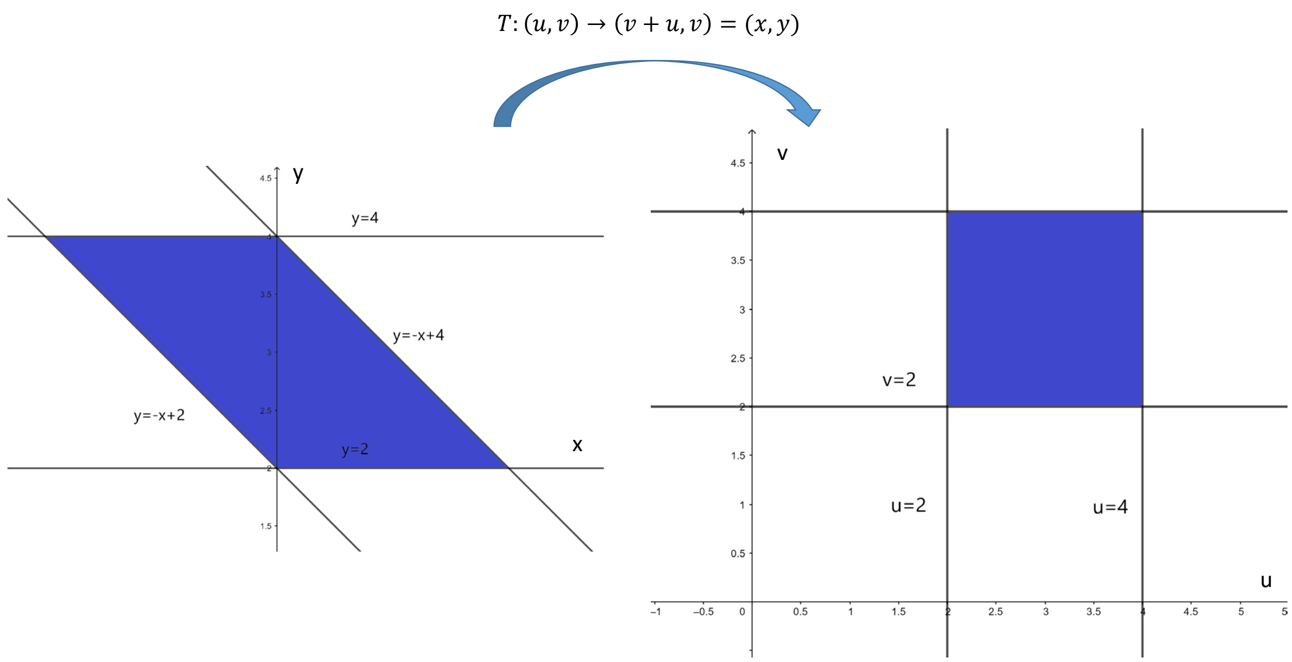
Φροντιστηριακό μάθημα 17-12-2021

Αλλαγή Μεταβλητής (Συνοπτική θεωρία)

- Στοιχειώδες χωρίο είναι αριθμήσιμη ένωση x απλών ή y απλών χωρίων.
- Η ανάγκη για αλλαγή μεταβλητής μπορεί να χρησιμεύσει είτε στην περίπτωση δύσκολου χωρίου ολοκλήρωσης είτε στην περίπτωση δύσκολης συνάρτησης ολοκλήρωσης.

  Παράδειγμα



- **Θεώρημα αλλαγής μεταβλητής για διπλά ολοκληρώματα**

  Έστω D στοιχειώδες χωρίο στο xy επίπεδο, D^* στοιχειώδες χωρίο στο uv επίπεδο και απεικόνιση $T : D^* \to D$ με $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ η οποία είναι C^1, $1-1$ και $D = T(D^*)$. Τότε για κάθε ολοκληρώσιμη $f : D \to \mathbb{R}$ έχουμε

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f \circ T(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv \ ,$$

  όπου $\left| \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ η ορίζουσα του Ιωακοβιανού πίνακα.

- Για να καταλάβουμε την εμφάνιση της ορίζουσας στην αλλαγή μεταβλητής αρχικά υπενθυμίζουμε ότι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου που ορίζεται από δύο ελέυθερα διανύσματα $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ είναι $E = \left\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \| \overrightarrow{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1) \|$.

  Θέλουμε να δούμε πως μετασχηματίζεται η επιφάνεια ενός μικρού ορθογωνίου (απειροστού) $dA = dxdy$ απο το xy επίπεδο στο επίπεδο uv μέσω του μετασχηματισμού T. Έστω ένα (u_0, v_0) σημείο του μικρού ορθογωνίου με $\Delta u, \Delta v$ πλευρές και $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$ το αντίστοιχο σημείο του xy επιπέδου όπως φαίνεται στο σχήμα. Καθώς από τα ευθύγραμμα διανύσματα $\Delta u = u - u_0$ και $\Delta v = v - v_0$ η εικόνα μέσω του T θα μας πάει σε καμπύλες ένας τρόπος για να προσεγγίσουμε τις εικόνες αυτές είναι μέσω της γραμμικής προσέγγισης

$$T(u_0, v_0) + T'\left(\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix}\right) .$$

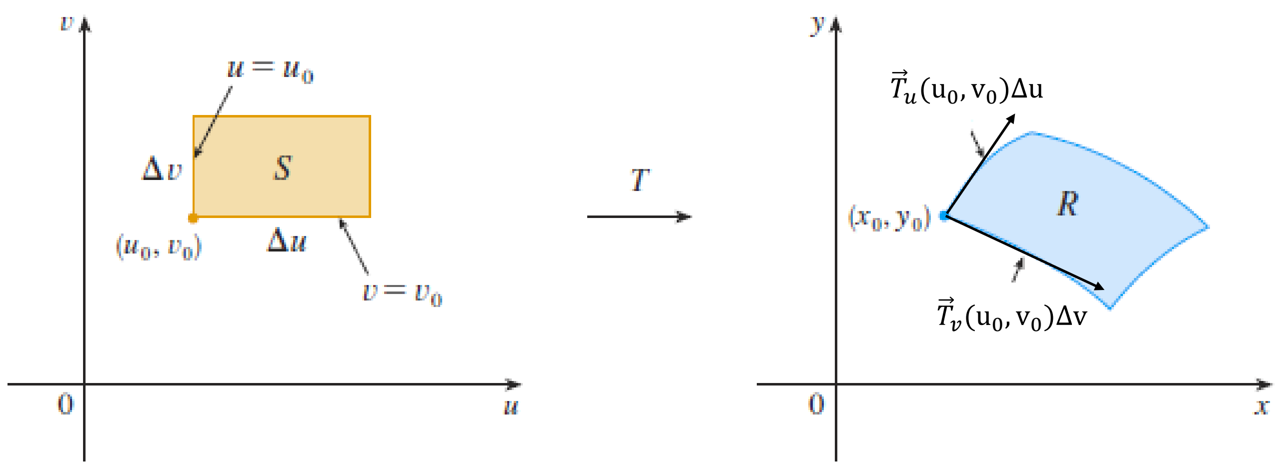
- Διαφορετικά μπορούμε να θυμηθούμε τον ορισμό της μερικής παραγώγου στο (u_0, v_0):

$$\overrightarrow{T}_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\overrightarrow{T}(u_0 + \Delta u, v_0) - \overrightarrow{T}(u_0, v_0)}{\Delta u} \Rightarrow \overrightarrow{T}(u_0 + \Delta u, v_0) - \overrightarrow{T}(u_0, v_0) \approx \Delta u \overrightarrow{T}_u$$
$$\overrightarrow{T}_v = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\overrightarrow{T}(u_0, v_0 + \Delta v) - \overrightarrow{T}(u_0, v_0)}{\Delta v} \Rightarrow \overrightarrow{T}(u_0, v_0 + \Delta v) - \overrightarrow{T}(u_0, v_0) \approx \Delta v \overrightarrow{T}_v.$$

- Δηλαδή αν πάρουμε την επιφάνεια του ορθογωνίου με πλευρές Δu Δv, η εικόνα του ορθογωνίου μέσω του T προσεγγίζεται από παραλληλόγραμμο με πλευρές $\overrightarrow{T}_u \Delta u$ και $\overrightarrow{T}_v \Delta v$.

- Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν dA του R χωρίου θα δίνεται από

$$\Delta A \approx |\overrightarrow{T}_u \times \overrightarrow{T}_v| \Delta u \Delta v = J(u, v) \Delta u \Delta v .$$

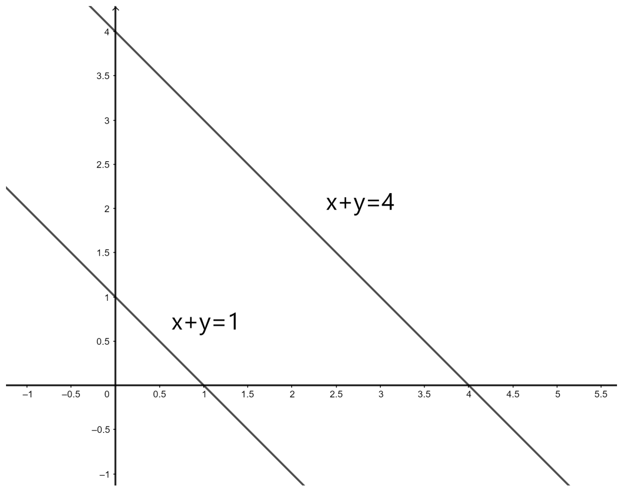


Ασκήσεις

Άσκηση 1 (10 Κεφ. 6.2)

Να υπολογισθεί το $\iint_R \frac{1}{x+y} dydx$ όπου R το χωρίο που φράσσεται από τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $x + y = 4$, χρησιμοποιώντας την απεικόνιση $T(u, v) = (u - uv, uv)$.

Λύση



- $x = x(u, v) = u - uv$ και $y = y(u, v) = uv$.
- $\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \begin{vmatrix} 1 - v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u - uv + uv = u$.
- Αφού $y \geqslant 0$ και $y = uv$ έχουμε ότι $u \geqslant 0$ και $v \geqslant 0$ ή $u \leqslant 0$ και $v \leqslant 0$.
- Αφού $x \geqslant 0$ άρα $u(1 - v) \geqslant 0$ το οποίο σημαίνει ότι $u \geqslant 0$ και $1 - v \geqslant 0$ ή $u \leqslant 0$ και $1 - v \leqslant 0$. Από τα παραπάνω προκύπτει $u \geqslant 0$ και $0 \leqslant v \leqslant 1$ ή $u \leqslant 0$ και $v \leqslant 0$, $v \geqslant 1$ το οποίο απορρίπτεται.
- Επομένως κρατάμε την περίπτωση $u \geqslant 0$ και $0 \leqslant v \leqslant 1$.
- Από το σχήμα βλέπουμε ότι $1 \leqslant x + y \leqslant 4$ άρα $1 \leqslant u \leqslant 4$.
- Από τα παραπάνω έχουμε ότι $R^* = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | \ 1 \leqslant u \leqslant 4 \ , \ 0 \leqslant v \leqslant 1\}$.
- $f(x, y) = \frac{1}{x + y}$ για $(x, y) \in R$. Επομένως $f(x(u, v), y(u, v)) = \frac{1}{(u - uv) + (uv)} = \frac{1}{u}$ όπου $u \geqslant 1$.
- Ο μετ/μος T είναι 1-1 και $T(R^*) = R$;

  1. 1-1. Έστω $(u, v), (u', v') \in R^*$ τέτοια ώστε $T(u, v) = T(u', v')$

     $$(u - uv, uv) = (u' - u'v', u'v') \Rightarrow uv = u'v' \ .$$

     Επιπλέον

     $$u - uv = u' - u'v' \overset{uv=u'v'}{\Rightarrow} u = u' \overset{u\neq 0}{\Rightarrow} v = v' \ .$$

     Επομένως T 1-1.
  2. $T(R^*) = R$. Από τον ορισμό του R^* είναι άμεσο ότι $T(R^*) = R$ καθώς οι εξισώσεις του συνόρου του R^* προέκυψαν από τις εξισώσεις του συνόρου R χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $x = x(u, v)$ και $y = y(u, v)$.

Έστω $(u,v) \in R^*$, τότε

$$(x,y) = (u - uv, uv) \Rightarrow u = x + y \ , \ v = \frac{y}{x+y} \ ,$$

για $x + y = u \neq 0$. Άρα

$$T(u,v) = T(x+y, \frac{y}{x+y}) = (x+y-(x+y)\frac{y}{x+y}, (x+y)\frac{y}{x+y}) = (x,y) \in R \ .$$

Επομένως έχουμε ότι $T(R^*) = R$.

3. από 2η κουκίδα έχουμε $J(u,v) \neq 0$.

- Από τα παραπάνω και το Θεώρημα 2 του 6.2 έχουμε ότι

$$\iint_R \frac{1}{x+y} dA = \iint_{R^*} \frac{1}{u} ududv = \int_0^1 \int_1^4 dudv = 3 \ .$$

Μεθοδολογία

1. Βρίσκουμε το R^* του οποίου η εικόνα μέσω των μετ/μων $x = x(u,v)$ και $y = y(u,v)$ είναι το χωρίο ολοκλήρωσης R. Είναι χρήσιμο να θυμόμαστε ότι

$$T: \ boundary \ of \ R^* \ \rightarrow \ boundary \ of \ R \ \ ,$$

υπό τον μετ/μο T. Συγκεκριμένα όταν οι εξισώσεις του συνόρου του R δίνονται, τότε οι αντίστοιχες εξισώσεις του συνόρου R^* μπορούν να προσδιοριστούν εκφράζοντας τις μεταβλητές συναρτήσει των καινούριων ($x = x(u,v)$ και $y = y(u,v)$).

2. Υπολογισμός της $f(x(u,v), y(u,v))$

3. Υπολογισμός της Ιακωβιανής η οποία ορίζει την αντιστοιχία των $dA = dxdy$ με το $dA^* = dudv$.

4. Υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος fJ στο R^*. Ο στόχος της αλλαγής είναι να απλοποιήσει τον υπολογισμό αυτόν.

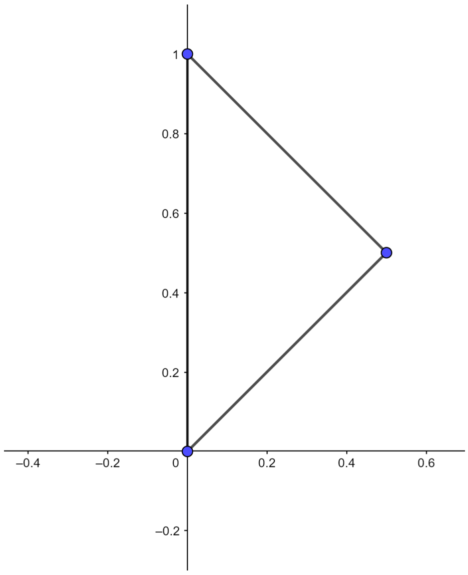
Άσκηση 2 (27 κεφ 6.2)

Έστω D το τρίγωνο του xy επιπέδου με γωνίες $(0,0), (1/2,1/2), (1,0)$. Να υπολογισθεί:

$$\iint_D cos\pi \frac{x-y}{x+y} dxdy \ ,$$

κάνοντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής.

Λύση



- Το τρίγωνο D φράσσεται από τις ευθείες $y = 1$, $y = x$ και $y + x = 1$.
- Θεωρούμε τις μεταβλητές $u = x - y$ και $v = x + y$
- Ο μετασχηματισμός θα είναι γραμμικός άρα μπορούμε να τον γράψουμε σε μορφή πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \ ,$$

Δηλαδή $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, με $det(T) = 2$ που σημαίνει ότι έχει αντίστροφο μετασχηματισμό τον αντίστροφο πίνακα

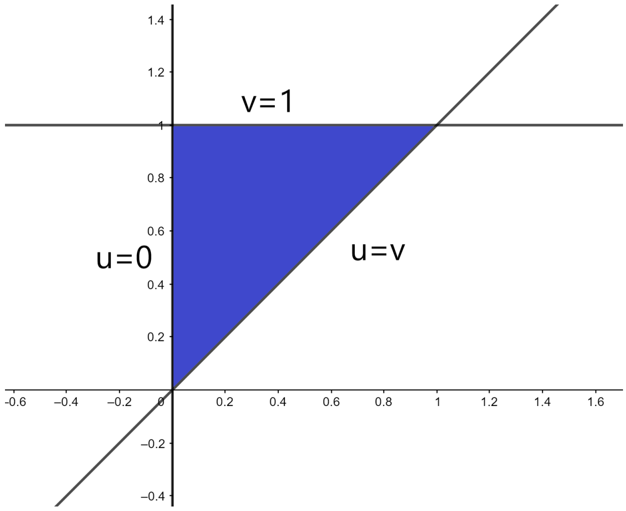
$$T^{-1} = \frac{1}{det(T)} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \ ,$$

- $$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ (x, y) = ((u + v)/2, (v - u)/2).$$

- Το χωρίο D ως y απλό είναι

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \ , \ x \leqslant y \leqslant 1 - x\right\} \ .$$

- $$\begin{cases} y = 0 \ \Rightarrow \ u = v \\ y = x \ \Rightarrow \ u = 0 \\ x + y = 1 \ \Rightarrow \ v = 1 \end{cases} \ .$$



- $\iint_D cos\pi \dfrac{x-y}{x+y} dxdy = \int_0^1 \int_0^v cos\pi (\dfrac{u}{v})(\dfrac{1}{2}) dudv$
  $\int_0^v \dfrac{1}{2} cos\left(\dfrac{\pi u}{v}\right) du = \dfrac{v}{2\pi} sin\left(\dfrac{\pi u}{v}\right)\Big|_{u=0}^{u=v} = 0 - 0 = 0$.
  $\int_0^1 0 dv = 0.$

Άσκηση 3 (Άσκηση 30 Κεφ 6.2)

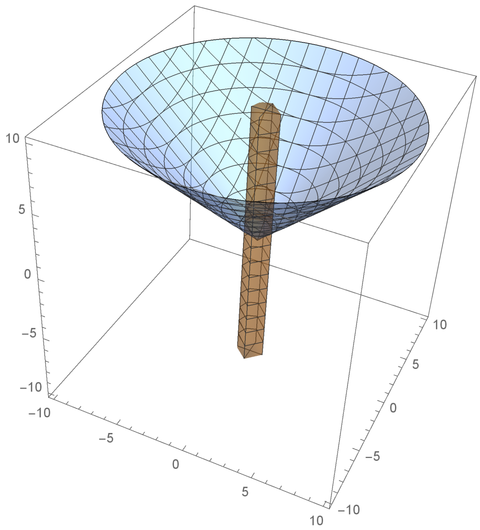
Να υπολογισθούν χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες
$a)$ $\iiint_B zdxdydz$, όπου B το στερεό εντός του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 1$, πάνω από το xy επίπεδο και κάτω από τον κώνο $z = (x^2 + y^2)^{(1/2)}$.

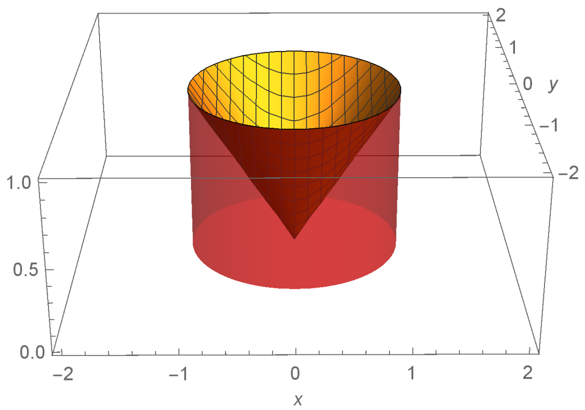
$b)$ $\iiint_W (x^2 + y^2 + z^2)^{(-1/2)} dxdydz$, όπου W το στερεό που προσδιορίζεται από τις σχέσεις

$$\frac{1}{2} \leqslant z \leqslant 1 \ , \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \ .$$

Λύση

$a)$





Είναι σαφές ότι $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$. Για να βρούμε το ύψος (επίπεδο $z = c$) στο οποίο τέμνει ο κύλινδρος τον κώνο απαλοίφουμε τα x, y από τις 2 εξισώσεις.

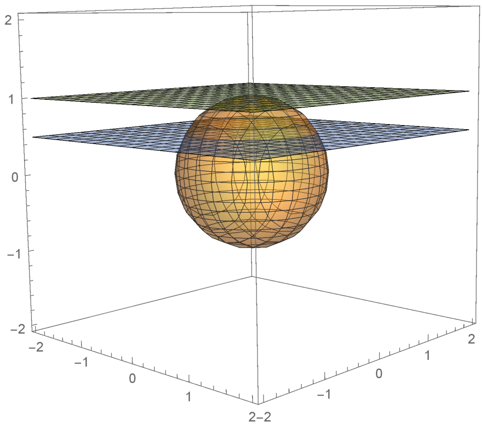
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = (x^2 + y^2)^{(1/2)} \end{cases} \Rightarrow z = 1 \ ,$$

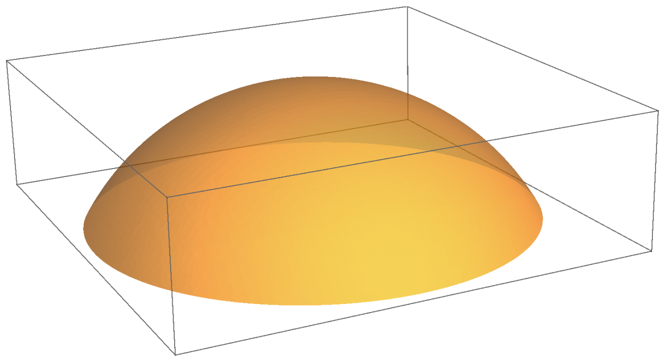
το οποίο δείχνει επίσης ότι το η προβολή του στερεού στο xy επίπεδο έχει σύνορο τον κύκλο $x^2+y^2=1$. Καθώς θέλουμε να είμαστε εντός του κυλίνδρου αυτό σημαίνει ότι $x^2+y^2\leqslant 1$. Επομένως το χωρίο ολοκλήρωσης του xy επιπέδου είναι ο κυκλικός δίσκος $x^2+y^2\leqslant 1$.

- $x=rcos\theta$, $y=rsin\theta$, $1\geqslant r\geqslant 0$, $\theta\in[0,2\pi]$, $0\leqslant z\ \leqslant (r^2)^{(1/2)}=r$.
- $J=r$ για τον μετ/μο σε κυλινδρικές.
-

$$\iiint_B zdxdydz=\iiint_{B^*} zrdrd\theta dz=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^r zrdzdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^r rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{r^3}{2}drd\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{8}\right]_0^1 d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}d\theta=\frac{\pi}{4}\ .$$

$b)$





Εδώ έχουμε απευθείας ότι $\frac{1}{2}\leqslant z\leqslant 1$ άρα το στερεό είναι εύκολο να εκφρασθεί ως θ απλό ή ως r απλό.

- $x=rcos\theta$, $y=rsin\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$ και καθώς $r^2=x^2+y^2$ προκύπτει ότι $r^2+z^2\leqslant 1$. Γνωρίζοντας ότι $r\geqslant 0$ έχουμε ότι $0\leqslant r\leqslant\sqrt{1-z^2}$.
- $J=r$ στις κυλινδρικές
-

$$\iiint_W (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}dxdydz=\iiint_{W^*}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}rdrd\theta dz$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_{1/2}^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}drdzd\theta=\int_0^{2\pi}\int_{1/2}^1\left[\sqrt{r^2+z^2}\right]_0^{\sqrt{1-z^2}}dzd\theta$$
$$\int_0^{2\pi}\int_{1/2}^1(1-z)dzd\theta=\int_0^{2\pi}\left[z-\frac{z^2}{2}\right]_{1/2}^1 d\theta=\int_0^{2\pi}1/8d\theta=\pi/4\ .$$

Φροντιστηριακό μάθημα 14-01-2022

Άσκηση 27 βιβλίου κεφ 7.1
Να υπολογιστεί το $\int_{\overrightarrow{c}} f\, ds$, όπου $f(x,y,z)=z$ και $\overrightarrow{c}(t)=(tcost, tsint, t)$ για $0 \le t \le t_0$.

Λύση

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{c}'(t)=(cost-tsint, sint+tcost, 1)\\
&\overrightarrow{c}'(t)\cdot\overrightarrow{c}'(t)=cos^2t-2tcostsint+t^2sin^2t+sin^2t+2tsintcost+t^2cos^2t+1=t^2+2\\
&\|\overrightarrow{c}'(t)\|=\sqrt{\overrightarrow{c}'(t)\cdot\overrightarrow{c}'(t)}=\sqrt{t^2+2}\\
&f(x(t),y(t),z(t))=z(t)=t
\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_{\overrightarrow{c}} f\, ds=\int_0^{t_0} t\sqrt{t^2+2}dt=\left[\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(t^2+2\right)^{3/2}\right]_0^{t_0}=\frac{1}{3}\left(\left(t_0^2+2\right)^{3/2}-2^{3/2}\right)$$

Άσκηση 9 βιβλίου κεφ 7.2
Να υπολογιστεί το $\int_{\overrightarrow{c}} ydx+(3y^3-x)\,dy+zdz$, $\forall \overrightarrow{c}(t)=(t,t^n,0)$, $0\le t\le 1$, όπου $n=1,2,3,...$

Λύση

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{c}'(t)=\left(1,nt^{n-1},0\right)\\
&\overrightarrow{F}(x,y,z)=\left(y,3y^3-x,z\right)\\
&\overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{c}(t)\right)=\left(t^n,3t^{3n}-t,0\right)\\
&\overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{c}(t)\right)\cdot\overrightarrow{c}'(t)=(1-n)t^n+3nt^{4n-1}
\end{aligned}$$

οπότε

$$\int_{\overrightarrow{c}} ydx+\left(3y^3-x\right)dy+zdz=\int_0^1(1-n)t^n+3nt^{4n-1}dt=\left[(1-n)\frac{t^{n+1}}{n+1}+3n\frac{t^{4n}}{4n}\right]_0^1=\frac{1-n}{n+1}+\frac{3}{4}\ .$$

Άσκηση 13 βιβλίου κεφ 7.3
α) $x=h(y,z)$

$$\begin{aligned}
&\Phi(y,z)=(h(y,z),y,z)\\
&\Phi_y=(h_y,1,0)\\
&\Phi_z=(h_z,0,1)\\
&\Phi_y\times\Phi_z=\begin{vmatrix} i & j & k\\ h_y & 1 & 0\\ h_z & 0 & 1\end{vmatrix}=(1,-h_y,-h_z)
\end{aligned}$$

Έστω (x_0, y_0, z_0) με $x_0 = h(y_0, z_0)$ σημείο του επιπέδου. Η εξίσωση του επιπέδου δίνεται από:

$$(1, -h_y(y_0, z_0), -h_z(y_0, z_0)) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \ .$$

Άσκηση 14 βιβλίου κεφ 7.3

Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτομενικού επιπέδου στην επφάνεια $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u^2 + v^2$ στο (1,1).

Λύση

$$\begin{aligned}
&\Phi(u, v) = (u^2, v^2, u^2 + v^2) \\
&\Phi_u = (2u, 0, 2u) \\
&\Phi_v = (0, 2v, 2v) \\
&\Phi_u \times \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2u & 0 & 2u \\ 0 & 2v & 2v \end{vmatrix} = (-4uv, -4uv, 4uv)
\end{aligned}$$

Έχουμε $\Phi(1, 1) = (1, 1, 2)$ και $\Phi_u \times \Phi_v\,(1, 1) = (-4, -4, 4)$.

Έστω ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου (x, y, z). Η ζητούμενη εξίσωση του επιπέδου λοιπόν δίνεται από:

$$(-4, -4, 4) \cdot (x - 1, y - 1, z - 2) = 0 \ \Rightarrow \ x + y - z = 0 \ .$$

Άσκηση 21 βιβλίου κεφ 8.1

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα *Green* να υπολογιστεί το $\int_{C^+} (y^2 + x^3)\, dx + x^4 dy$, όπου C^+ η περίμετρος του τετραγώνου $[0, 1] \times [0, 1]$ με κατεύθυνση αντίθετη της φοράς του ρολογιού.

Λύση

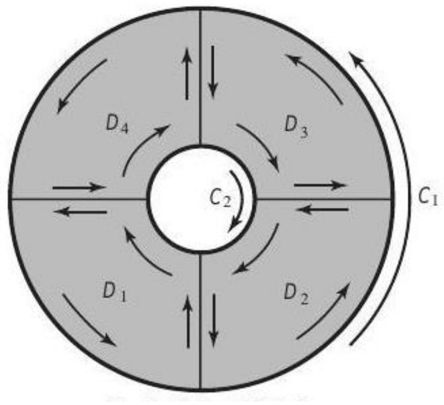
$$\begin{aligned}
&\int_{C^+} \left(y^2 + x^3\right) dx + x^4 dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} x^4 - \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + x^3\right)\right] dxdy = \iint_D \left(4x^3 - 2y\right) dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(4x^3 - 2y\right) dxdy = \int_0^1 \left[x^4 - 2xy\right]_0^1 dy = \int_0^1 (1 - 2y)\, dy = \left[y - y^2\right]_0^1 = 0 \ .
\end{aligned}$$

Άσκηση 17 βιβλίου κεφ 8.1

Να επαληθευθεί το θεώρημα *Green* για το ολοκλήρωμα

$$\int_C \left(2x^3 - y^3\right) dx + \left(x^3 + y^3\right) dy$$

όπου C ο μοναδιαίος κύκλος και D περιγράφεται από $a \leq x^2 + y^2 \leq b$ και προσανατολισμό όπως φαίνεται στο σχήμα.



Λύση
Το θεώρημα $Green$ δίνει

$$\begin{aligned}\int_C \left(2x^3 - y^3\right) dx + \left(x^3 + y^3\right) dy &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 - y^3)\right) dxdy \\ &= \iint_D \left(3x^2 + 3y^2\right) dxdy\end{aligned}$$

Επομένως θα υπολογίσουμε αρχικά το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και μετά το χωρικό ολοκλήρωμα και θα δούμε ότι βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

• Για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:
Έχουμε παραμέτρηση για τον κύκλο C_1^+ ακτίνας b και για τον κύκλο C_2^+ ακτίνας a:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{c_1}(\theta) &= \left(\sqrt{b}\,cos\theta, \sqrt{b}\,sin\theta\right) \;\Rightarrow dx = -\sqrt{b}\,sin\theta\,d\theta\;,\; dy = \sqrt{b}\,cos\theta\,d\theta \\ \overrightarrow{c_2}(\theta) &= \left(\sqrt{a}\,cos\theta, \sqrt{a}\,sin\theta\right) \;\Rightarrow dx = -\sqrt{a}\,sin\theta\,d\theta\;,\; dy = \sqrt{a}\,cos\theta\,d\theta\end{aligned}$$

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι το:

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{C_1^+} Pdx + Qdy + \int_{C_2^-} Pdx + Qdy = \int_{C_1^+} Pdx + Qdy - \int_{C_2^+} Pdx + Qdy\;,$$

όπου $P = 2x^3 - y^3$ και $Q = x^3 + y^3$.

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}&\int_{C_1^+} \left(2x^3 - y^3\right) dx + \left(x^3 + y^3\right) dy - \int_{C_2^+} \left(2x^3 - y^3\right) dx + \left(x^3 + y^3\right) dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{\left(2b^{3/2}cos^3\theta - b^{3/2}sin^3\theta\right)\left(-b^{1/2}sin\theta\right) + \left(b^{3/2}cos^3\theta + b^{3/2}sin^3\theta\right)\left(b^{1/2}cos\theta\right)\right\} d\theta \\ &- \int_0^{2\pi} \left\{\left(2a^{3/2}cos^3\theta - a^{3/2}sin^3\theta\right)\left(-a^{1/2}sin\theta\right) + \left(a^{3/2}cos^3\theta + a^{3/2}sin^3\theta\right)\left(a^{1/2}cos\theta\right)\right\} d\theta \\ &= \left(b^2 - a^2\right)\int_0^{2\pi} \left(-2cos^3\theta sin\theta + sin^3\theta cos\theta + sin^4\theta + cos^4\theta\right) d\theta \\ &= \left(b^2 - a^2\right)\left\{\left[2\frac{cos^4\theta}{4}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{sin^4\theta}{4}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \left(sin^2\theta(1 - cos^2\theta) + cos^2\theta(1 - sint^2\theta)\right) d\theta\right\} \\ &= \left(b^2 - a^2\right)\left\{0 + 0 + \int_0^{2\pi} \left(sin^2\theta + cos^2\theta - 2sin^2\theta cos^2\theta\right) d\theta\right\}\end{aligned}$$

$$= \left(b^2 - a^2\right) \left\{ \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \left(2 sin\theta cos\theta \right)^2 \right) d\theta \right\} = \left(b^2 - a^2\right) \left\{ [\theta]_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} sin^2(2\theta) d\theta \right\}$$
$$= \left(b^2 - a^2\right) \left\{ 2\pi - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - cos(4\theta)}{2} d\theta \right\} = \left(b^2 - a^2\right) \left\{ 2\pi - \frac{1}{4} \left([\theta]_0^{2\pi} - \left[\frac{sin(4\theta)}{4} \right]_0^{2\pi} \right) \right\}$$
$$= \left(b^2 - a^2\right) \left\{ 2\pi - \frac{\pi}{2} + 0 \right\} = \frac{3\pi}{2} \left(b^2 - a^2\right) \ ,$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι ταυτότητες

$$sin^2\theta + cos^2\theta = 1 \ , \ \ sin(2\theta) = 2 sin\theta cos\theta \ , \ \ sin^2(2\theta) = \frac{1 - cos(4\theta)}{2} \ .$$

• Για το χωρικό ολοκλήρωμα:
Θα κάνουμε χρήση πολικού μετασχηματισμού:

$$x = r cos\theta \ , \ \ y = r sin\theta \ , \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ \ \sqrt{a} \leq r \leq \sqrt{b} \ .$$

$$\iint_D \left(3x^2 + 3y^2 \right) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \left(3r^2 cos^2\theta + 3r^2 sin^2\theta \right) r \, dr d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} 3r^3 (cos^2\theta + sin^2\theta) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} 3r^3 dr d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} d\theta$$
$$= \frac{3}{4} \left(b^2 - a^2\right) \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta = \frac{3}{4} \left(b^2 - a^2\right) [\theta]_0^{2\pi} = \frac{3}{4} \left(b^2 - a^2\right) 2\pi = \frac{3\pi}{2} \left(b^2 - a^2\right) \ .$$

Φροντιστηριακό μάθημα 21-01-2022

Θεώρημα *Stokes*

- Το Θεώρημα *Green* είναι μία απλούστερη περίπτωση του *Stokes*.
- Συνδέει επικάμπυλιο καμπύλης C του $\mathbb{R}^3$ με επιφανειακό ολοκλήρωμα προσανατολισμένης επιφάνειας S της οποίας γεωμετρικό σύνορο είναι η καμπύλη C.
- Προφανώς χρειάζονται κατάλληλες υποθέσεις για τις επιφάνειες και τις καμπύλες που αναφέρονται. Θα τις προσδιορίσουμε για
    1. Επιφάνεια ως γράφημα της συνάρτησης $z = f(x, y)$.
    2. Γενικές παραμετρικές επιφάνειες.

1. Έστω S επιφάνεια που ορίζεται από το γράφημα της συνάρτησης $z = f(x, y)$ όπου $(x, y) \in D$. Υποθέτουμε ότι το $D \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα *Green* χωρίο (δηλαδή χωρίο στο οποίο εφαρμόζεται το Θ. *Green*).

Υπενθυμίζουμε ότι *Green* χωρίο είναι είτε ένα στοιχειώδες χωρίο (πεπερ. ένωση x απλών ή y απλών) είτε πεπερασμένη ένωση στοιχειωδών χωρίων με μόνα κοινά σημεία αυτά της κοινής τους συνοριακής καμπύλης. Το σύνορο του D αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό απλών κλειστών καμπυλών θετικά προσανατολισμένων.

Επομένως το σύνορο του D είναι κλειστή καμπύλη που δεν τέμνει τον εαυτό της ή αρκετές τέτοιες καμπύλες θετικά προσανατολισμένες (χωρίο στα αριστερά κινούμενοι στο σύνορο). Παίρνουμε την παραμέτρηση για την επιφάνεια S

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in D \ .$$

Επιλέγουμε το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}} = \left(-\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}, -\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}, 1\right)$. Τότε ο θετικός προσανατολισμός του ∂S της S ορίζεται ¨ανυψώνοντας’ τον θετικό προσανατολισμό του ∂D.

Επαγόμενος προσανατολισμός του συνόρου ∂S της S: Αν ένας παρατηρητής προχωράς κατά μήκος του συνόρου, με το μόναδιαίο κάθετο διάνυσμα να έχει την διεύθυνση του σώματος προς τα πάνω, τότε ακολουθεί θετικό προσανατολισμό του ∂S αν το εσωτερικό της S βρίσκεται αριστερά του. Συγκεκριμένα, έστω $c(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, μία παραμέτρηση του ∂D η οποία διατηρεί το πρόσημο. Τότε η συνοριακή καμπύλη $c_l = \partial S$ μπορεί να παραμετρικοποιηθεί ως

$$c_l(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))) \ , \quad t \in [a, b] \ .$$

Ο προσανατολισμός που προκύπτει από την παραμέτρηση αυτή (καθώς αυξάνεται το t) ορίζει τον θετικό προσανατολισμό του ∂S.

2. Τώρα πάμε στην περίπτωση παραμέτρησης της S από $r = r(u, v) : D \to \mathbb{R}^3$, όπου D το *Green* χωρίο του $\mathbb{R}^2$. Θεωρούμε την συνοριακή καμπύλη $c = \partial D$ του D.

Η πρώτη σκέψη ίσως θα ήταν να πάρει κανείς το $r(c(t))$. Αυτό ωστόσο δεν είναι σωστό.

Για παράδειγμα, η παραμέτρηση της σφαίρας $r(u,v) = (cosvcosu, cosvsinu, sinv)$, με $(u,v) \in D = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $r(\partial D)$ μας πηγαίνει στο ίδιο ημικύκλιο του xz επιπέδου.

Άλλο ένα παράδειγμα είναι ο κύλινδρος με παραμέτρηση $r(u,v) = (cosu, sinu, v)$, $(u,v) \in D = [0, 2\pi] \times [0,1]$. Αν πάρουμε το $r(\partial D)$ τότε το αποτέλεσμα θα είναι οι δύο κύκλοι (βάση και ταβάνι) και ένα ευθύγραμμο τμήμα να τα ενώνει.

Τα προβλήματα αυτά προκύπτουν όταν διαφορετικά σημεία του ∂D απεικονίζονται στο ίδιο ση-μείο. Επομένως για να πάρουμε το γεωμετρικό σύνορο ∂S μέσω της παραμέτρησης r, πρέπει να υποθέσουμε ότι r είναι 1-1 στο D.

Αν δεν υπάρχει 1-1 παραμέτρηση της επιφάνειας S τότε προσπαθούμε μέσω γραφήματος συνάρτησης 2 μεταβλητών $z = f(x,y)$.

- Να τονίσουμε ότι η επιφάνεια όπως την ορίζουμε εδώ δεν συμπίπτει με τον ορισμό που κάναμε στο κομμάτι της τοπολογίας του $\mathbb{R}^3$. Συγκεκριμένα:
- Οι επιφάνειες του $Stokes$ πρέπει να έχουν δύο πλευρές. Μία μονόπλευρη επιφάνεια ($Mobius\ strip$) δεν έχει προσανατολισμό.
- Μία επιφάνεια λέγεται κλειστή όταν δεν έχει σύνορο $Stokes$. Π.χ. η μοναδιαία σφαίρα.
- Θεώρημα: Αν S μία κατα τμήματα ομαλή κλειστή επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ και F διανυσματικό πεδίο C^1, τότε

$$\iint_S curlF \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = 0 \ .$$

Άσκηση 1 (Σημαντικό παράδειγμα)

Το παρακάτω παράδειγμα μας δείχνει ότι για να υπολογίσουμε το $\iint_S curl\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$ αρκεί να γνωρίζουμε τις τιμές του $\overrightarrow{F}$ στο ∂S και πουθενά αλλού. Επομένως ακόμα και αν έχουμε διαφορετικές επιφάνειες S_1 και S_2 με $\partial S_1 = \partial S_2$ (με συνθήκες προσανατολισμού να ικανοποιούνται) τότε

$$\iint_{S_1} curl\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S_1} = \iint_{S_2} curl\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S_2}$$

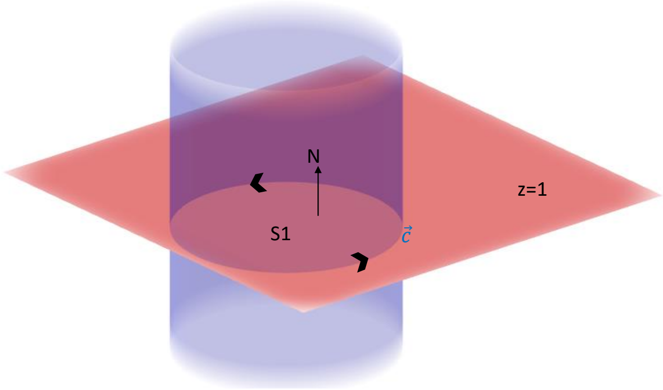
για C^1 διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$.
Αντίστοιχα, για να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα για μία απλή κλειστή καμπύλη μέσω του θεωρήματος $Stokes$, είμαστε ελεύθεροι να επιλέξουμε την πιό βολική επιφάνεια που φράσσεται από την καμπύλη αυτή (με κατάλληλο προσανατολισμό).

Να υπολογιστεί $\int_{\overrightarrow{C}}(2\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + y^2\overrightarrow{k}) \cdot d\overrightarrow{s}$, όπου $\overrightarrow{C}$ κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ στο $z = 1$ με προσανατολισμό αντίθετο της φοράς του ρολογιού όπως το βλέπουμε από ένα τυχαίο $(0,0,z)$ για $z > 1$ στον άξονα z. Επαληθεύστε με το θεώρημα $Stokes$.

Λύση:
Παραμέτρηση της $\overrightarrow{c}(t) = (cost, sint, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\int_{\overrightarrow{C}} (2, x, y^2) \cdot d\overrightarrow{s} = \int_0^{2\pi} \big(2, cost, sin^2 t\big) \cdot (-sint, cost, 0)\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-2sint + cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} \left(-2sint + \frac{1 + cos(2t)}{2}\right) dt = \left[2cost + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sin(2t)\right]_0^{2\pi} = \pi \ .$$

Για να το υπολογίσουμε με $Stokes$ χρειαζόμαστε επιφάνεια S με σύνορο $\overrightarrow{c}$ και κατάλληλο προσανατολισμό.
Έστω η $S_1 = \{x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ z = 1\}$ (δίσκος).



$$\overrightarrow{r}(u,v) = (u,v,1) \ , \ u^2+v^2=1$$
$$\overrightarrow{r_u} = (1,0,0)$$
$$\overrightarrow{r_v} = (0,1,0)$$
$$\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v} = \overrightarrow{N} = \overrightarrow{n} = (0,0,1) = \overrightarrow{k} \ \text{(ο προσανατολισμός είναι κατάλληλος)}$$
$$curl\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2 & x & y^2 \end{vmatrix} = (2y-0)\overrightarrow{i} - (0-0)\overrightarrow{j} + (1-0)\overrightarrow{k} = 2y\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} = (2y,0,1)$$

Επομένως έχουμε

$$\iint_{S_1} curl\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_{u^2+v^2\leq 1} \left(2y\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}\right) \cdot \overrightarrow{k}\, dA = \iint_{u^2+v^2\leq 1} (2y,0,1)\cdot(0,0,1)\, dA$$
$$= \iint_{u^2+v^2\leq 1} 1\, dA = E(u^2+v^2 \leq 1) = \pi \ .$$

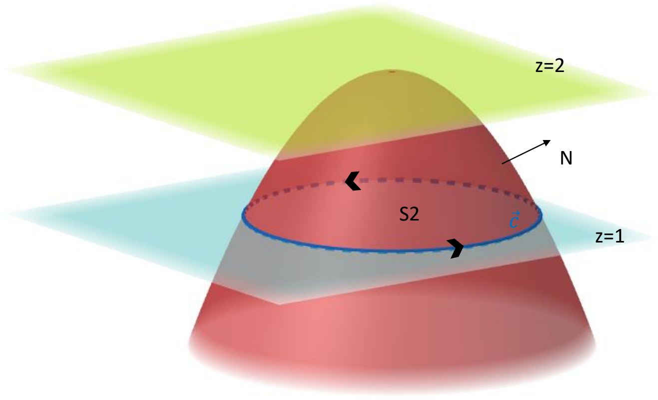
Αντίστοιχα αν πάρουμε S_2 το παραβολοειδές $z = 2 - x^2 - y^2$ μεταξύ $z = 1$ και $z = 2$, τότε το σύνορο ∂S_2 είναι $x^2 + y^2 = 1$ στο $z = 1$. Άρα $\partial S_1 = \partial S_2$.

$$\overrightarrow{r}(u,v) = (u, v, 2-u^2-v^2) \ , \ \text{με } u^2+v^2 \leq 1 \ ,$$

(αφού $1 \leq z \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 2 - u^2 - v^2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1$).

$$\overrightarrow{r_u} = (1,0,-2u)$$
$$\overrightarrow{r_v} = (0,1,-2v)$$
$$\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u,2v,1)$$

Το $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}$ έχει κατάλληλο προσανατολισμό ώστε η επιφάνεια να είναι θετικά προσανατολισμένη.



Επομένως έχουμε

$$\int_{\overrightarrow{C}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{s} = \iint_{S_2} curl\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S_2} = \iint_{u^2+v^2\leq 1} \left(2y\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}\right) \cdot \overrightarrow{N}\, dA$$
$$= \iint_{u^2+v^2\leq 1} (2v, 0, 1) \cdot (2u, 2v, 1)\, dA = \iint_{u^2+v^2\leq 1} (4uv + 1)\, dA$$

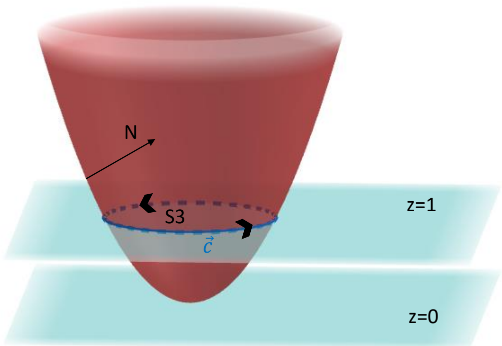
όπου θέτοντας

$$u = rcos\theta\ , \quad v = rsin\theta\ , \quad dA = r\, drd\theta$$

παίρνουμε

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(4r^2cos\theta sin\theta + 1\right) r\, drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(4r^3cos\theta sin\theta + r\right) drd\theta = \int_0^{2\pi} \left(cos\theta sin\theta \left[r^4\right]_0^1 + \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1\right) d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(cos\theta sin\theta + \frac{1}{2}\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}sin(2\theta) + \frac{1}{2}\right) d\theta = \left[-\frac{1}{4}cos(2\theta) + \frac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi} = \pi\ .$$

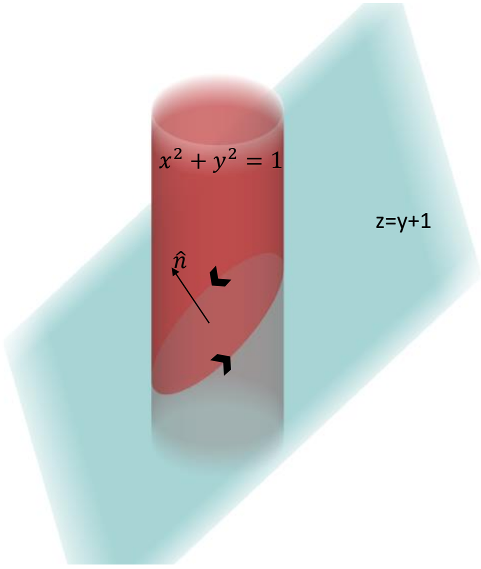
Αντίστοιχα αν παίρναμε S_3 την $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$ και $\overrightarrow{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ όπου προσοχή ότι σε αυτήν την περίπτωση το κάθετο το θέλουμε προς τα μέσα.



Άσκηση 2

Να υπολογιστεί το $\int_{\vec{c}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$, για $\vec{F} = (4z, -2x, 2x)$ όπου $\vec{c}$ η τομή του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 1$ και του επιπέδου $z = y + 1$ με προσανατολισμό αντίθετο της φοράς του ρολογιού καθώς βρισκόμαστε πάνω στο επίπεδο.

Λύση



- Υπολογισμός ως επικαμπύλιο:

Παραμέτρηση $\vec{c}(t) = (cost, sint, sint + 1)$
(αφού από $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x = cost$, $y = sint$ και από $z = y + 1 \Rightarrow z = sint + 1$).
άρα $\vec{c}'(t) = (-sint, cost, -cost + 1)$. Επομένως

$$\int_{\vec{c}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (4sint + 4, -2cost, 2cost) \cdot (-sint, cost, cost)\, dt = -4 \int_0^{2\pi} (sin^2 t + sint)\, dt$$
$$= -4 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - cos(2t)}{2} + sint \right) dt = -4 \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4} sin(2t) - cost \right]_0^{2\pi} = -4\pi \; .$$

- Υπολογισμός με επιφανειακό ολοκλήρωμα μεσω του θεωρήματος $Stokes$:

$$curl \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 4z & -2x & 2x \end{vmatrix} = (0, 2, -2)$$

άρα

$$\int_{\vec{c}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S curl \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S (0, 2, -2) \cdot d\vec{S} \; ,$$

όπου S το κομμάτι του $z = y + 1$ που τέμνεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$. Μία παραμέτρηση της S είναι

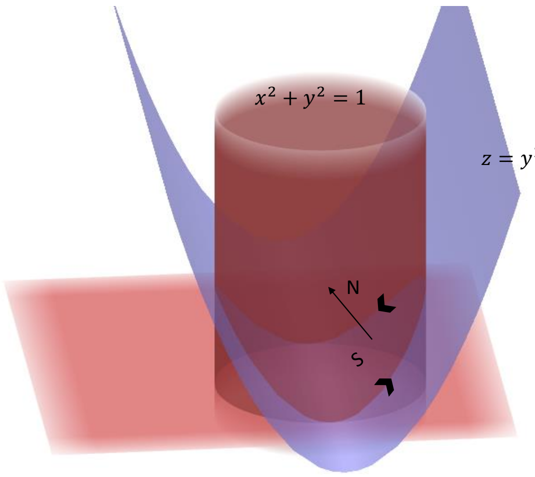
$$\vec{r}(u, v) = (u, v, v + 1) \; , \; u^2 + v^2 \leq 1$$
$$\vec{r_u} = (1, 0, 0)$$
$$\vec{r_v} = (0, 1, 1)$$
$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = (0, -1, 1)$$

Άρα

$$\iint_S (0,2,-2)\cdot d\overrightarrow{S} = \iint_{u^2+v^2\leq 1} (0,2,-2)\cdot(0,-1,1)\,dA$$
$$= \iint_{u^2+v^2\leq 1} (-4)\,dA = -4E(u^2+v^2\leq 1) = -4\pi\ .$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{\overrightarrow{c}} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{s}$, όπου $\overrightarrow{F} = 2yz\,\overrightarrow{i} + xz\,\overrightarrow{j} + xy\,\overrightarrow{k}$ και $\overrightarrow{c}$ η τομή του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ και της κυλινδρικής επιφάνειας $z=y^2$ με προσανατολισμό του σχήματος.



Λύση

Παραμέτρηση της S

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{r}(u,v) = (u,v,v^2)\,, \quad u^2+v^2\leq 1\\
&\overrightarrow{r_u} = (1,0,0)\\
&\overrightarrow{r_v} = (0,1,2v)\\
&\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r_u}\times\overrightarrow{r_v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2v\end{vmatrix} = (0,-2v,1)\\
&curl\,\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 2yz & xz & xy\end{vmatrix} = (0,y,-z)
\end{aligned}$$

Επομένως

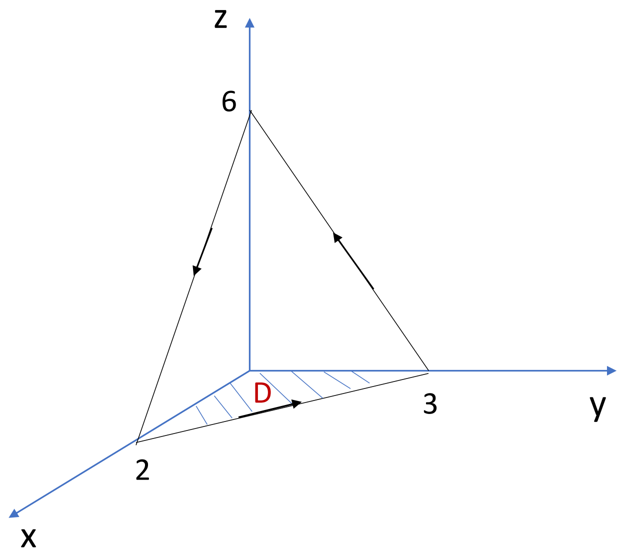
$$\int_{\overrightarrow{c}} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{s} = \iint_S curl\,\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = \iint_S curl\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{N}\,dS$$
$$= \iint_{u^2+v^2\leq 1} (0,v,-v^2)\cdot(0,-2v,1)\,dA = \iint_{u^2+v^2\leq 1} (-3v^2)\,dA$$

(θέτοντας $\quad u = r\cos\theta\ ,\ v = r\sin\theta\,,\ dA = r\,dr d\theta \quad$ παίρνουμε)

$$= -3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 sin^2\theta\, r\, dr d\theta = -3\int_0^{2\pi} sin^2\theta \left(\int_0^1 r^3 dr\right) d\theta$$
$$= -3\int_0^{2\pi} sin^2\theta \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta = -\frac{3}{4}\int_0^{2\pi} sin^2\theta\, d\theta = -\frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-cos(2\theta)}{2}\, d\theta$$
$$= -\frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}sin(2\theta)\right]_0^{2\pi} = -\frac{3\pi}{4}\ .$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{\vec{c}} \vec{F}\cdot d\vec{s}$, όπου $\vec{F} = (x+y)\,\vec{i} + (2x-z)\,\vec{j} + y\,\vec{k}$ και $\vec{c}$ το σύνορο τριγώνου με κορυφές $(2,0,0)$, $(0,3,0)$ και $(0,0,6)$ με προσανατολισμό του σχήματος



Λύση

Θα πάρουμε το τμήμα του επιπέδου που φράσσεται αποό την $\vec{c}$ ως επιφάνεια ολοκλήρωσης . Η εξίσωση $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6} = 1$ ή $z = 6-3x-2y$ έχει παραμέτρηση

$$\vec{r}(u,v) = (u, v, -3u-2v+6)\,, \quad (u,v)\in D,$$

όπου D το τριγωνικό χωρίο του xy με $x, y \geq 0$ και $0 = 6-3x-2y \Rightarrow 3x+2y = 6$.

$$\vec{r_u} = (1,0,-3)$$
$$\vec{r_v} = (0,1,-2)$$
$$\vec{r_u}\times\vec{r_u} = (3,2,1)$$
$$curl\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x+y & 2x-z & y \end{vmatrix} = (2,0,1)$$

Παίρνουμε λοιπόν

$$\int_{\vec{c}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_S curl\,\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D (2,0,1)\cdot(3,2,1)\, dA = 7\iint_D dA = 7E(D) = 7\left(\frac{2\cdot 3}{2}\right) = 21\ .$$

Άσκηση 5
Να δειχθεί ότι το θεώρημα *Green* είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος *Stokes*.

Λύση
Έστω $\overrightarrow{F} = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j}$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^2$ και $\overrightarrow{c}$ απλή κλειστή καμπύλη που είναι το σύνορο του *Green* χωρίου $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
Παραμέτρηση του D είναι η

$$\overrightarrow{r}(u,v) = (u,v,0)\,, \quad (u,v) \in D\,.$$

άρα

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{r_u} = (1,0,0)\\
&\overrightarrow{r_v} = (0,1,0)\\
&\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v} = (0,0,1) = \overrightarrow{k}\\
&curl\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

Από το θεώρημα *Stokes* έχουμε

$$\int_{\overrightarrow{c}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{s} = \iint_S curl\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}\,, \tag{1}$$

όπου

$$\int_{\overrightarrow{c}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{s} = \int_a^b (P,Q)\cdot(x',y')\,dt = \int_{\overrightarrow{c}} Pdx + Qdy\,. \tag{2}$$

για $\overrightarrow{c}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$, παραμέτρηση της $\overrightarrow{c}$. Επίσης,

$$\iint_S curl\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_D curl\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{k}\,dA = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k}\,dA = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA\,. \tag{3}$$

Από (1)-(3) έχουμε το ζητούμενο, δηλαδή το θεώρημα *Green*.

Άσκηση 33, βιβλίο 6.2

Έστω E το ελλειψοειδές $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$, όπου $a, b, c > 0$.
α) Να βρεθεί ο όγκος του E.
β) Να υπολογιστεί το $\iiint_E \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$
(Υπόδειξη: Με αλλαγή μεταβλητών και μετά με χρήση σφαιρικών συντεταγμένων).

Λύση:

Το ελλειψοειδές E ως z απλό γράφεται:

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D\,,\ -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \leq z \leq c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\right\}$$

όπου το χωρίο D του xy επιπέδου (το οποίο είναι μία έλλειψη), μπορούμε να το πάρουμε είτε σαν x απλό είτε σαν y απλό. Έστω σαν y απλό:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a \ , \ -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right\}$$

α) Ο όγκος δίνεται από το τριπλό ολοκλήρωμα

$$V(E) = \iiint_E 1 \, dxdydz = \int_{-a}^{a} \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \int_{-c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} dzdydx$$

Θα κάνουμε αλλαγή μεταβλητών:

$$\begin{cases} x = au \, , \\ y = bv \, , \\ z = cw \, . \end{cases}$$

Τότε η ορίζουσα της Ιακωβιανής ($Jacobi$) είναι

$$det \, J = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial w \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial w \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

και από τα παραπάνω παίρνουμε

$$V(E) = \iiint_E dxdydz = \iiint_{E^*} abc \, dudvdw \ ,$$

όπου E^* είναι η μοναδιαία σφαίρα (καθώς $E : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1 \Rightarrow E^* : u^2 + v^2 + z^2 \leq 1$).

Θα κάνουμε ξανά αλλαγή μεταβλητών (σφαιρικό μετασχηματισμό):

$$\begin{cases} u = \rho \cos\theta \sin\phi \, , \\ v = \rho \sin\theta \sin\phi \, , \\ w = \rho \cos\phi \, , \end{cases}$$

Τότε η ορίζουσα της Ιακωβιανής ($Jacobi$) είναι

$$det \, J = \begin{vmatrix} \partial u/\partial \rho & \partial u/\partial \theta & \partial u/\partial \phi \\ \partial v/\partial \rho & \partial v/\partial \theta & \partial v/\partial \phi \\ \partial w/\partial \rho & \partial w/\partial \theta & \partial w/\partial \phi \end{vmatrix} = -\rho^2 sin\phi$$

και από τα παραπάνω παίρνουμε

$$V(E) = \iiint_{E^*} abc \, dudvdw = \iiint_{E^{**}} abc \, \rho^2 sin\phi \, d\rho d\theta d\phi \ ,$$

όπου $E^{**} = \{0 \leq \rho \leq 1 \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ 0 \leq \phi \leq \pi\}$ άρα

$$\begin{aligned} V(E) &= abc \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 sin\phi \, d\rho d\theta d\phi = abc \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} sin\phi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 d\theta d\phi = \frac{abc}{3} \int_0^{\pi} sin\phi \, [\theta]_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{2\pi abc}{3} \int_0^{\pi} sin\phi d\phi = \frac{2\pi abc}{3} \left[-cos\phi \right]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3} abc \ . \end{aligned}$$

β) Από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\iiint_E \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz = \iiint_{E^*} \left(u^2+v^2+w^2\right) abc\, dudvdw = abc \iiint_{E^{**}} (\rho^2)\rho^2 sin\phi d\rho d\theta d\phi$$
$$= abc \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^4 sin\phi d\rho d\theta d\phi = abc \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} sin\phi \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 d\theta d\phi = \frac{abc}{5}\int_0^{\pi} sin\phi \, [\theta]_0^{2\pi} d\phi$$
$$= \frac{2\pi abc}{5}\int_0^{\pi} sin\phi d\phi = \frac{2\pi abc}{5}\left[-cos\phi\right]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{5} abc \;.$$

Σχόλιο:
Αν δεν υπήρχε η υπόδειξη της άσκησης, θα μπορούσαμε να κάνουμε κατευθείαν έναν μετασχηματισμό αντί για δύο για να υπολογίσουμε τα ζητούμενα ολοκληρώματα. Συγκεκριμένα, εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta\sin\phi\,, \\ y = b\rho\sin\theta\sin\phi\,, \\ z = c\rho\cos\phi\,, \end{cases}$$

με

$$0 \le \theta \le 2\pi\,,\ 0 \le \phi \le \pi\,,\ 0 \le \rho \le 1$$

όπου η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι:

$$det\, J = \begin{vmatrix} \partial x/\partial\rho & \partial x/\partial\theta & \partial x/\partial\phi \\ \partial y/\partial\rho & \partial y/\partial\theta & \partial y/\partial\phi \\ \partial z/\partial\rho & \partial z/\partial\theta & \partial z/\partial\phi \end{vmatrix} = -abc\rho^2 sin\phi$$

Τότε π.χ. για το ερώτημα α) ο όγκος του ελλειψοειδούς δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$V(B) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 abc\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta = ... = \frac{4\pi}{3}abc.$$