$f: U \to \mathbb{R}$ $\quad U \subset \mathbb{R}^n$

C^r συνάρτηση

$x \in U, \quad r \in \mathbb{N}^+, \quad h \in \mathbb{R}^n$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| \ (h_1, h_2, \ldots, h_n)$

ορίζουμε

$$D_r f(x)(h) = \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_r \le n} \frac{\partial^r f(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}} h_{i_1} \cdots h_{i_r}$$

παράδειγμα

$$r=1: \quad D_1 f(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} h_i = \nabla f(x) \cdot h$$

$r=2$

$$D_2 f(x)(h) = \sum_{1 \le i_1, i_2 \le n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} h_{i_1} h_{i_2}$$

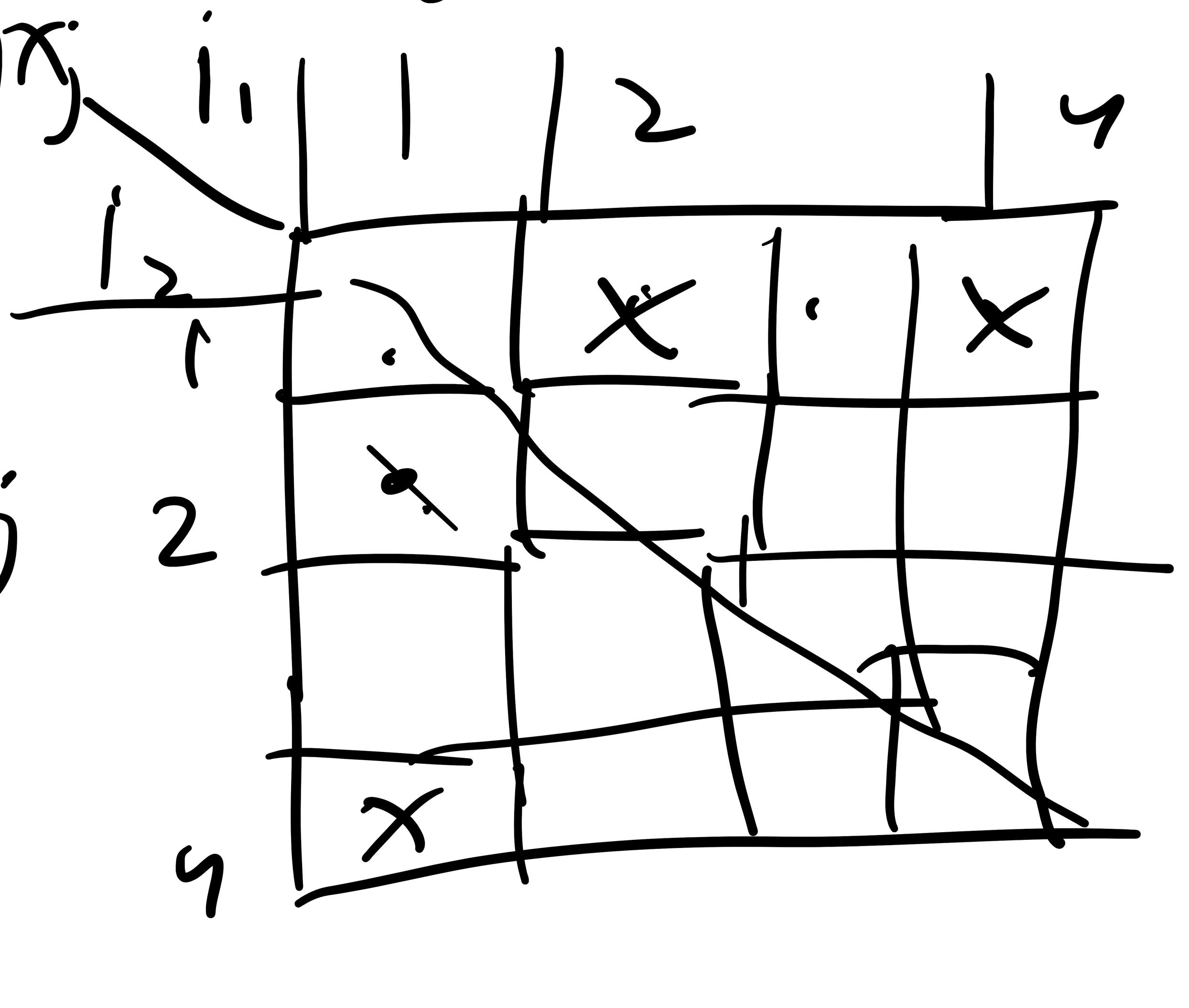
i, j

$1 \quad n$

$n \quad 1$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} h_i^2 + \sum_{i \ne j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

$$= \quad '' \quad + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$



Ορισμός f, r όπως πιο πάνω

$x_0 \in U$. Πολυώνυμο Taylor r-τάξης στο x_0 λέμε το πολυώνυμο n μεταβλητών $x = (x_1, \quad , x_n)$ με τύπο

$$T_{r, x_0} f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{j!} D_j f(x_0)(x - x_0)$$

προσέγγιση Taylor r-τάξης

Άσκηση 10 έστω $f(x, y) = x\cos(\pi y) - y\sin(\pi x)$.

Βρείτε την προσέγγιση Taylor τάξης 2 στο σημείο $w_0 = (1, 2)$.

Λύση

$$T_{2, w_0} f(x, y) = f(w_0) + \nabla f(w_0) \cdot ((x, y) - w_0)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(w_0)}{\partial x^2} (x - 1)^2 + \frac{\partial^2 f(w_0)}{\partial y^2} (y - 2)^2 \right.$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 f(w_0)}{\partial x \partial y} (x-1)(y-2) \Big)$$

$$f(w_0) = 1 - 2\sin\pi = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(\pi y) - y\pi\cos(\pi x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(w_0) = 1 - 2\pi \overset{-1}{\cos\pi} = 1 + 2\pi$$

ομοια $\frac{\partial f}{\partial y}(w_0) = 0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(w_0) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(w_0) = -\pi^2$$

$$\frac{\partial^2 f(w_0)}{\partial x \partial y} = \pi$$

Αρα $T_{2,w_0} f(x,y) = 1 + (1+2\pi)(x-1)$

$$+ 0 \cdot (y-2) + \frac{1}{2} \cdot 0 \, (x-1)^2 + \frac{1}{2}(-\pi^2)(y-2)^2$$

$$+ \pi (x-1)(y-2)$$

Θεώρημα Taylor

$U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό

$r \in \mathbb{N}$, $f: U \to \mathbb{R}$ ώστε όλες

οι παράγωγοι μέχρι και τάξης $r+1$

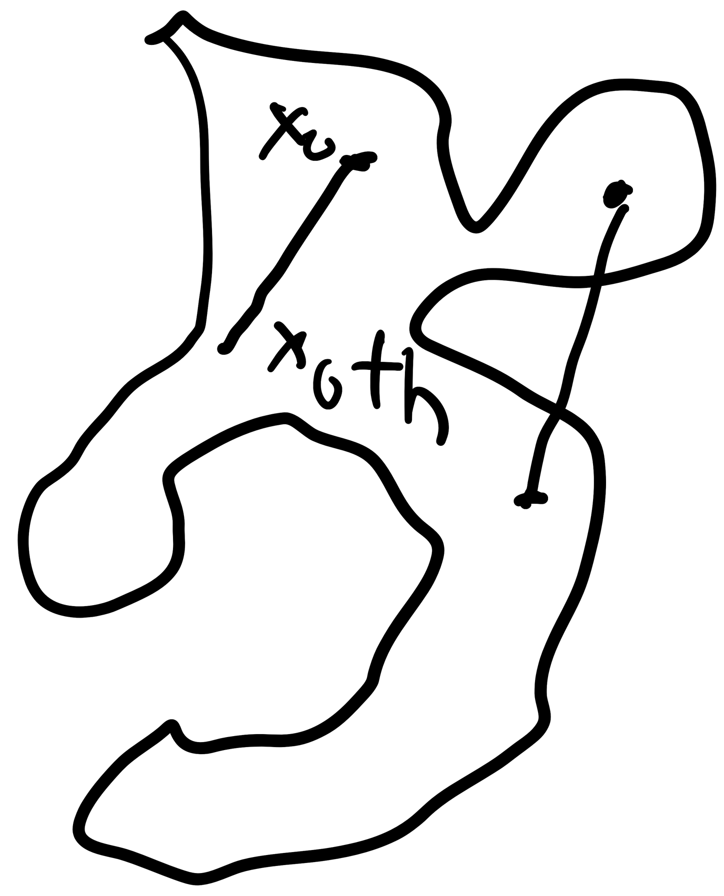
να υπάρχουν.

Αν $x_0 \in U$ και $h \in \mathbb{R}^n$ ώστε $[x_0, x_0+h] \subset U$

$\uparrow$ ευθ. τμήμα

Τότε $\exists\, \xi \in [x_0, x_0+h]$

ώστε



$$f(x_0+h) = T_{r,x_0} f(x_0+h) + \frac{1}{(r+1)!} \underbrace{D_{r+1} f(\xi)(h)}_{\text{τάξης } \|h\|^{r+1}}$$

Το βιβλίο έχει μόνο την περίπτωση

$r = 2$

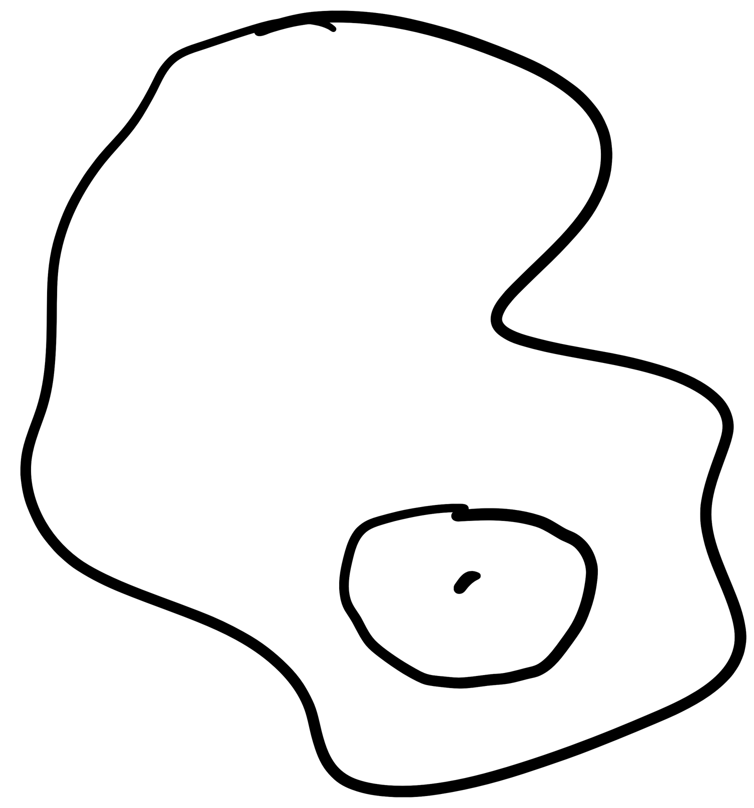
§ 3.3 Ακρότατα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

$U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $f: U \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$

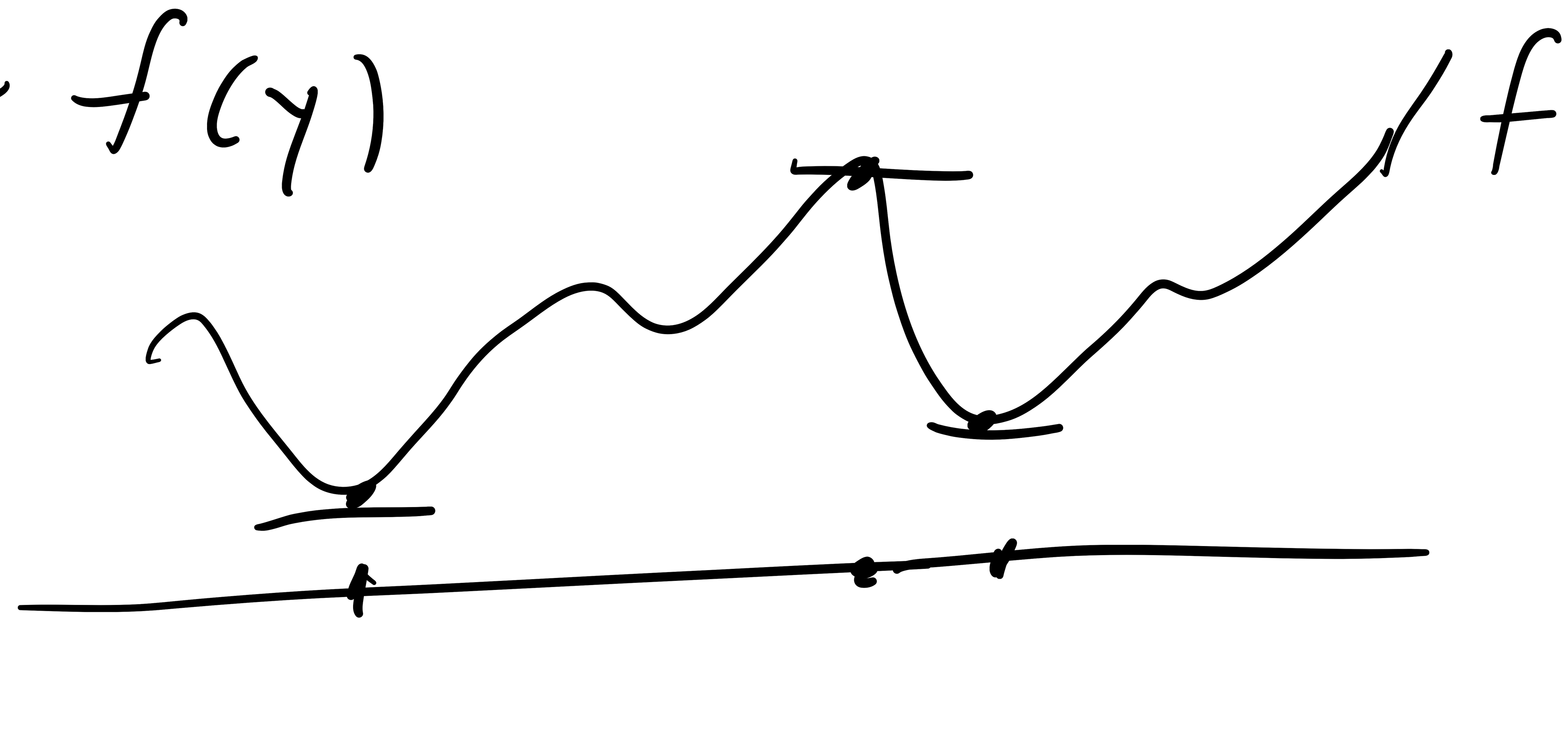
<u>Ορισμός)</u> Λέμε ότι το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου (μεγίστου) για την f αν $\exists\, \delta > 0$ ώστε $D_\delta(x_0) \subset U$ και $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in D_\delta(x_0)$

(αντίστοιχα, $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in D_\delta(x_0)$).

Το x_0 λέγεται <u>σαγματικό σημείο</u> αν $\forall \delta > 0$ $\exists\, x, y \in U$ με $x, y \in D_\delta(x_0)$ και



$$f(x) < f(x_0) < f(y)$$



Κριτήριο πρώτης παραγώγου

Αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $\nabla f(x_0)=0$. Δηλ. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=0$ για $i=1, \dots, n$.

Αποδ

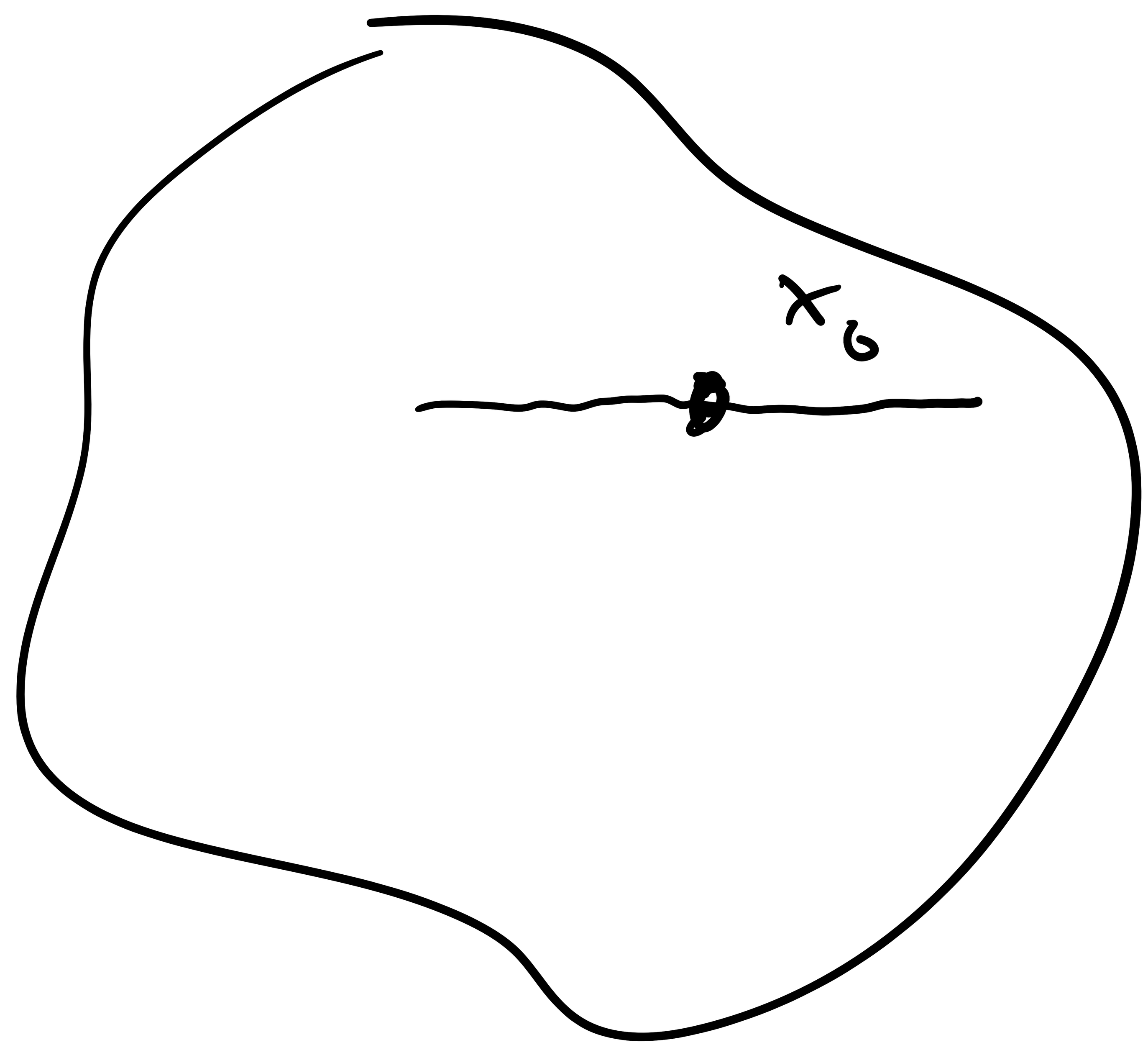
Έστω $i \in \{1,2,\dots,n\}$

Τότε η συνάρτηση $h(t)=f(x_0+te_i)$ έχει τοπικό ακρότατο όταν $t=0$

πρέπει $h'(0)=0$

Αλλά $h'(0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$

$i=1$



Ένα $x_0 \in U$ λέγεται κρίσιμο σημείο για την f αν

- η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ή
- η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $\nabla f(x_0)=0$

Παραδείγματα

1) $f(x,y)=x^2+y^2$

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = 0 \Rightarrow (x,y)=(0,0)$$

κρίσιμο σημείο

2) $f(x,y)=x^2-y^2$

$$\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow (x,y)=(0,0)$$

κρίσιμο σημείο

3) $f(x,y)=x^2+y^2+3xy$

$$\nabla f(x,y) = (2x+3y, 2y+3x)$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow (x,y)=(0,0)$$

κρίσιμο σημείο

Ανάλυση

1) $x^2+y^2 > 0 = f(0,0)$

$\forall (x,y) \neq (0,0)$

2) $f(x,y) = x^2 - y^2$

$f(x,0) = x^2$ έχει ελάχιστο στο 0

$f(0,y) = -y^2$ " μέγιστο στο 0

3) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy = (x+y)^2 + xy$

$f(x,x) = 5x^2$ ελάχιστο στο 0

$f(x,-x) = -x^2$ μέγιστο στο 0

Άρα το $(0,0)$ σαγματικό σημείο

Το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου

Όταν $n=1$.

Αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)>0$ τότε

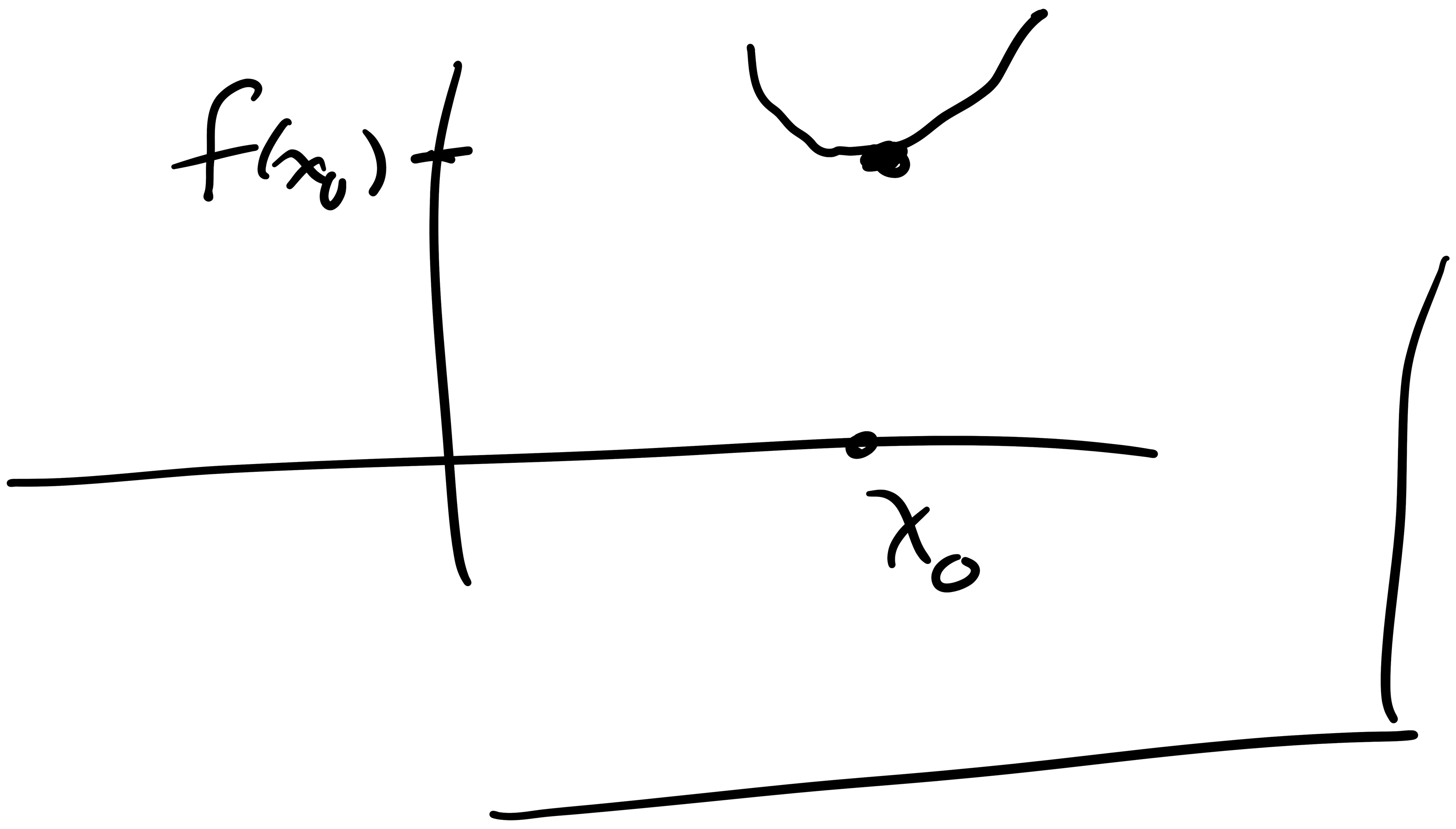
το x_0 σημείο τοπ. ελαχίστου

Αν $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)<0$

" " " μεγίστου

$$f(x_0+h) \simeq f(x_0) + \cancel{f'(x_0)\cdot h} + \frac{1}{2} f''(x_0) h^2$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\, h^2$$



Προσημασία

Έστω $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ $n \times n$ πίνακας

συμμετρικός. Δηλ. $a_{i,j} = a_{j,i}$

Σε αυτόν αντιστοιχεί μια τετραγωνική

μορφή, η $q_A(x) := x^t A x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$q_A(x) = [x_1 \ x_2 \quad x_n] \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

<u>Ορισμός</u> ο A λέγεται θετικά ορισμένος αν $q_A(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Λέγεται αρνητικά ορισμένος αν $q_A(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

(A θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές)

<u>Κριτήριο</u> $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός και D_r η ορίζουσα του πίνακα $(a_{ij})_{1 \le i,j \le r}$ για $r = 1, 2, \dots, n$ η πάνω αριστερά $r \times r$ γωνία του A.

$$\left(\begin{array}{c|c} r \times r & \\ \hline & \end{array}\right) = A$$

A θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow$

$$D_1, D_2, \dots, D_n > 0$$

A αρνητικά ορισμένος $\Leftrightarrow$

$$D_1 < 0,\ D_2 > 0,\ \dots,\ (-1)^n D_n > 0$$

π.χ. για $n=2$ και $A=\begin{pmatrix} a & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$

A θετική ορισμένη $\iff a>0,\ a\gamma-\beta^2>0$

<u>Παρατήρηση</u> Αν $\Delta_n \neq 0$ αλλά ο A δεν είναι θετική ή αρνητική ορισμένη τότε $\exists\, x, y \in \mathbb{R}^n$ ώστε $q_A(x)>0$ και $q_A(y)<0$.

$U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ C^2 συνάρτηση
ανοιχτό

και $x_0 \in U$. Εσσιανή της f στο x_0 ονομάζουμε τον πίνακα

$$Hf(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f (x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f (x_0)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f (x_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f (x_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f (x_0)}{\partial x_2^2} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

είναι συμμετρικός γιατί η f είναι C^2

$$f(x_0+h) \simeq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} h^t \cdot Hf(x_0) \cdot h$$

<u>Θεώρημα</u> (Κριτήριο δεύτερης παραγώγου)

$f: U \to \mathbb{R}$ C^2 συνάρτηση, $x_0 \in U$ με $\nabla f(x_0) = 0$.

i) Αν ο $Hf(x_0)$ είναι θετικά ορισμένος τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0

ii) Αν ο $Hf(x_0)$ είναι αρνητικά ...

... μέγιστο ...

iii) Αν ο $Hf(x_0)$ έχει ορίζουσα $\neq 0$ αλλά δεν είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος, τότε το x_0 είναι σαγματικό σημείο.

iv) Αν ο $Hf(x_0)$ έχει ορίζουσα $= 0$

Το x_0 μπορεί να είναι οτιδήποτε.
(Χρειάζεται ανάλυση κατά περίπτωση)