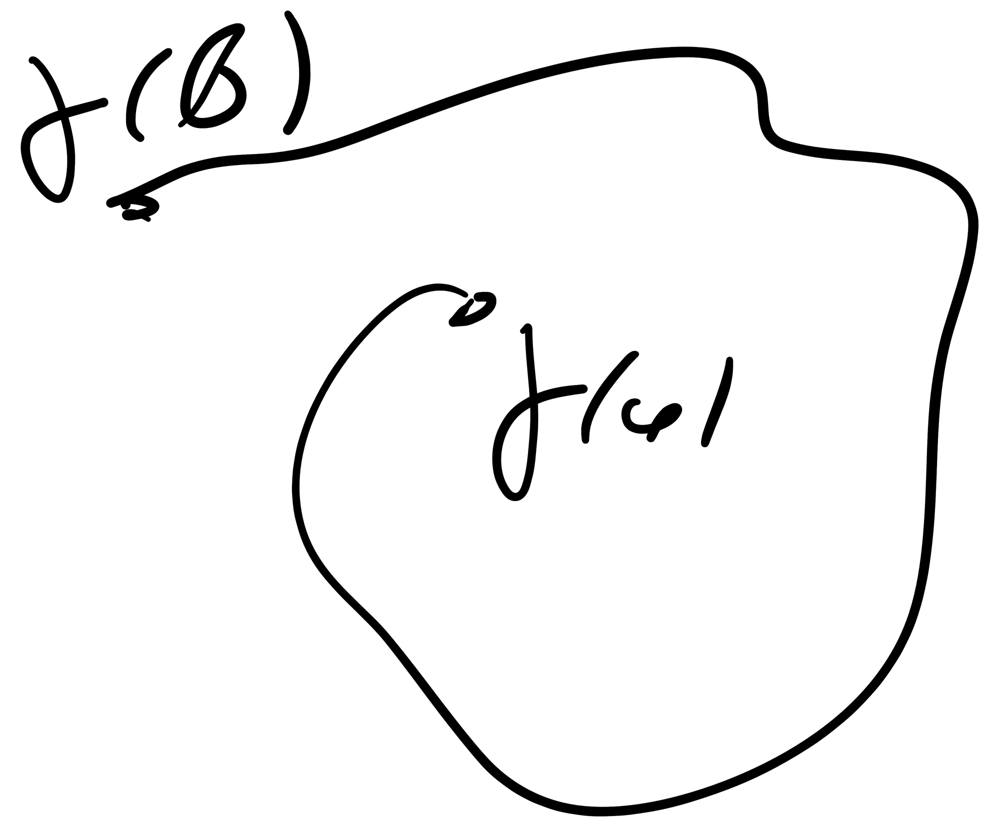
§ 2.4 Διαδρομή ή μονοπάτι στον $\mathbb{R}^n$ λέμε κάθε απεικόνιση

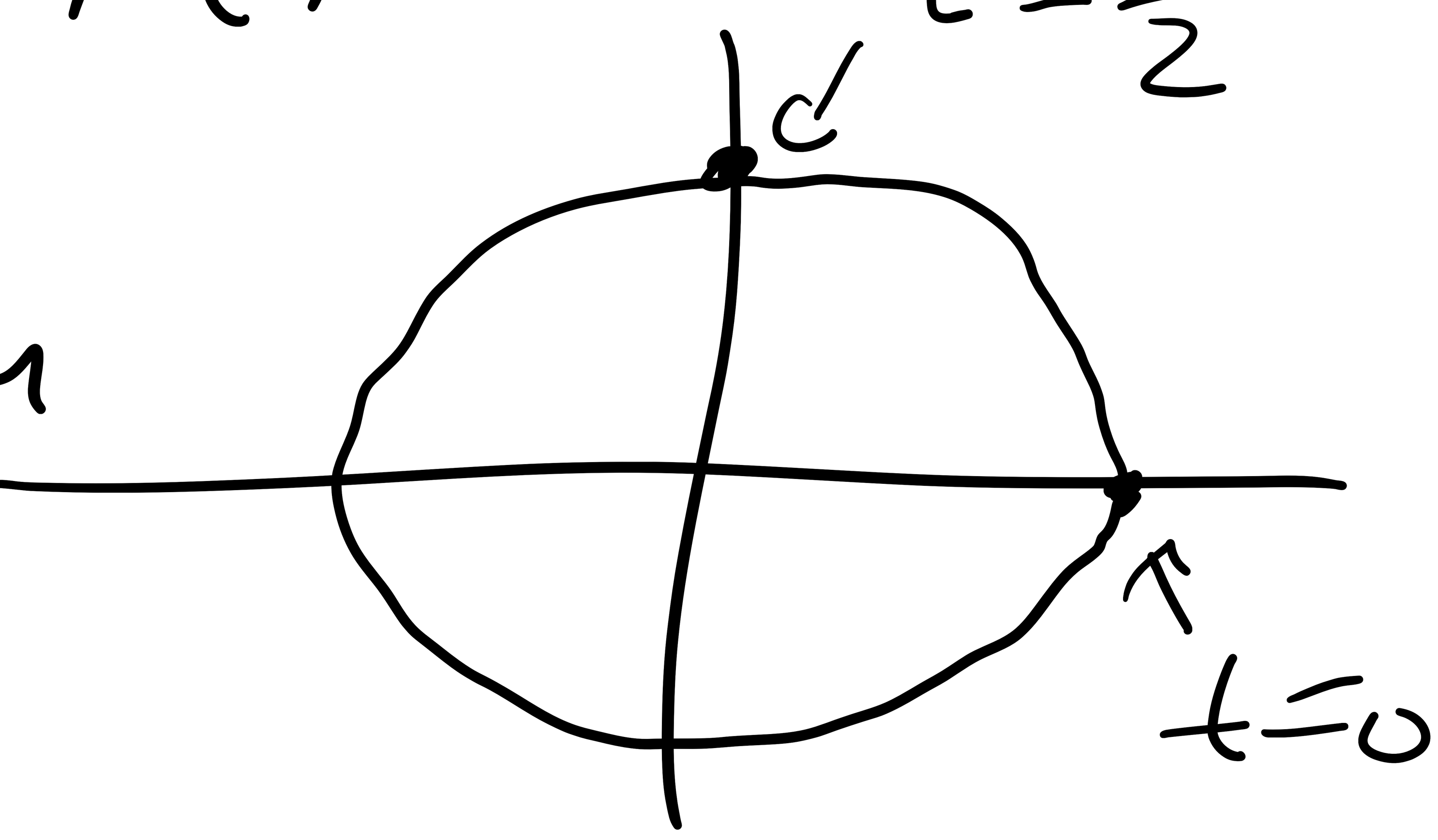
$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$



π.χ. $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$



$$C = \gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$$

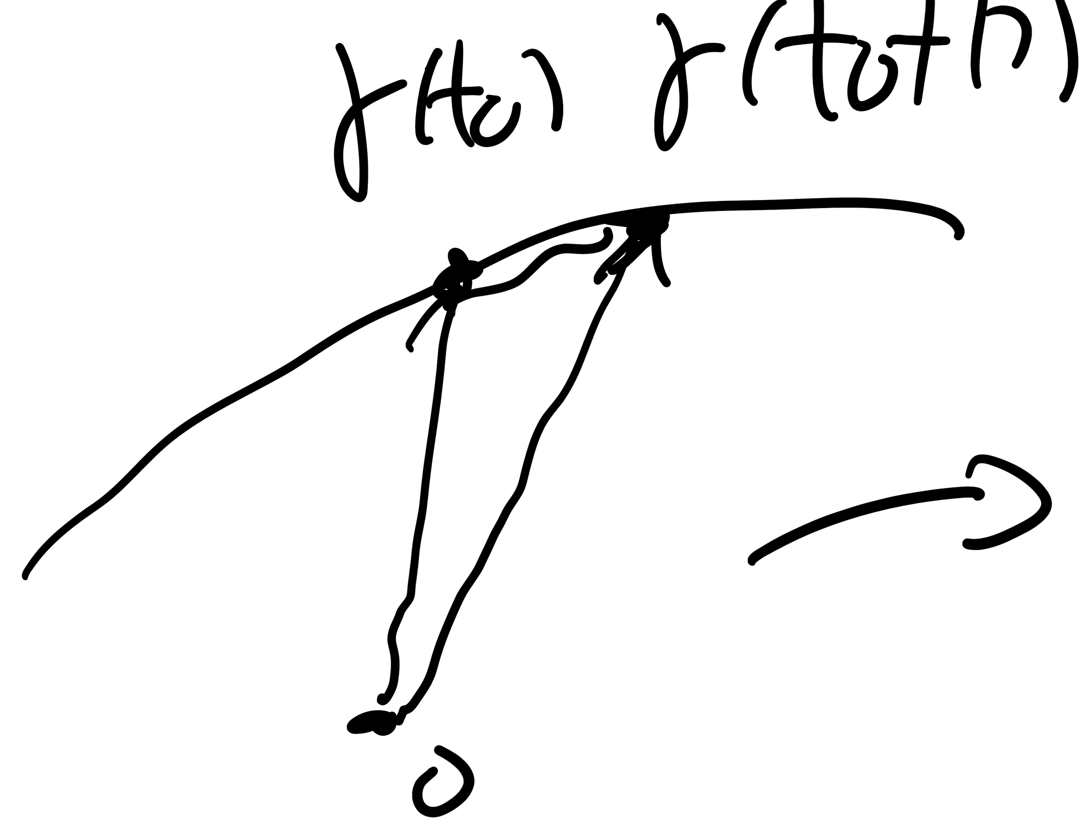
είναι μια καμπύλη

Η γ λέγεται παραμετρικοποίηση της καμπύλης.

π.χ. η $c(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ $t \in [0,1]$ είναι μια άλλη παραμετρικοποίηση του κύκλου.

Αν $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ παραμετρι-κοποίηση μιας καμπύλης C ώστε η γ να είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in (\alpha, \beta)$ και $\gamma'(t_0) \neq 0$ τότε το διάνυσμα $\gamma'(t_0) =$

$(\gamma_1'(t_0), \quad , \gamma_n'(t_0))$ είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη στο σημείο $\gamma(t_0)$.



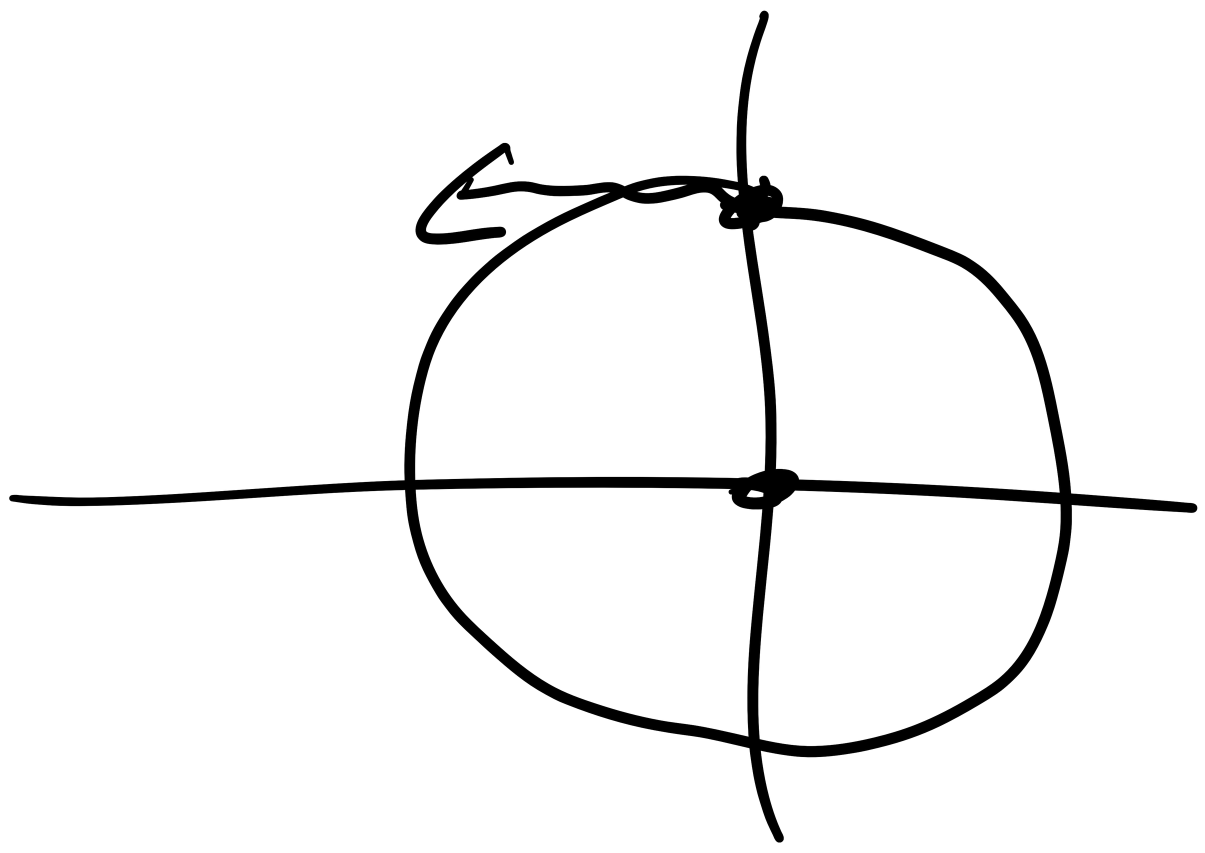
Παράδειγμα Έστω

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$\gamma'(\frac{\pi}{2}) = (-1, 0)$

$\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$



Συνεχίζουμε στην §2.6

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη

$\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε $S_\kappa = \{ x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = \kappa \} \neq \emptyset$

Αν $w_0 \in S_\kappa$ και $\nabla f(w_0) \neq 0 = (0,0,0)$

τότε το διάνυσμα $\nabla f(w_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια S_κ στο σημείο w_0.

Άρα το εφαπτ. επίπεδο στην S_κ στο w_0 έχει εξίσωση

$$\nabla f(w_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

<u>Άσκηση 8α)</u> Ποιο το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια

$$x^2 + 2y^2 + 3xz = 10$$

στο σημείο $(1, 2, \frac{1}{3})$

Λύση

Έστω $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3xz$$

έχουμε την επιφάνεια

$$\{ w \in \mathbb{R}^3 : f(w) = 10 \} = S_{10} \qquad w = (x,y,z)$$

$$w_0 = \left(1, 2, \frac{1}{3}\right) \in S_{10}$$

$$\nabla f(w) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) =$$

$$= (2x + 3z, 4y, 3x)$$

$$\nabla f(w_0) = \left(2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{3}, 4 \cdot 2, 3 \cdot 1 \right)$$

$$= (3, 8, 3)$$

Το εφαπτόμενο επίπεδο είναι το

$$\left(x-1, y-2, z-\frac{1}{3}\right) \cdot (3, 8, 3) = 0$$

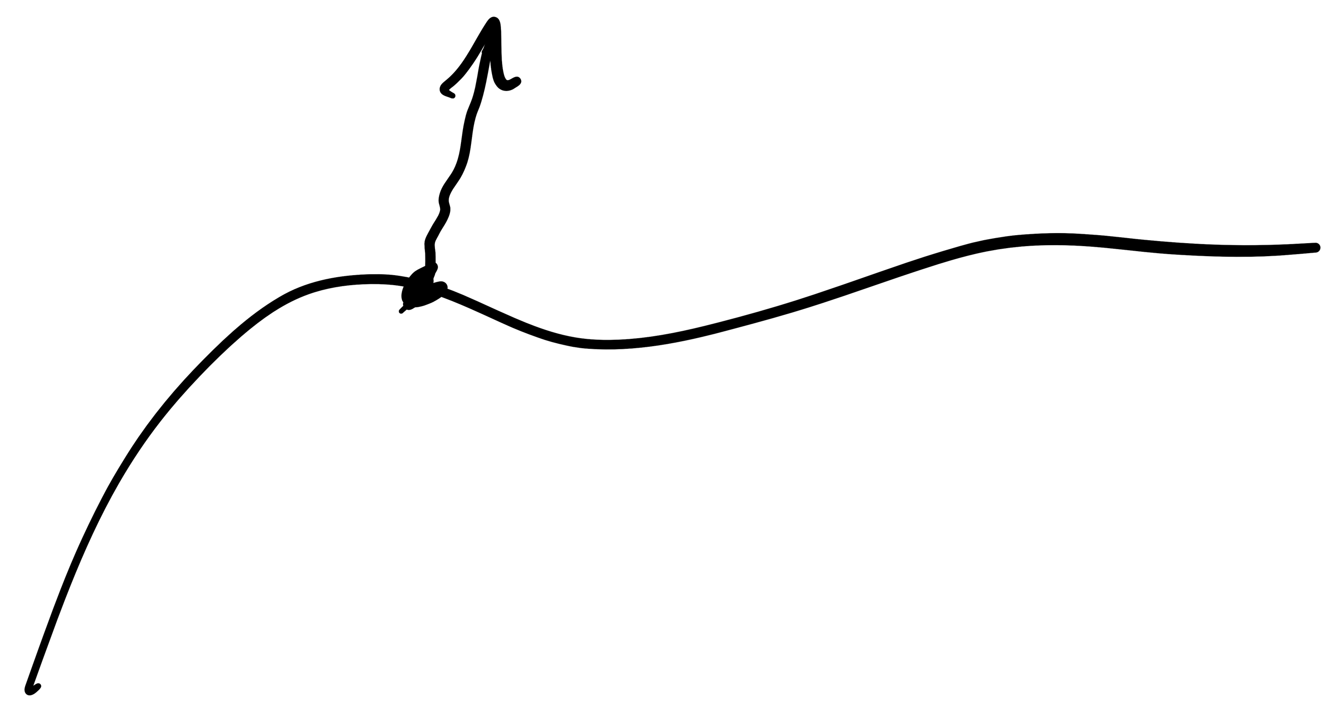
$$3(x-1) + 8(y-2) + 3\left(z - \frac{1}{3}\right) = 0$$

Αν $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$

$S_k = \{ w \in \mathbb{R}^2 : f(w) = k \}$ ← καμπύλη

Αν $S_k \neq \emptyset$, $w_0 \in S_k$, f παραγωγίσιμη στο w_0 και $\nabla f(w_0) \neq 0$

τότε το $\nabla f(w_0)$ είναι κάθετο στην καμπύλη S_k στο w_0



§ 3.1 Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Παράδειγμα: Αν $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)$

και υπάρχουν οι $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

ενδέχεται να υπάρχουν οι εξής παράγωγοι

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$$

τις συμβολίζουμε με

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)$$

Γενικά, αν $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό,

$f: U \to \mathbb{R}$, $f(\underbrace{x_1, x_2, \quad , x_n}_{=x})$

Για $i,j \in \{1, \quad , n\}$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right)$$

Αν $i=j$, το αριστερό μέλος το γράφουμε $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Γενικά αν $i_1, \quad , i_r \in \{1, 2, \quad n\}$ ορίζουμε

$$\frac{\partial^r f(x)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \quad \partial x_{i_r}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{r-1} f(x)}{\partial x_{i_2} \quad \partial x_{i_r}} \right)$$

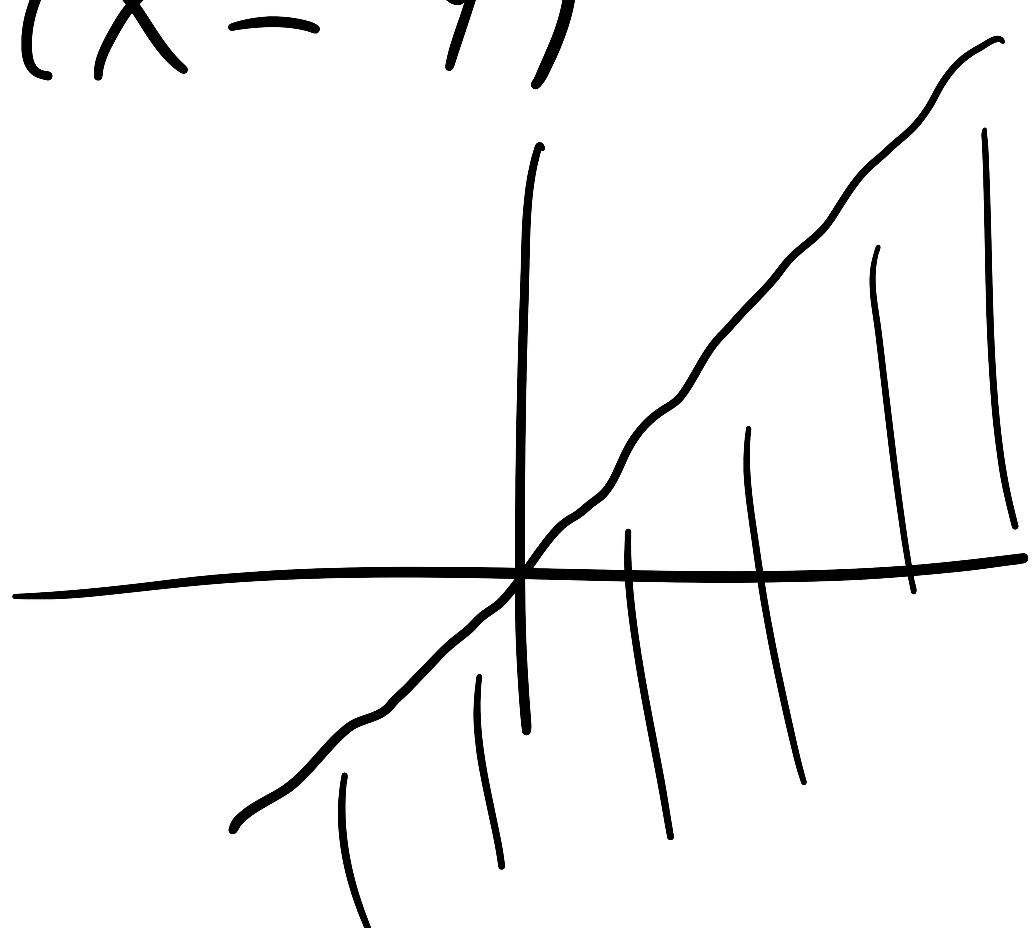
Αυτή είναι μια παράγωγος r τάξης της f.

<u>Άσκηση 6</u> Να βρεθούν οι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

για την $f(x,y) = \log(x-y)$

Λύση



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x-y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{x-y}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x-y}\right) = -\frac{(-1)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{1}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-1}{x-y}\right) = -\left(-\frac{1}{(x-y)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{x-y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y-x}\right)$$

$$= -\frac{1}{(y-x)^2}$$

Μια $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό λέγεται C^r στο U (όπου $r \in \mathbb{N}^+$) αν όλες οι μερικές παράγωγοι της με

τάξη $\leq r$ υπάρχουν και είναι συνε-
χείς στο U.

π.χ. είναι C^2 αν οι εξής υπάρχουν και είναι συνεχείς

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad i=1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x), \quad i=1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \qquad i \neq j, \quad 1 \leq i,j \leq n$$

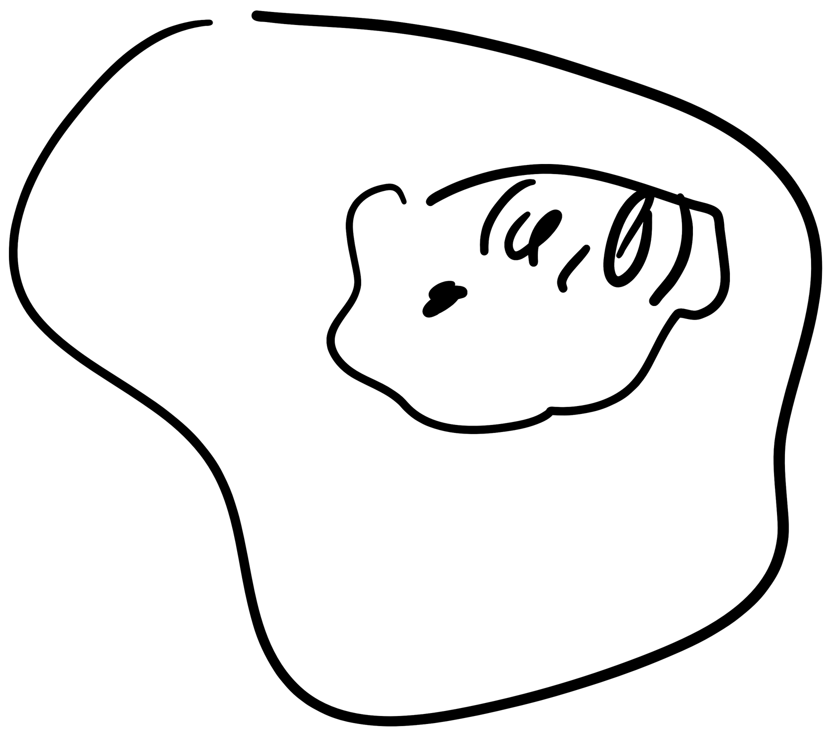
μεικτές παράγωγοι

<u>Θεώρημα</u> $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό, $f : U \to \mathbb{R}$

Αν η f είναι C^2 στο U, τότε

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \qquad \forall (x,y) \in U$$

Το ίδιο ισχύει και για $f: U \to \mathbb{R}$ με $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$



$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_{10}\, \partial x_2} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2\, \partial x_{10}} \qquad x = (x_1 \;\; , x_{12})$$

19 | Δείξτε ότι $f_{xzw} = f_{zwx}$

για την $f(x,y,z,w) = e^{xyz} \sin(xw)$

Λύση

$$\left(f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f \right)$$

$$f_x = yz\, e^{xyz} \sin(xw) + e^{xyz}\, w \cos(xw)$$

$$f_{xz} = y \sin(xw)\left(e^{xyz} + zxy\, e^{xyz} \right) + xy\, e^{xyz}\, w \cos(xw)$$

$$f_{xzw} = y\, x \cos(xw)\, e^{xyz} (1 + xyz)$$

$- x^2 y w \; e^{xyz} \sin(xw) + xy e^{xyz} \cos(xw)$

$f_z = xy\, e^{xyz} \sin(xw)$

$f_{zw} = x^2 y\, e^{xyz} \cos(xw)$

$f_{zwx} = 2xy\, e^{xyz} \cos(xw)$

$+ x^2 y^2 z\, e^{xyz} \cos(xw)$

$- x^2 y w e^{xyz} \sin(xw)$

Βλέπουμε ότι ορίζονται $f_{zwx} = f_{xzw}$

Άσκηση 22 $\quad w = f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad C^2$

Θέτουμε $x = u+v$, $y = u-v$. συνάρτηση

Ν.δ. ότι

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Λύση

Στο αριστερό μέλος εννοούμε $\dfrac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial u \partial v}$

όπου $\tilde{w}(u,v) = w(\underset{x}{u+v}, \underset{y}{u-v})$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot 1 - \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial w}{\partial x}(u+v, u-v)$$

$$- \frac{\partial w}{\partial y}(u+v, u-v)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial u \partial v}(u,v) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} +$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial u} -$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$- \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

§3.2 Το Θεώρημα Taylor

Στη μονοδιάστατη περίπτωση.

Θεώρημα $U \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό

$\kappa \in \mathbb{N}$

$f: U \to \mathbb{R}$ $\kappa+1$ φορές παραγωγίσιμη στο U. Αν $x_0 \in U$ και $x_0+h \in U$ τότε

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} h^j + R_\kappa(x_0,h)$$

με $\lim_{h \to 0} \frac{R_\kappa(x_0,h)}{h^\kappa} = 0$

Μάλιστα $R_\kappa(x_0,h) = \frac{f^{(\kappa+1)}(\xi)}{(\kappa+1)!} h^{\kappa+1}$

για κάποιο ξ μεταξύ x_0 και x_0+h

Παράδειγμα $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

$$f^{(j)}(x) = e^x, \quad f^{(j)}(0) = e^0 = 1$$

Άρα $\forall h \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f(h) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} h^j + R_k(0,h)$$

με $R_k(0,h) = \frac{e^{\xi}}{(k+1)!} h^{k+1}$ για κάποιο

ξ μεταξύ 0 και h.

$$|R_k(0,h)| \leq \frac{e^{|h|}}{(k+1)!} |h|^{k+1} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Έπεται ότι $f(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} h^j$

Το ίδιο θα κάνουμε και στις πολλές διαστάσεις.

$U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$

Συμβολισμός. Για $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{N}^+$

Θέτουμε

$$D_r f(x)(h) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq n} \frac{\partial^r f(x)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_r}} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_r}$$

Παράδειγμα:

Για $r=1$

$$D_1 f(x)(h) = \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_{i_1}} h_{i_1} =$$

$$= Df(x) \cdot h$$

Για $r=2$

$$D_2 f(x)(h) = \sum_{1 \le i_1, i_2 \le n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} h_{i_1} h_{i_2}$$