_{-2}^{4} = 36 \; .$$

Στην περίπτωση που θέλαμε να το εκφράσουμε ως y απλό θα πρέπει να το χωρίσουμε σε 2 y απλά χωρία. Συγκεκριμένα $-3 \leqslant x \leqslant 4+1=5$. Όμως για $-3 \leqslant x \leqslant -2+1=-1$ παρατηρούμε ότι το y φράσσεται μόνο από την παραβολή $y^2 = 2x+6$ (από κάτω από την $-\sqrt{2x+6}$ και από πάνω από την $\sqrt{2x+6}$). Αντίστοιχα για $-1 \leqslant x \leqslant 5$ βλέπουμε ότι $x-1 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x+6}$. Επομένως

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \ -3 \leqslant x \leqslant -1 \ , \ -\sqrt{2x+6} \leqslant y = y(x) \leqslant \sqrt{2x+6}\right\} \ , \quad (\text{μπλε χρώμα})$$

$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \ -1 \leqslant x \leqslant -5 \ , \ x-1 \leqslant y = y(x) \leqslant \sqrt{2x+6}\right\} \ , \quad (\text{κόκκινο χρώμα}).$$





Η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στα D_1, D_2 και $D_1 \cup D_2$ και ισχύει ότι $\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$.

- $$\iint_{D_1} xydA = \int_{-3}^{-1}\int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xydydx = \int_{-3}^{-1}\left[x\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} dx = 0 \ , \quad \text{τι σημαίνει αυτό;;} \ .$$

- $$\iint_{D_2} xydA = \int_{-1}^{5}\int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xydydx = \int_{-1}^{5}\left[x\frac{y^2}{2}\right]_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} dx = \int_{-1}^{5}\left[x\frac{1}{2}\left((2x+6)-(x-1)^2\right)\right] dx$$
$$= \int_{-1}^{5}\frac{x}{2}\left(-x^2+4x+5\right)dx = \int_{-1}^{5}\left(-\frac{x^3}{2}+2x^2+\frac{5}{2}x\right)dx = \left[-\frac{x^4}{8}+\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{4}x^2\right]_{-1}^{5} = 36 \ .$$

Επομένως $\iint_D xydA = 0 + 36 = 36$.

Σημείωση: Τι σημαίνει ότι το $\iint_{D_1} xydydx = 0$; Σημαίνει ότι είτε (1) η συνάρτηση δεν υπάρχει στο D είτε (2) ότι η συνάρτηση παρουσιάζει συμμετρία σε αυτό (ως προς τον άξονα x εδώ). Επειδή η άσκηση ζητάει μόνο τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος και όχι κάποιον όγκο στερεού δεν υπάρχει κάποιο λάθος εδώ. Αν όμως ζητούσε τον όγκο του στερεού τότε θα έπρεπε να υπολογισθεί ένα από τα συμμετρικά κομμάτια και στο τέλος $\cdot 2$.

Άσκηση 2

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια $y^2\sqrt{x}$, και μεταξυ τών $y = x^2$ και $y = 10 - x^2$ για $x \geqslant 0$.

Λύση

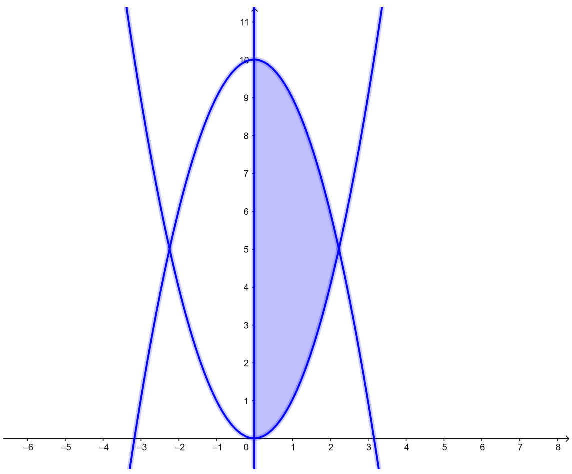
Αρχικά θα βρούμε το σημείο τομής των δύο καμπυλών $y = x^2$ και $y = 10 - x^2$ το οποίο για $x \geqslant 0$ είναι $(\sqrt{5}, 5)$. Το χωρίο είναι x απλό και y απλό. Στην περίπτωση όμως του x απλού θα πρέπει να το σπάσουμε σε 2 χωρία.

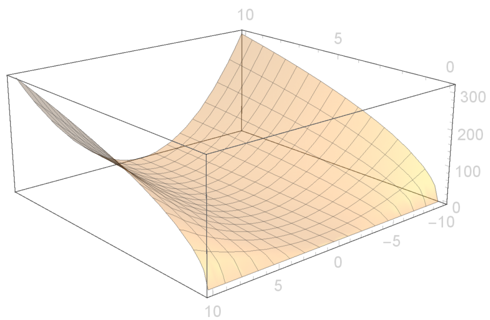
- y απλό
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ 0\leqslant x\leqslant\sqrt{5}\ ,\ x^2\leqslant y\leqslant 10-x^2\right\}\ .$$

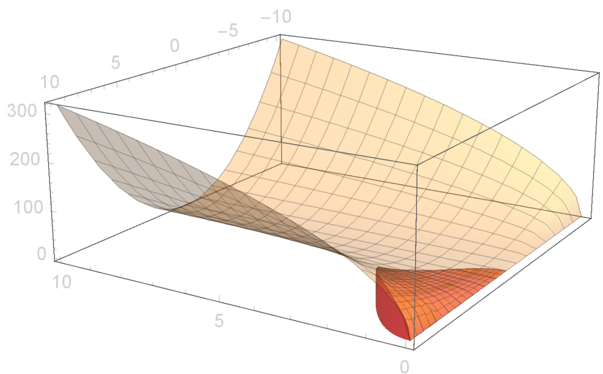
- x απλό. Για $x=0$ η μία καμπύλη δίνει $y=0$ ενώ η άλλη δίνει $y=10$. Για $x=\sqrt{5}$ παίρνουμε $y=5$. Επομένως παρατηρούμε ότι το y παίρνει 3 τιμές (2 για κάθε ένα από τα 2 χωρία)
$$D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ 0\leqslant y\leqslant 5\ ,\ 0\leqslant x\leqslant\sqrt{y}\}\ .$$
$$D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ 5\leqslant y\leqslant 10\ ,\ 0\leqslant x\leqslant\sqrt{10-y^2}\right\}\ .$$

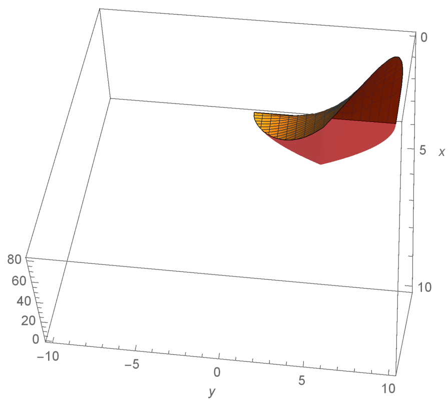
Προφανώς είναι πιο εύκολο να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα εκφράζοντας το D ως y απλό

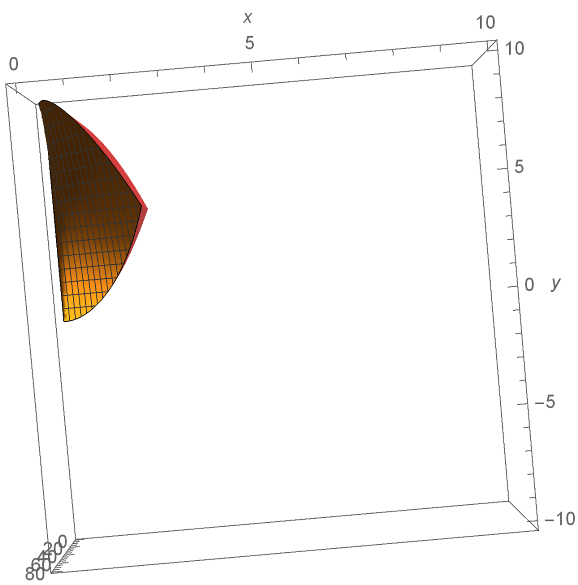
$$\iint_D f(x,y)dA=\int_0^{\sqrt{5}}\int_{x^2}^{10-x^2} y^2\sqrt{x}dydx=\int_0^{\sqrt{5}}\left[\frac{y^3}{3}\sqrt{x}\right]_{x^2}^{10-x^2}dx=\int_0^{\sqrt{5}}\frac{(10-x^2)^3x^{1/2}}{3}dx-\int_0^{\sqrt{5}}\frac{1}{3}x^{13/2}dx$$
$= \ldots$











Άσκηση 3

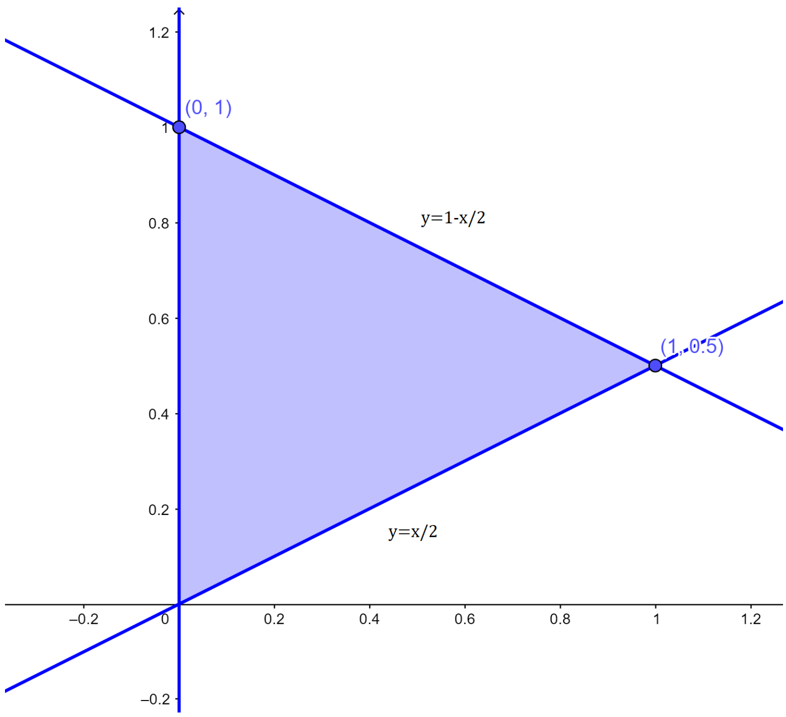
Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από τα επίπεδα $x+2y+z=2,\ x=2y,\ x=0,\ z=0$.

Λύση

Για την εύρεση του χωρίου D ολοκλήρωσης θα ήταν χρήσιμο να κατασκευάσουμε το σχήμα. Αρχικά όμως θα προσπαθήσουμε να το προσδιορίσουμε χωρίς σχήμα.

Από την στιγμή που μας ενδιαφέρει ο όγκος κάτω από την $x+2y+z=2 \Leftrightarrow z=2-x-2y$ αρκεί να δούμε το χωρίο στο οποίο θα ολοκληρώσουμε την συνάρτηση αυτή. Επομένως θα δουλέψουμε στο xy επίπεδο $(z=0)$. Θα δουλέψουμε λοιπόν με τις ευθείες $x=0$, $x-2y=0$ και $x+2y+0=2 \Rightarrow x+2y=2$. Η τομή της $x-2y=0$ με την $x=0$ είναι το $(0,0)$, η τομή της $x=0$ με την $x+2y=2$ είναι το $(0,1)$ και τέλος η τομή των $x+2y=2$ και $x-2y=0$ είναι το $(1,\frac{1}{2})$. Αν δεν θέλουμε να σχεδιάσουμε ούτε αυτές τότε αρκεί να σκεφτούμε πως θα εκφράσουμε το χωρίο το οποίο είναι απλό. Άρα για $0 \leqslant x \leqslant 1$ θα έχουμε $\frac{1}{2}x \leqslant y \leqslant 1-\frac{1}{2}x$. ($y$ απλό). Πως θα ξέρουμε ποιά φράσσει το y από πάνω και ποιά από κάτω; Αρκεί να σκεφτούμε για μία τυχαία τιμή του x (έστω το $x=1/2$) τι y θα δώσει η κάθε μία $(1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ και $1-1/2\cdot 1/2 = 3/4 > 1/4)$.
Αν θέλαμε να εκφράσουμε το χωρίο σαν x απλό τότε θα ήταν πιό σύνθετο και αυτό μπορούμε να το δούμε και από τα σημεία τομής που βρήκαμε, στα οποία έχουμε δύο τιμές για το x αλλά τρεις τιμές για το y, το οποίο μας κάνει να σκεφτούμε ότι πιθανώς να χρειαστεί να χωρίσουμε το χωρία σε δύο χωρία αν θελήσουμε να το γράψουμε σαν x απλό.

Είναι αρκετά πιο εύκολο όμως να το μελετήσουμε σχεδιάζοντας το σχήμα (τουλάχιστον το χωρίο ολοκλήρωσης στο xy).



Εύκολα από εδώ βλέπουμε ότι

- Ως y απλό

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ \frac{x}{2} \leqslant y \leqslant 1-\frac{x}{2} \right\}\ .$$

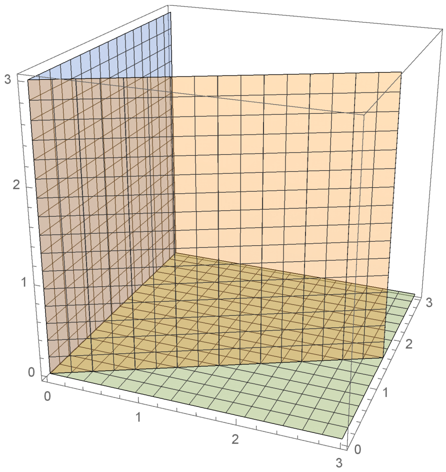
- Ως x απλό

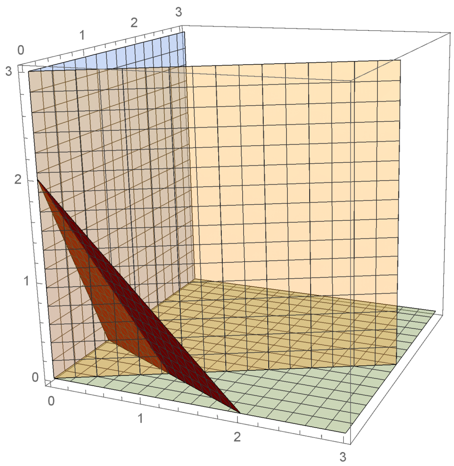
$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2} \; , \; 0 \leqslant x \leqslant 2y \right\} \; .$$

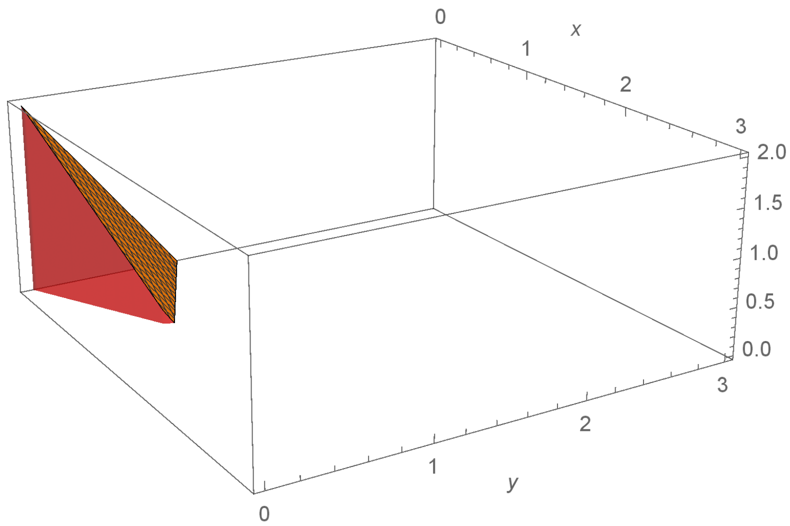
$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1 \; , \; 0 \leqslant x \leqslant 2 - 2y \right\} \; .$$

Επιλέγουμε όποιο μας διευκολύνει στις πράξεις π.χ. εδώ το y απλό.

$$V = \iint_D (2-x-2y)dA = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2-x-2y)dydx = \int_0^1 \left[2y - xy - y^2\right]_{x/2}^{1-x/2} dx$$
$$= \int_0^1 \left[2 - x - x(1-x/2) - (1-x/2)^2 - x + x^2/2 + x^2/4\right] dx = 1/3 \; .$$







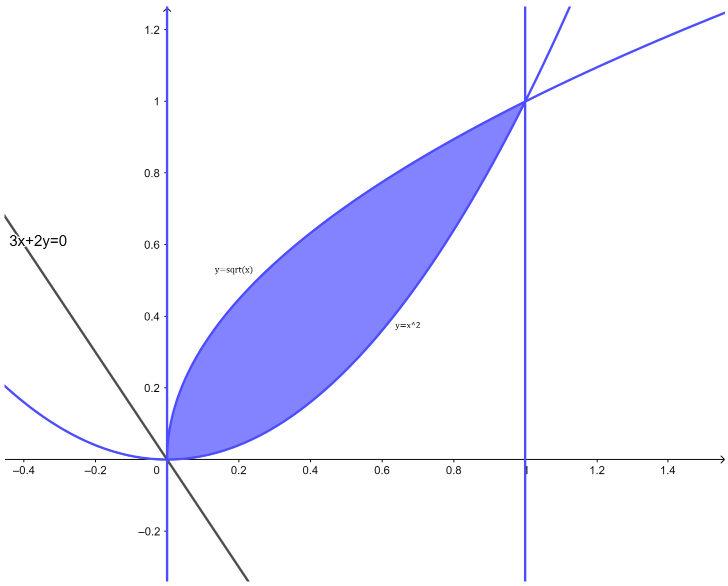
Άσκηση 4

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που βρίσκεται κάτω από το επίπεδο $3x + 2y - z = 0$ και πάνω από το χωρίο που περιβάλλεται από τις παραβολές $y = x^2$ και $x = y^2$.

Λύση

Αρκεί να βρούμε το χωρίο ολοκλήρωσης D και ο όγκος θα δίνεται από $V = \iint_D (3x + 2y)dA$. Όπως και στην προηγούμενη άσκηση θα δούμε το χωρίο ολοκλήρωσης στο xy επίπεδο ($z = 0$). Άρα έχουμε τις παρακάτω καμπύλες

$$y = x^2 \ , \quad x = y^2 \ , \quad 3x + 2y = 0 \ .$$



Επομένως παρατηρούμε ότι το χωρίο ολοκλήρωσης είναι x απλό και y απλό. Τα σημεία τομής των δύο καμπυλών είναι τα $(0,0)$ και $(1,1)$.

- y απλό

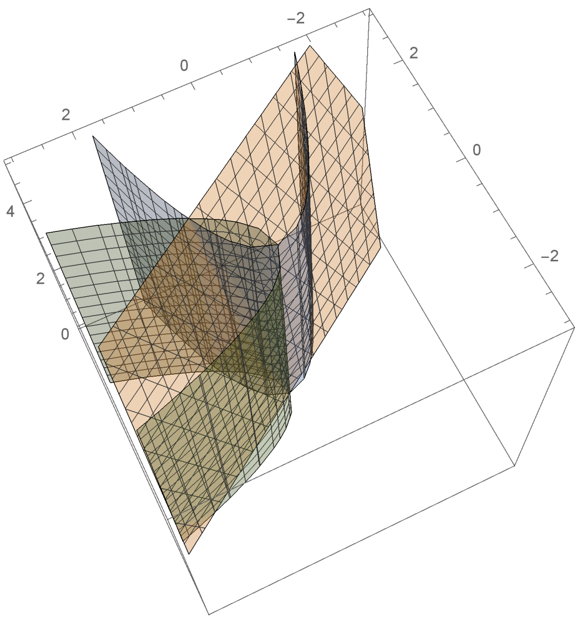
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \ , \ x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\right\} \ .$$

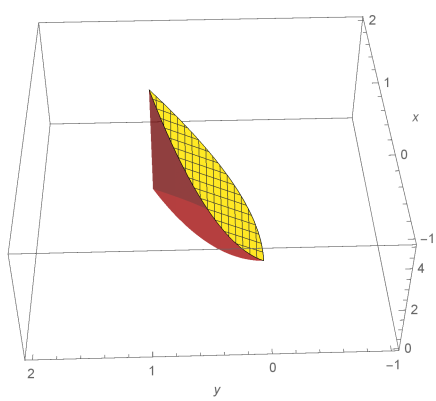
- x απλό

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \ , \ y^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}\right\} \ .$$

Μπορούμε να διαλέξουμε όποια έκφραση θέλουμε

$$V = \iint_D (3x+2y)dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (3x+2y)dydx = \int_0^1 \left[3xy + y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$
$$= \int_0^1 \left[(3x\sqrt{x} + x) - (3x^3 + x^4)\right] dx = \ldots = \frac{3}{4} \ .$$



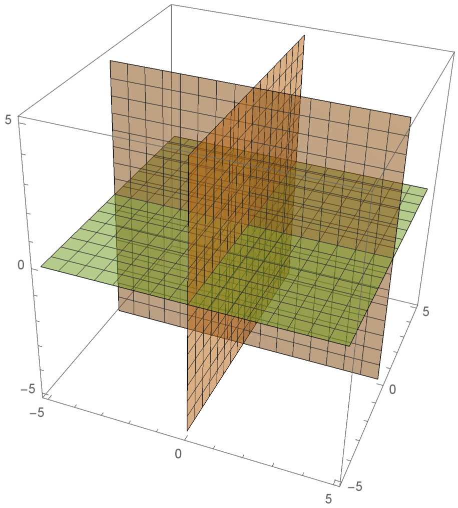


Άσκηση 5

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από τον κύλινδρο $y^2 + z^2 = 4$ και το επίπεδο $x = 2y$ στο 1ο ογδοημόριο.

Λύση

(Σημείωση σχετικά με τα οδγοημόρια)



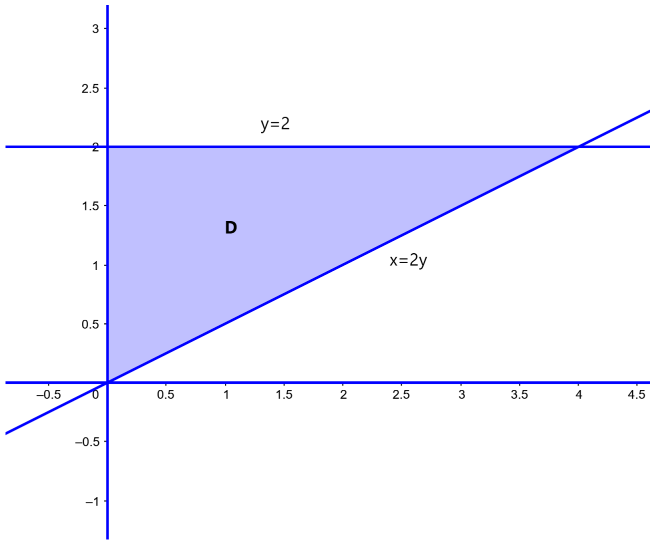
Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στις 3 διαστάσεις, κάθε σημείο εκφράζεται ως την τομή τριών επιπέδων (Αντίστοιχα για 1,2,... διαστάσεις). Όπως παρατηρούμε και στο σχήμα, το $\mathbb{R}^3$ χωρίζεται σε 8 ογδοημόρια. Το 1ο αντιστοιχεί σε $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ και $z \geqslant 0$ και αντίστοιχα προσδιορίζονται τα υπόλοιπα

$$\begin{bmatrix} \text{Ογδοημόριο} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & + & - & - & + & + & - & - & + \\ y & + & + & - & - & + & + & - & - \\ z & + & + & + & + & - & - & - & - \end{bmatrix}$$

Συνέχεια στη Λύση της άσκησης

Μπορούμε να βρούμε τα άκρα ολοκλήρωσης με διάφορους τρόπους. Π.χ. εδώ θα ξεκινήσουμε με το γεγονός ότι $x, y, z \geqslant 0$. θέλουμε λοιπόν να δούμε ποιας επιφάνειας και πάνω από ποιο χωρίο ολοκλήρωσης θα πάρουμε το στερεό και αντίστοιχα τα άκρα. Αρκεί δούμε το z μέχρι που θα φτάσει για να πάρουμε το στερεό κάτω από την επιφάνεια $z = z(x, y)$. Εύκολα λοιπόν $z = \sqrt{4 - y^2}$, $(z \geqslant 0)$. Οπότε ψάχνουμε τον όγκο του στερεού κάτω από την $z(x, y)$ στο χωρίο D το οποίο μένει να προσδιορίσουμε. Για να προσδιορίσουμε το χωρίο θα πάμε στο xy επίπεδο $z = 0$. Επομένως $y^2 + 0 = 4 \Rightarrow y = 2$, $(y \geqslant 0)$. Είναι αρκετά εύκολο λοιπόν να εκφράσουμε το χωρίο ως x απλό.

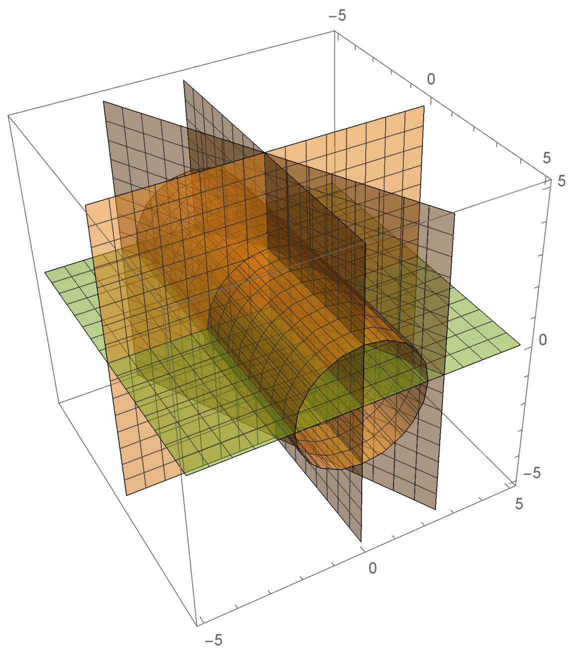
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \; 0 \leqslant y \leqslant 2 \;,\; 0 \leqslant x \leqslant 2y\right\} \;.$$

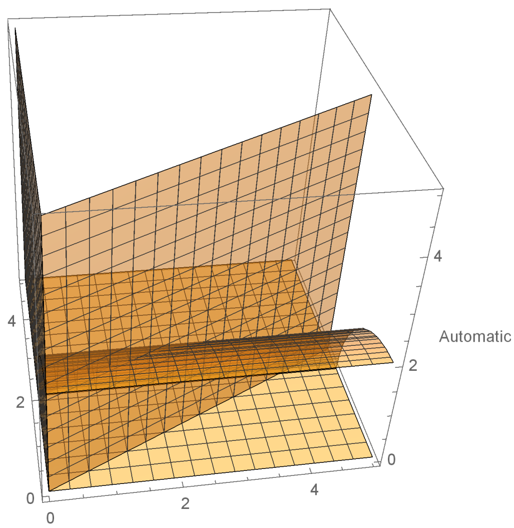


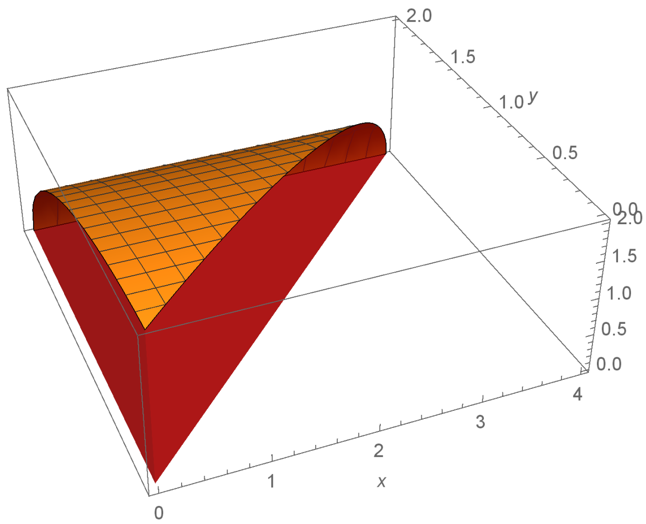
Ο ζητούμενος όγκος θα δίνεται από

$$V = \iint_D \sqrt{4-y^2}dA = \int_0^2 \int_0^{2y} \sqrt{4-y^2}dxdy = \int_0^2 \left[\sqrt{4-y^2}x\right]_0^{2y} dy$$

$$= \int_0^2 \left[\sqrt{4-y^2}2y\right] dy \overset{4-y^2=u \Rightarrow -2ydy=du,\ y\to 0\Rightarrow u\to 4\ ,\ y\to 2\Rightarrow u\to 0}{=} \int_0^4 \sqrt{u}du = \left[u^{3/2}\right]_0^4 = 4^{3/2}/(3/2) = 16/3\ .$$







Τριπλά Ολοκληρώματα

Άσκηση 1 (30 Κεφ 5.5)

Έστω W το στερεό που φράσσεται από τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$ και $z = x + y$.

1. Να υπολογισθεί ο όγκος του W.
2. Να υπολογισθεί το $\iiint_W x dxdydz$.
3. Να υπολογισθεί το $\iiint_W y dxdydz$.

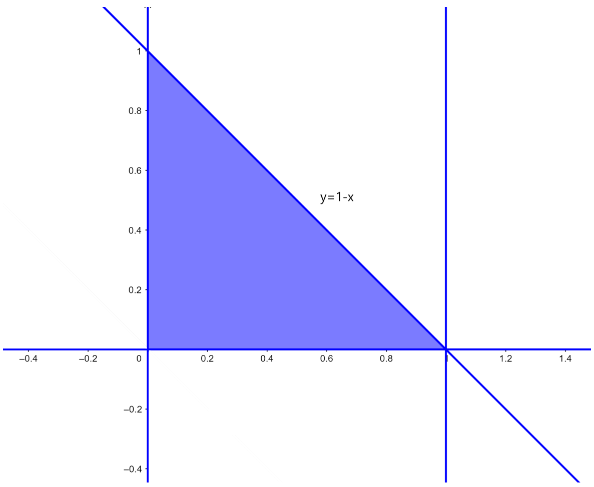
Λύση

Το χωρίο είναι απλό (y x και z). Το z θα κυμαίνεται από 0 ως $z = x + y$. Το χωρίο ολοκλήρωσης θα φράσσεται από τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$ και $x + y = 1$ των οποίων τα σημεία τομής είναι $(0, 0)$, $(0, 1)$ και $(1, 0)$. Επομένως το χωρίο ολοκλήρωσης είναι τριγωνικό με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(0, 1)$ και $(1, 0)$ και πλευρές που αποτελούνται από τα ευθύγραμμα τμήματα των ευθειών $y = 1 - x$, $y = 0$ και $x = 0$. Αν αφήσουμε το x να κυμαίνεται $0 \leqslant x \leqslant 1$ τότε $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$ και $0 \leqslant z \leqslant x + y$.

$$W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\ ,\ 0 \leqslant z \leqslant x + y\right\}\ .$$

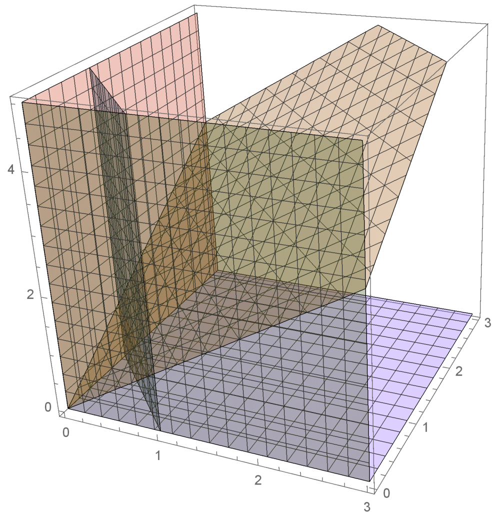
Ομοίως μπορούμε να πάρουμε την έκφραση

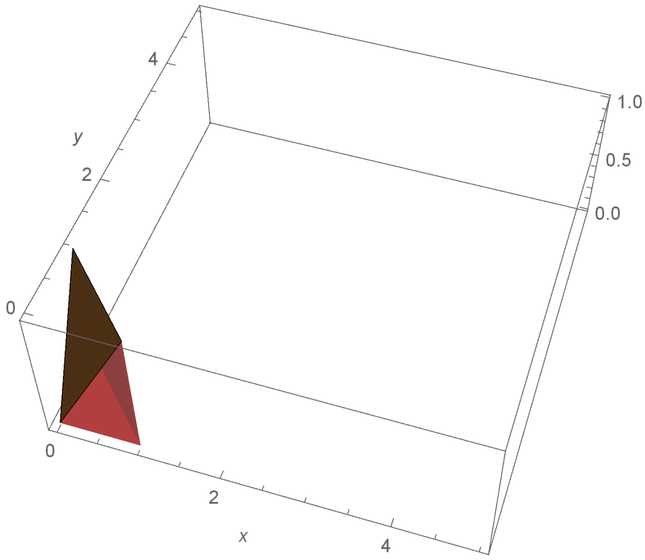
$$W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leqslant y \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant x \leqslant 1 - y\ ,\ 0 \leqslant z \leqslant x + y\right\}\ .$$



1. Ο ζητούμενος όγκος δίνεται από

$$V = \iiint_W dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} dzdydx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x + y)dydx = \int_0^1 [xy + y^2/2]_0^{1-x} dx$$
$$= \int_0^1 \left(x(1 - x) + \frac{(1 - x)^2}{2}\right) dx = \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x\right]_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\ .$$





2. Το ολοκλήρωμα $I_1 = \iiint_W x dxdydz$ δίνεται από

$$I_1 = \iiint_W dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} x dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} x(x+y) dy dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{xy^2}{2}\right]_0^{1-x} dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + x\frac{(1-x)^2}{2}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{-x^3}{2} + \frac{x}{2}\right) dx = \left[-\frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{8}\ .$$

3. Το ολοκλήρωμα $I_2 = \iiint_W y dxdydz$ δίνεται από

$$I_2 = \iiint_W dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} y dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} y(x+y) dy dz = \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{x(1-x)^2}{2} + \frac{(1-x)^3}{3}\right] dx = \int_0^1 \left[\frac{x^3 - 2x^2 + x}{2} + \frac{-x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{3}\right] dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{24} - x^2 + \frac{x}{3}\right]_0^1 = -\frac{15}{24}\ .$$

Άσκηση 2

Να εκφράσετε το $\iiint_E f(x,y,z)dV$ με 6 διαφορετικούς τρόπους όπου E το στερεό που φράσσεται από τις επιφάνειες

1. $y = x^2$, $z = 0$, $y + 2z = 4$.
2. $x = 2$, $y = 2$, $z = 0$, $x + y - 2z = 2$.

Λύση

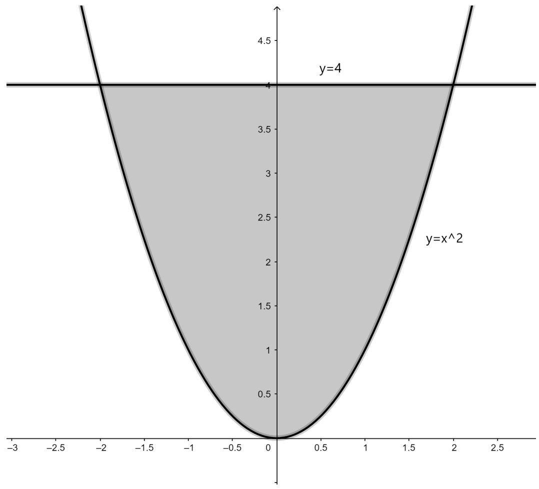
1. Από τις $y = x^2$ και $y + 2z = 4$ έχουμε $x^2 + 2z = 4$.

- z απλό.

  Παρατηρούμε ότι το z θα κυμαίνεται από 0 ως $z = 2 - y/2$ ή $z = 2 - \dfrac{x^2}{2}$.

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ (x,y) \in D\ , u_1(x,y) \leqslant z \leqslant u_2(x,y)\right\}\ .$$

Το χωρίο D του xy επιπέδου μπορούμε να το πάρουμε ως x απλό η ως y απλό.



Σχεδιάζοντας το χωρίο D και βρίσκοντας τα σημεία τομής $(-2,4),(2,4)$ των $y = x^2$ και $y = 4$ στο xy επίπεδο εύκολα καταλήγουμε ότι

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ -2 \leqslant x \leqslant 2\ ,\ x^2 \leqslant y \leqslant 4\right\}\ , \quad (y \text{ απλό})\ ,$$

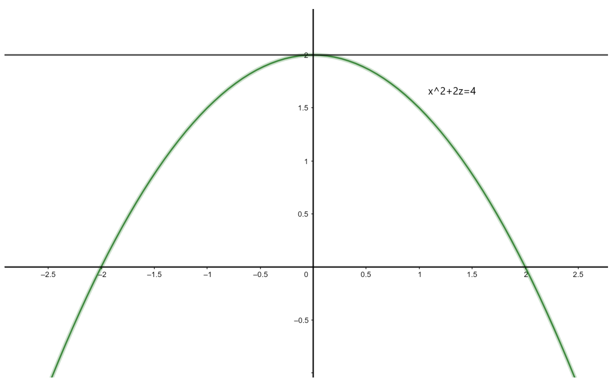
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leqslant y \leqslant 4\ ,\ -\sqrt{y} \leqslant x \leqslant \sqrt{y}\right\}\ , \quad (x \text{ απλό})\ .$$

Άρα οι 2 εκφράσεις του E ως z απλό θα είναι

$$1) \quad \iiint_E f(x,y,z)dV = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{2-y/2} f(x,y,z)dzdydx$$

$$2) \quad \iiint_E f(x,y,z)dV = \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{0}^{2-y/2} f(x,y,z)dzdydx$$

- (y απλό): Παρατηρούμε ότι το y βρίσκεται μεταξύ των επιφανειών x^2 και $2-z$. Θα προσδιορίσουμε ποια θα είναι το πάνω άκρο και ποια το κάτω είτε μέσω τριδιάστατου σχήματος είτε αφού βρούμε το χωρίο ολοκλήρωσης στο xz επίπεδο. Για να βρούμε το χωρίο ολοκλήρωσης D στο xz επίπεδο αρχικά βρίσκουμε τα σημεία τομής των καμπυλών $x^2+2z = 4$, $z = 0$ τα οποία είναι τα $(-2,0),(2,0)$.



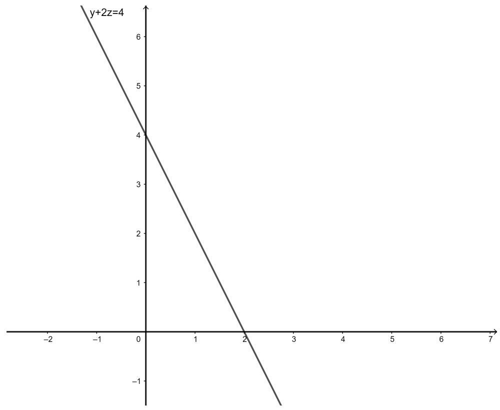
Έχουμε λοιπόν από το σχήμα ότι

$$D = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \leqslant z \leqslant 2\ ,\ -\sqrt{4-2z} \leqslant x \leqslant \sqrt{4-2z}\right\}\ , \quad (x \text{ απλό})\ ,$$
$$D = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^3 |\ -2 \leqslant x \leqslant 2\ ,\ 0 \leqslant z \leqslant 2 - x^2/2\right\}\ , \quad (z \text{ απλό})\ .$$

Επομένως αν πάρουμε μία τυχαία τιμή για το (x,z) από το χωρίο ολοκλήρωσης D (π.χ. το (0,0)) θα πάρουμε $y = 0^2 = 0 < 2 - 0 = 2$ άρα $x^2 \leqslant y \leqslant 2 - z$ και οι άλλες δύο εκφράσεις θα είναι

$$3) \quad \iiint_E f(x,y,z)dV = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{2-x^2/2}\int_{x^2}^{2-z} f(x,y,z)dydzdx$$
$$4) \quad \iiint_E f(x,y,z)dV = \int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4-2z}}^{\sqrt{4-2z}}\int_{x^2}^{4-2z} f(x,y,z)dydxdz$$

- (x απλό): Παρατηρούμε από την $y = x^2$ ότι $-\sqrt{y} \leqslant x \leqslant \sqrt{y}$ για $y \geqslant 0$ ή $-\sqrt{4-2z} \leqslant x \leqslant \sqrt{4-2z}$ για $z \leqslant 2$. Για να βρούμε το χωρίο ολοκλήρωσης D στο zy επίπεδο βρίσκουμε τα σημεία τομής των $y + 2z = 4$, $z = 0$ και $y = 0^2 = 0$ τα οποία είναι τα $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,4)$ (ορθογώνιο τρίγωνο).



Από το σχήμα έχουμε

$$D = \left\{(z,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leqslant y \leqslant 4\ ,\ 0 \leqslant z \leqslant 2 - y/2\right\}\ ,\ (z \text{ απλό})\ ,$$
$$D = \left\{(z,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leqslant z \leqslant 2\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant 4 - 2z\right\}\ ,\ (y \text{ απλό})\ ,$$

Επομένως οι δύο τελευταίες εκφράσεις είναι

$$5) \quad \iiint_E f(x,y,z)dV = \int_{0}^{4}\int_{0}^{2-y/2}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)dxdzdy$$
$$6) \quad \iiint_E f(x,y,z)dV = \int_{0}^{2}\int_{0}^{4-2z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)dxdydz$$

Μπορούμε να δοκιμάσουμε έναν διαφορετικό τρόπο εύρεσης των άκρων ολοκλήρωσης. Ξεκινώντας με τη μεταβλητή z θα συμπληρώσουμε τον παρακάτω πίνακα

$$\begin{bmatrix} & x & y & z & u(x,y) \\ z & & & & \end{bmatrix}$$

- $x = y = 0$ δίνουν $0 + 2z = 4 \Rightarrow z = 2$ και $z = 0$ (από υπόθεση).
- Για $x = 0$ έχουμε $z = 0$, $z = 2$ και $z = 2 - y/2$.
- Για $y = 0$ έχουμε $z = 0$, $z = 2$ και $z = 2 - x^2/2$.

Ο παραπάνω πίνακας επομένως αποκτά τη μορφή

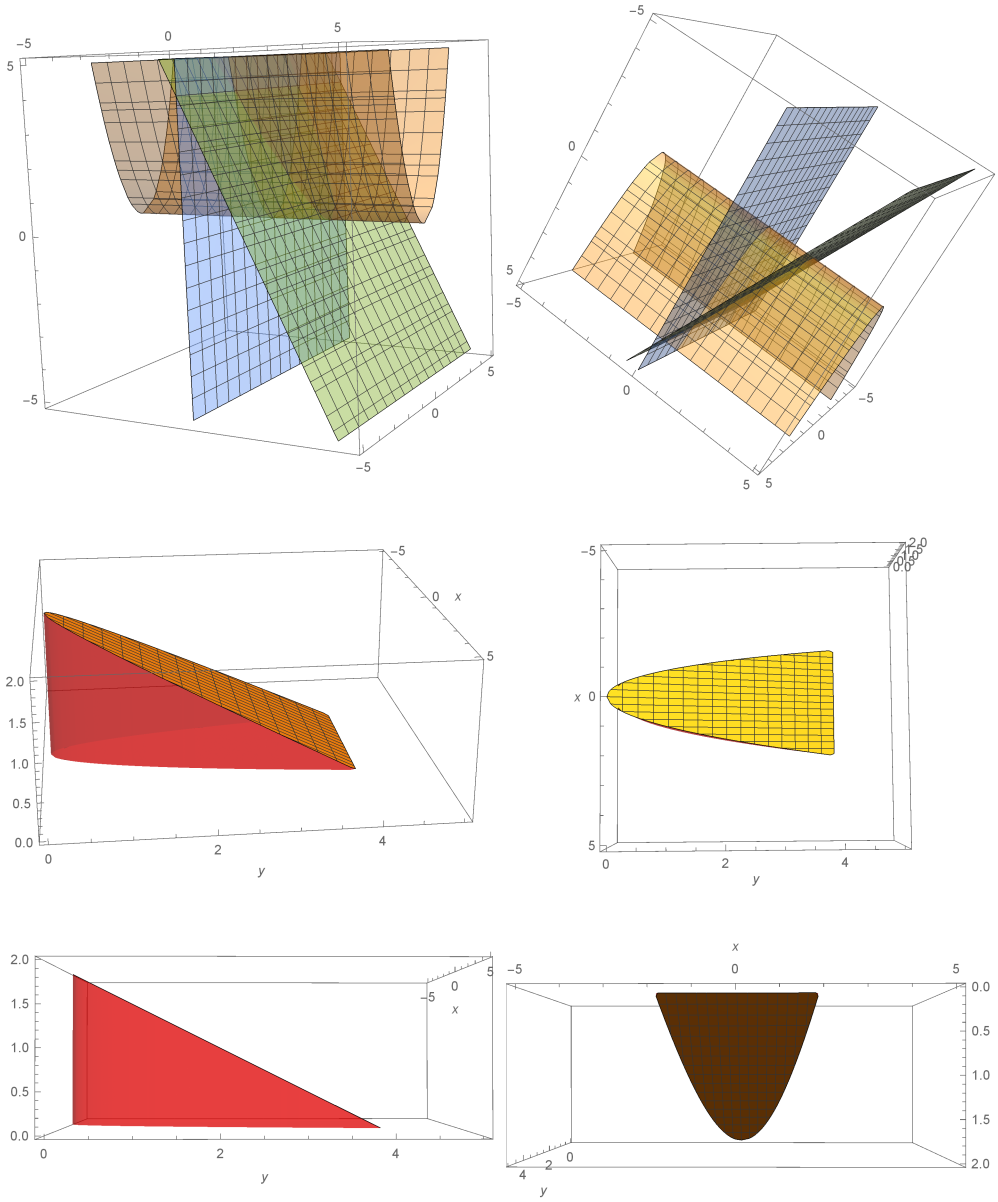
$$\begin{bmatrix} & x & y & z & z(x,y) \\ z & z = 2 - x^2/2\ ,\ z = 0 & z = 2 - y/2\ ,\ z = 0 & z = 0\ ,\ z = 2 & z = 2 - x^2/2\ ,\ z = 2 - y/2 \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα με την μεταβλητή x

- $y = z = 0$ δίνουν $x = 0$ και $x^2 + 0 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.
- $y = 0$ δίνει $x = 0$ και $x = \pm\sqrt{4-2z}$.
- $z = 0$ δίνει $x = \pm\sqrt{y}$ και $x = \pm 2$.

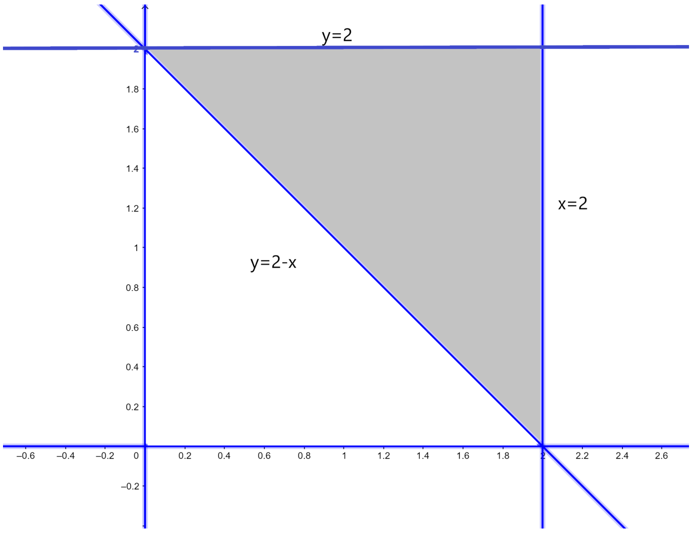
Ο αντίστοιχος πίνακας θα είναι

$$\begin{bmatrix} & x & y & z & x(y,z) \\ x & 0, \pm 2 & \pm\sqrt{y}, & \pm\sqrt{4-2z} & \pm\sqrt{y}\ ,\ \pm\sqrt{4-2z} \end{bmatrix}$$



2. • z απλό.

Έχουμε ότι $0 \leqslant z \leqslant x/2 + y/2 - 1$. Θέλουμε να βρούμε το χωρίο ολοκλήρωσης στο xy επίπεδο ($z = 0$). Το χωρίο ολοκληρώσης θα φράσσεται από τις καμπύλες $x = 2$, $y = 2$ και $x + y = 2$ που δίνεται από το σύστημα $x + y - 2z = 2$ και $z = 0$. Τα σημεία τομής τους είναι $(0, 2)$, $(2, 0)$ και $(2, 2)$ (τριγωνικό χωρίο και τα τρία σημεία κορυφές του).



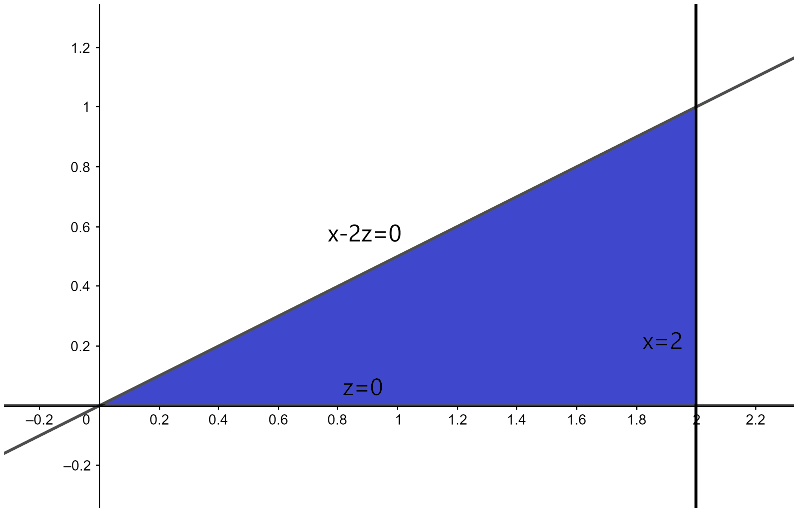
Βάσει σχήματος το χωρίο ολοκλήρωσης D θα είναι

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leqslant x \leqslant 2\ ,\ 2-x \leqslant y \leqslant 2\}\ ,\ (y \text{ απλό})\ ,$$
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leqslant y \leqslant 2\ ,\ 2-y \leqslant x \leqslant 2\}\ ,\ (x \text{ απλό})\ ,$$

Επομένως οι 2 εκφράσεις ως z απλό του στερεού E θα είναι

$$1)\ \iiint_E f(x,y,z)dV = \int_0^2 \int_{2-x}^2 \int_0^{x/2+y/2-1} f(x,y,z)dzdydx\ ,$$
$$2)\ \iiint_E f(x,y,z)dV = \int_0^2 \int_{2-y}^2 \int_0^{x/2+y/2-1} f(x,y,z)dzdxdy\ ,$$

• y απλό.
Έχουμε $2 \leqslant y \leqslant 2-x+2z$. Το χωρίο ολοκλήρωσης στο xz επίπεδο ($y=0$) θα φράσσεται από τις καμπύλες $x=2$, $z=0$ και από την $x-2z=0$ που προκύπτει από το σύστημα $y=2$ και $x+y-2z=2$. Τα σημεία τομής των καμπυλών θα είναι $(2,0)$, $(0,0)$ και $(0,1)$.



Από το σχήμα μπορούμε να γράψουμε τις 2 εκφράσεις για το χωρίο ολοκλήρωσης

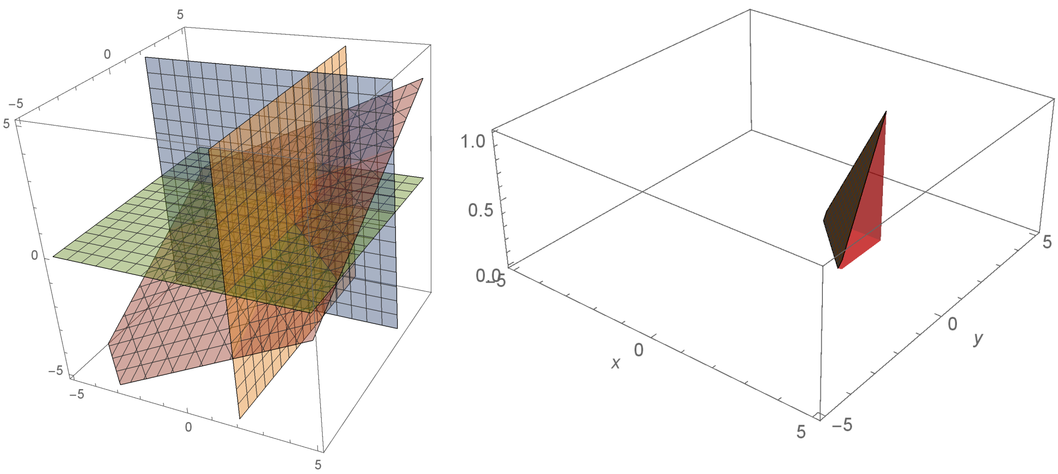
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leqslant x \leqslant 2\ ,\ 0 \leqslant z \leqslant \frac{x}{2}\right\}\ ,\ (z \text{ απλό})\ ,$$
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leqslant z \leqslant 1\ ,\ 2z \leqslant x \leqslant 2\}\ ,\ (x \text{ απλό})\ ,$$

Επομένως οι 2 εκφράσεις ως z απλό του στερεού E θα είναι

$$3)\ \iiint_E f(x,y,z)dV = \int_0^2 \int_0^{x/2} \int_2^{2-x+2z} f(x,y,z)dydzdx\ ,$$
$$4)\ \iiint_E f(x,y,z)dV = \int_0^1 \int_{2z}^{2} \int_2^{2-x+2z} f(x,y,z)dydxdz\ ,$$

• x απλό Έχουμε $2 \leqslant x \leqslant 2-y+2z$. Το χωρίο ολοκλήρωσης στο zy επίπεδο ($x=0$) θα φράσσεται από τις καμπύλες $y=2$, $z=0$ και την $y-2z=0$ που προκύπτει από το σύστημα των $x=2$ και $x+y-2z=2$. Τα σημεία τομής και το χωρίο θα είναι ακριβώς τα ίδια με το y απλό έχοντας όπου x το y. Επομένως

$$5)\ \iiint_E f(x,y,z)dV = \int_0^2 \int_0^{y/2} \int_2^{2-x+2z} f(x,y,z)dxdzdy\ ,$$
$$6)\ \iiint_E f(x,y,z)dV = \int_0^1 \int_{2z}^{2} \int_2^{2-x+2z} f(x,y,z)dxdydz\ ,$$



Άσκηση 3

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που φράσεται από τα παραβολοειδή $y=x^2+z^2$ και $y=8-x^2-z^2$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι το y κυμαίνεται μεταξύ των επιφανειών x^2+z^2 και $8-x^2-z^2$. Επομένως θα εκφράσουμε το στερεό ως y απλό έχοντας άμεσα ότι $x^2+z^2 \leqslant y \leqslant 8-x^2-z^2$. Μένει να προσδιορίσουμε το χωρίο ολοκλήρωσης στο επίπεδο xz. Το χωρίο αυτό θα φράσσεται από τις καμπύλες που προκύπτουν από απαλοιφή του y από τις εξισώσεις του συστήματος

$$\begin{cases} x^2+z^2=y \\ 8-x^2-z^2=y \end{cases} \quad \Rightarrow x^2+z^2=4$$

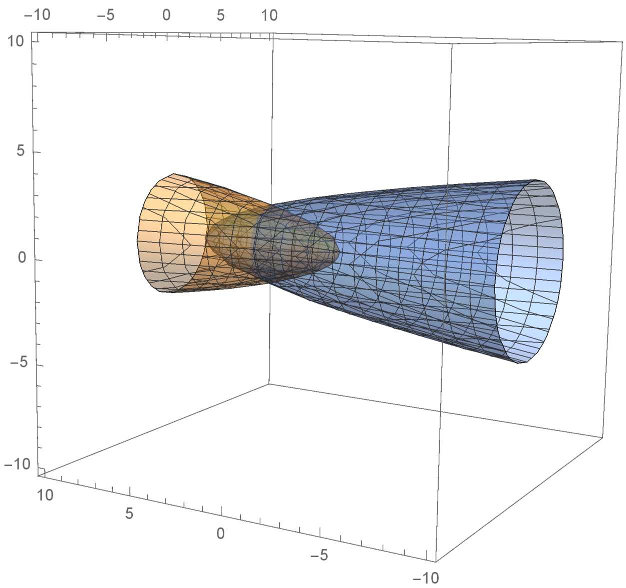
Επομένως το σύνορο του χωρίου ολοκλήρωσης είναι ο κύκλος $x^2+z^2=4$ το οποίο σημαίνει ότι το χωρίο ολοκλήρωσης είναι ο κυκλικός δίσκος $x^2+z^2 \leqslant 4$. Το χωρίο ολοκλήρωσης μπορεί να γραφεί ως x απλό ή ως y απλό

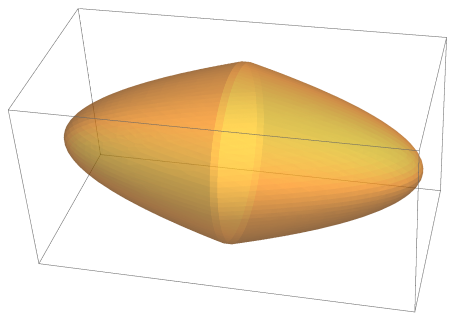
$$D = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \middle|\ 0 \leqslant x \leqslant 2\ ,\ -\sqrt{4-x^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{4-x^2}\right\}\ ,$$
$$D = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \middle|\ 0 \leqslant z \leqslant 2\ ,\ -\sqrt{4-z^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{4-z^2}\right\}\ .$$

Ο ζητούμενος όγκος θα δίνεται από

$$V = \iiint_E dV = \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+z^2}^{8-x^2-z^2} dydzdx = \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \int_{x^2+z^2}^{8-x^2-z^2} dydxdz \; .$$

$$V = \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \left[8 - x^2 - z^2 - x^2 - z^2\right] dxdz = \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \left[8 - 2x^2 - 2z^2\right] dxdz = ... = 8\pi \; .$$



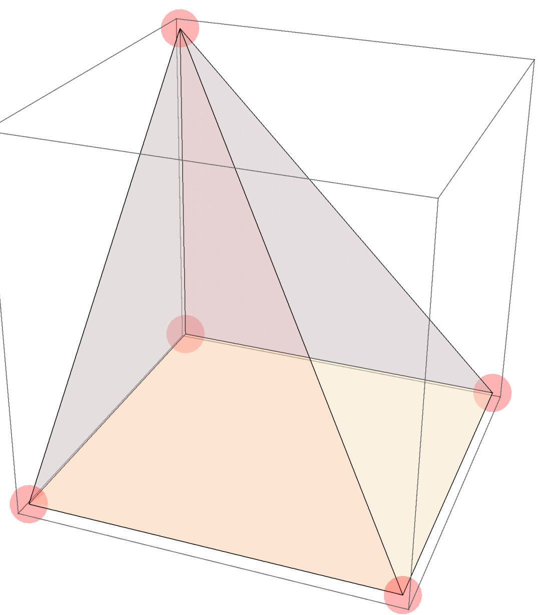


Άσκηση 4 (22 Κεφ. 5.5)

Να υπολογισθεί το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_W (x^2 + y^2) dxdydz$ όπου W η πυραμίδα με πάνω κορυφή το $(0, 0, 1)$ και κορυφές της βάσης της τα σημεία $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ και $(1, 1, 0)$.

Λύση

Σχεδιάζουμε την πυραμίδα με τις κορυφές που δίνονται.



• Θα βρούμε τις εξισώσεις των επιπέδων που αποτελούν τις πλευρές της πυραμίδας.

i) Από τα σημεία $A(0,0,1)$, $B(1,1,0)$ και $C(0,1,0)$ έχουμε $\overrightarrow{AB}(1,1,-1)$ και $\overrightarrow{AC}(0,1,-1)$ με εξωτερικό γινόμενο το $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,1) = \overrightarrow{n}$ Επομένως η εξίσωση του επιπέδου θα είναι

$$0(x-0)+1(y-0)+1(z-1)=0 \Rightarrow y+z=1\ .$$

ii) Αντίστοιχα η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $A(0,0,1)$, $B(1,1,0)$ και $D(1,0,0)$ είναι το $x+z=1$.

iii) Από τα σημεία $O(0,0,0)$, $A(0,0,1)$, $C(0,1,0)$ διέρχεται το επίπεδο με εξίσωση $x=0$.

iv) Από τα σημεία $O(0,0,0)$, $A(0,0,1)$, $C(1,0,0)$ διέρχεται το επίπεδο με εξίσωση $y=0$.

v) Από τα σημεία $O(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(1,0,0)$ διέρχεται το επίπεδο με εξίσωση $z=0$.

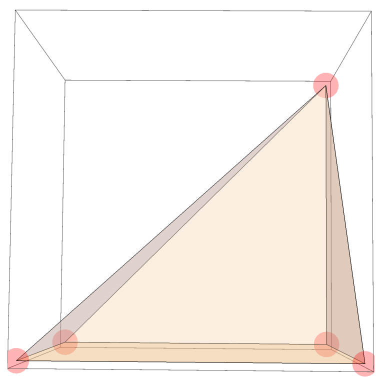
Επομένως το στερεό φράσσεται από τα επίπεδα $x=0, y=0, z=0, y+z=1$ και $x+z=1$.

• Τα επίπεδα $y+z=1$ και $x+z=1$ έχουν τομή την ευθεία $y=x$ του xy επιπέδου, η τομή τους με το xy επίπεδο ($z=0$) είναι οι ευθείες $x=1$ και $y=1$ αντίστοιχα ενώ για $x=0$ ή $y=0$ έχουμε $z=1$.

• Αν θελήσουμε να εκφράσουμε το στερεό ως z απλό παρατηρούμε από το σχήμα ότι θα πρέπει να το εκφράσουμε σαν την ένωση 2 z απλών καθώς στο μισό στερεό το άνω φράγμα του z θα είναι το $1-y$ ενώ στο άλλο μισό το $1-x$ (παρατηρούμε ότι τα δύο στερεά χωρίζονται από το $y=x$ επίπεδο). Επομένως το ζητούμενο ολοκλήρωμα θα δίνεται από

$$\iiint_W (x^2+y^2)dzdydx = \int_0^1\int_0^x\int_0^{1-x}(x^2+y^2)dzdydx + \int_0^1\int_x^1\int_0^{1-y}(x^2+y^2)dzdydx$$
$$= \int_0^1\int_0^x \left[(x^2+y^2)z\right]_0^{1-x} dydx + \int_0^1\int_x^1 \left[(x^2+y^2)z\right]_0^{1-y} dydx$$
$$= \int_0^1\int_0^x (1-x)(x^2+y^2)dydx + \int_0^1\int_x^1 (x^2+y^2)(1-y)dydx$$
$$= \int_0^1 \left[(1-x)x^2y + (1-x)\frac{y^3}{3}\right]_0^x dx + \int_0^1 \left[(x^2+\frac{y^3}{3}) - (\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4})\right]_0^x dx = \ldots = \frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{2}{15}\ .$$

• Είναι αρκετά πιο εύκολο να εκφράσουμε το στερεό ως x απλό και y απλό όπως φαίνεται και στο σχήμα.



• x απλό. Τότε $0 \leqslant x \leqslant 1-z$ και ψάχνουμε να βρούμε το χωρίο ολοκλήρωσης στο yz επίπεδο.

Το χωρίο ολοκλήρωσης θα φράσσεται από τις ευθείες $y+z=1$, $y=0$ και $z=0$ με σημεία τομής $(1,0),(0,1),(0,0)$ (ορθογώνιο τρίγωνο). Επομένως το χωρίο ολοκλήρωσης θα είναι

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ 0\leqslant z\leqslant 1\ ,\ 0\leqslant y\leqslant 1-z\right\}\ ,\ (y \text{ απλό})\ ,\\ D &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ 0\leqslant y\leqslant 1\ ,\ 0\leqslant z\leqslant 1-y\right\}\ ,\ (z \text{ απλό})\ . \end{aligned}$$

Επομένως το ζητούμενο ολοκλήρωμα θα είναι

$$\begin{aligned} &\iiint_W (x^2+y^2)dxdydz = \int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{1-z}(x^2+y^2)dxdydz = \int_0^1\int_0^{1-z}\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_0^{1-z}dydz\\ &= \int_0^1\int_0^{1-z}\left[\frac{(1-z)^3}{3}+y^2(1-z)\right]dydz = \int_0^1\left[\frac{(1-z)^3}{3}y+\frac{y^3}{3}(1-z)\right]_0^{1-z}dz\\ &= \int_0^1\left[\frac{(1-z)^4}{3}+\frac{(1-z)^4}{3}\right]dz \overset{u=1-z\ ,\ du=-dz\ ,\ z\to0\Rightarrow u\to1\ ,\ z\to1\Rightarrow u\to0}{=} \int_0^1\frac{2u^4}{3}du = \frac{2}{15}\ . \end{aligned}$$

• y απλό. Αντιμετωπίζεται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο (ίδια άκρα ολοκλήρωσης και λόγω της x^2+y^2 ο υπολογισμός γίνεται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο).