Θέμα 6ο.

Έστω $k = c + 2$, όπου c είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας

Α. Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης υπολογίστε το ολοκλήρωμα

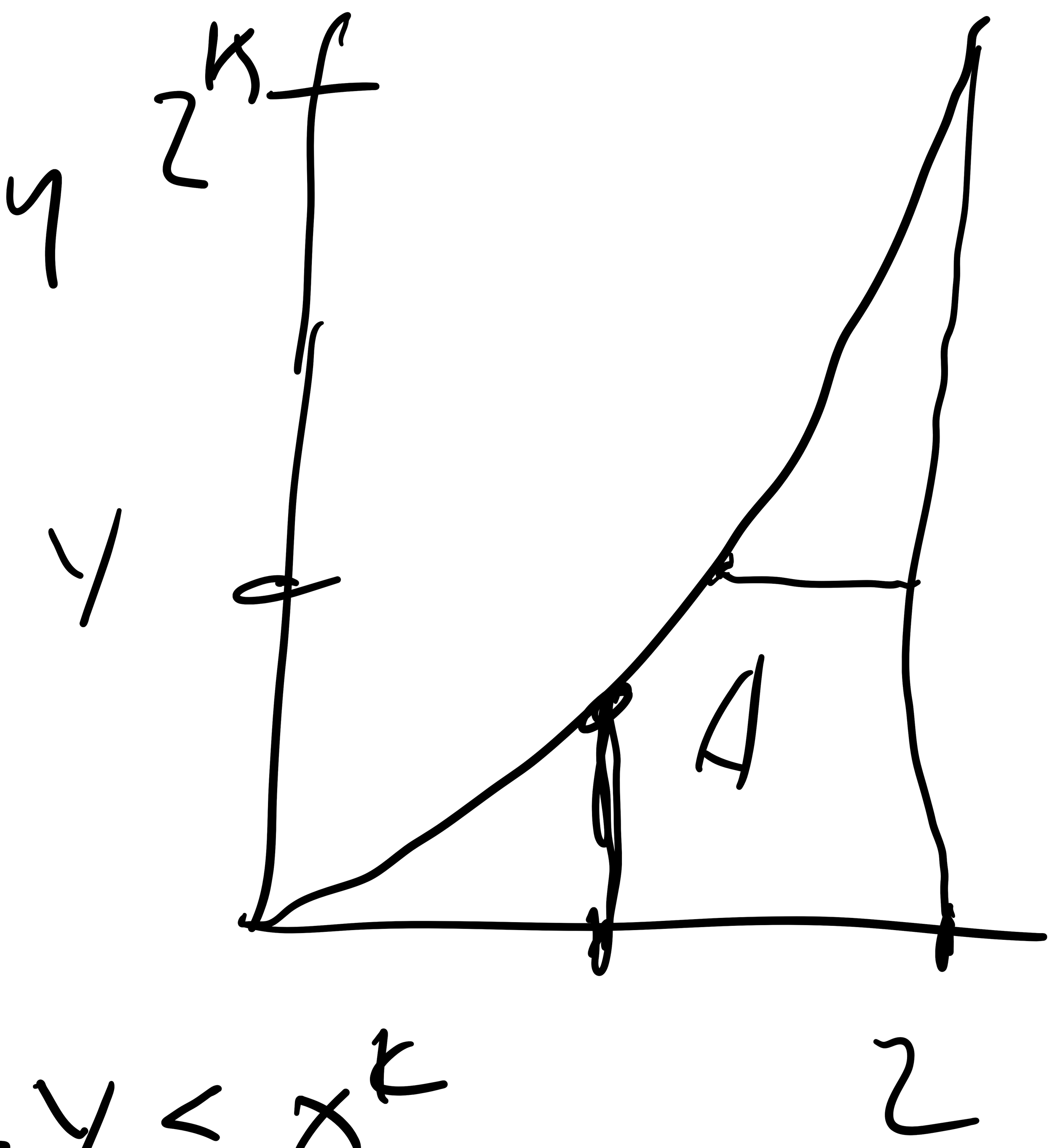
$$I = \int_0^{2^k} \int_{\sqrt[k]{y}}^{2} e^{x^{k+1}} dx dy \ .$$

Β. Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση σε κυλινδρικές συντεταγμένες, υπολογίστε τον όγκο του κώνου με εξίσωση

$$z = k - k\sqrt{x^2 + y^2}$$

και βάση στο xy επίπεδο.

Λύση



A) $k > 0$.

$0 \le y \le 2^k$

$y^{\frac{1}{k}} \le x \le 2 \Leftarrow 0 \le y \le x^k$

$\uparrow \ x = y^{\frac{1}{k}}$

$A = \{ (x, y) : 0 \le y \le 2^k, \ y^{\frac{1}{k}} \le x \le 2 \}$

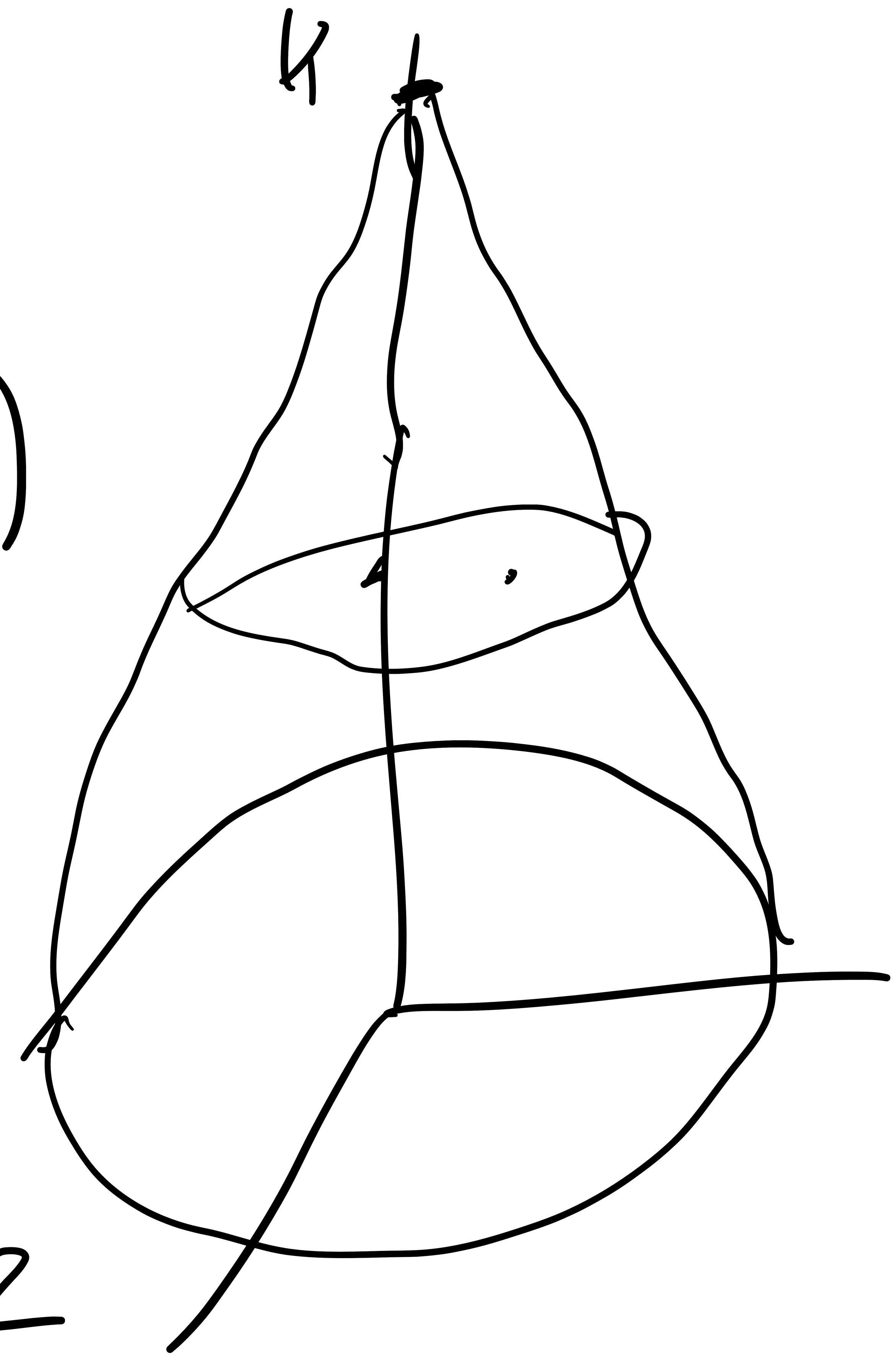
$= \{ (x, y) : 0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le x^k \}$

$$I = \int_0^2 \int_0^{x^k} e^{x^{k+1}} dy\, dx = \int_0^2 e^{x^{k+1}} x^k dx$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{e^{x^{k+1}}}{k+1}\right)' dx = \frac{e^{2^{k+1}} - e^0}{k+1}$$

$$= \frac{e^{2^{k+1}} - 1}{k+1}$$

$k > -1$



B| $z = k(1-\sqrt{x^2+y^2})$

$A \subset \mathbb{R}^3$ ο κώνος

Όγκος(A) $= \iiint_A 1\, dx\, dy\, dz$

r, θ, z

το A σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι

$\{(r, \theta, z) : z \in [0, k],\ r \in [0, 1-\frac{z}{k}],$
$\theta \in [0, 2\pi]\}$

$z = k(1-\sqrt{x^2+y^2})$
$\sqrt{x^2+y^2} = 1 - \frac{z}{k}$

Όγκος(A) $= \int_0^k \int_0^{1-\frac{z}{k}} \int_0^{2\pi} 1\, r\, d\theta\, dr\, dz$

$$= 2\pi \int_0^K \int_0^{1-\frac{z}{K}} r \, dr \, dz =$$

$$w = 1 - \frac{z}{K}$$

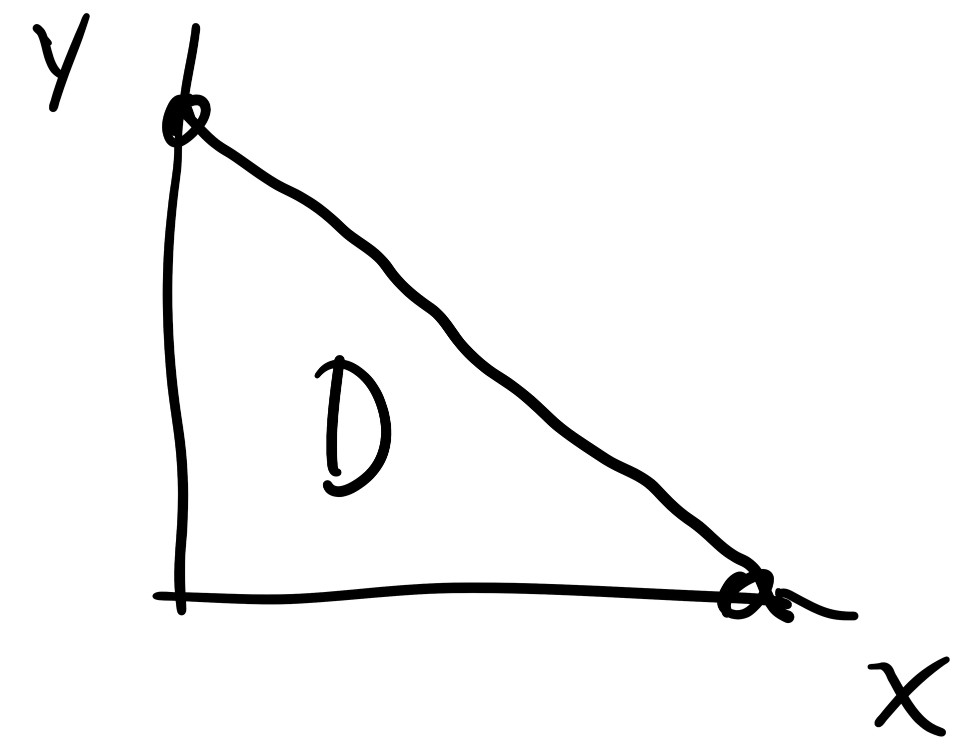
$$= 2\pi \int_0^K \left(1 - \frac{z}{K}\right)^2 \frac{1}{2} \, dz =$$

$$= \pi \int_1^0 w^2 (-K) \, dw = K\pi \int_0^1 w^2 \, dw$$

$$= K\pi \frac{1}{3}$$

<u>Άσκηση</u> $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$D = \{ (x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1 \}$. $a, b > 0$



Ν.δ.ό.

$$\iint_D x^a y^b f(x+y) \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 u^{a+b+1} f(u) \, du \int_0^1 v^a (1-v)^b \, dv$$

Θεωρείστε τον $T(u,v) = (\underset{\substack{\shortparallel \\ x}}{uv}, \underset{\substack{\shortparallel \\ y}}{u-uv})$

Λύση

Στο $(0,\infty)\times(0,\infty)$ ο T είναι 1-1.

$$(x,y)=T(u,v) \iff \begin{aligned} x&=uv \\ y&=u-uv \end{aligned} \iff$$

$$u=x+y$$

$$v=\frac{x}{x+y}$$

Δηλ. $T^{-1}(x,y)=\left(x+y,\ \frac{x}{x+y}\right)$

$T: G \to D$

C^1 και 1-1 στο G^o

$D=T(G)$

$$\iint_D f\,dx\,dy=\iint_{T^{-1}(D)} f(T(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$$

Βρίσκουμε το $T^{-1}(D)$

$T^{-1}(T_1)$:

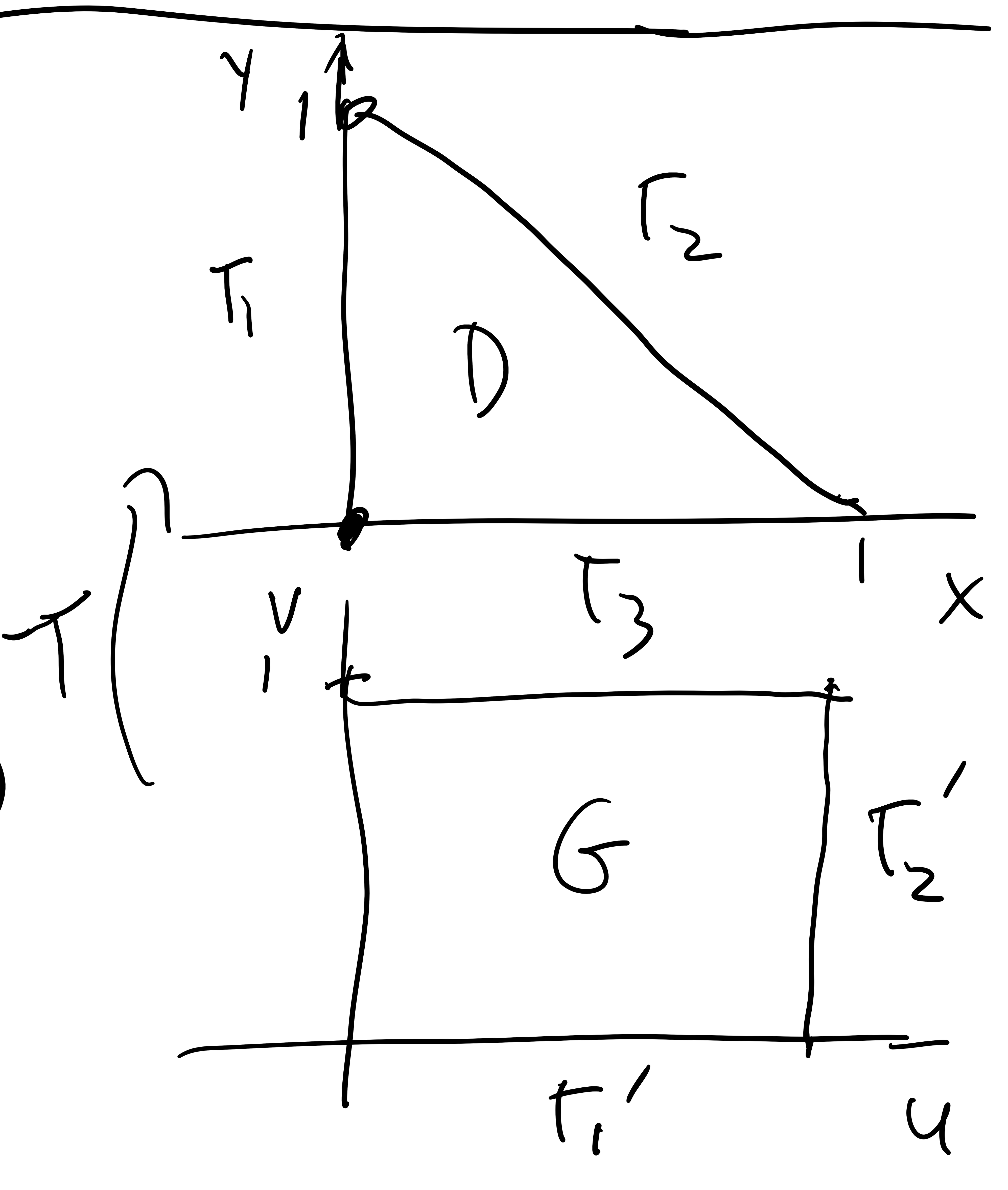
$T^{-1}(0,y)=(y,0)$

$T^{-1}(T_2)$:

$T^{-1}(x,1-x)=(1,x)$

$T^{-1}(T_3)$:

$T^{-1}(x,0)=(x,1)$



Έστω $G=[0,1]\times[0,1]$ και

$T: G \to D$

Η T είναι C^1 και 1-1 στο G°

$\left(T(u,0)=(0,0) \right)$

$T(G)=D$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix}$$

$$= -uv - u(1-v) = -u$$

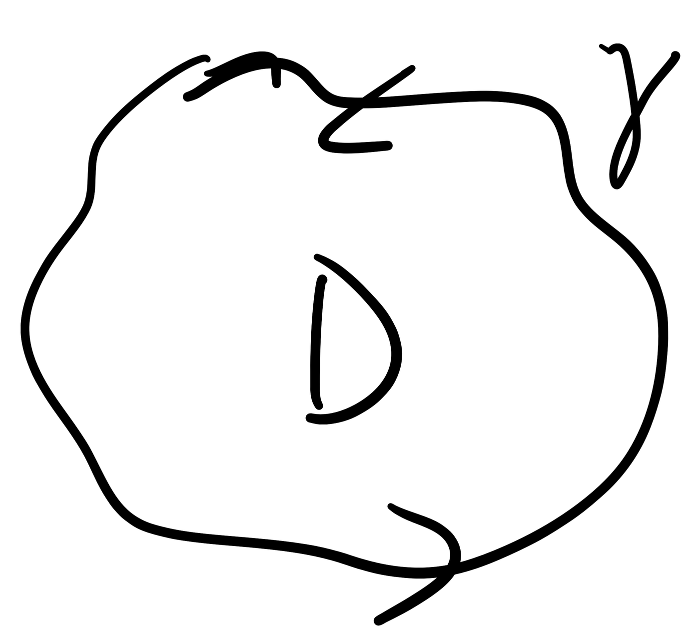
Άρα $$\iint_D \dots \, dxdy = \iint_{T^{-1}(D)} (uv)^a u^\beta (1-v)^\beta f(u) u \, du\, dv$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 u^{a+\beta+1} f(u) v^a (1-v)^\beta \, du\, dv$$

$$\int_0^1 v^a (1-v)^\beta \underbrace{\int_0^1 u^{a+\beta+1} f(u)\, du}_{} \, dv$$

$$= \int_0^1 u^{\alpha+\beta+1} f(u)\,du \int_0^1 v^{\alpha}(1-v)^{\beta}\,dv$$

<u>Άσκηση</u> Έστω $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ απλή κλειστή καμπύλη και D το φραγμένο χωρίο που περικλείει.



Για ποιαν γ γίνεται μέγιστο το $I = \int_{\gamma^+} y^3\,dx + (3x - y^3)\,dy$;

Λύση

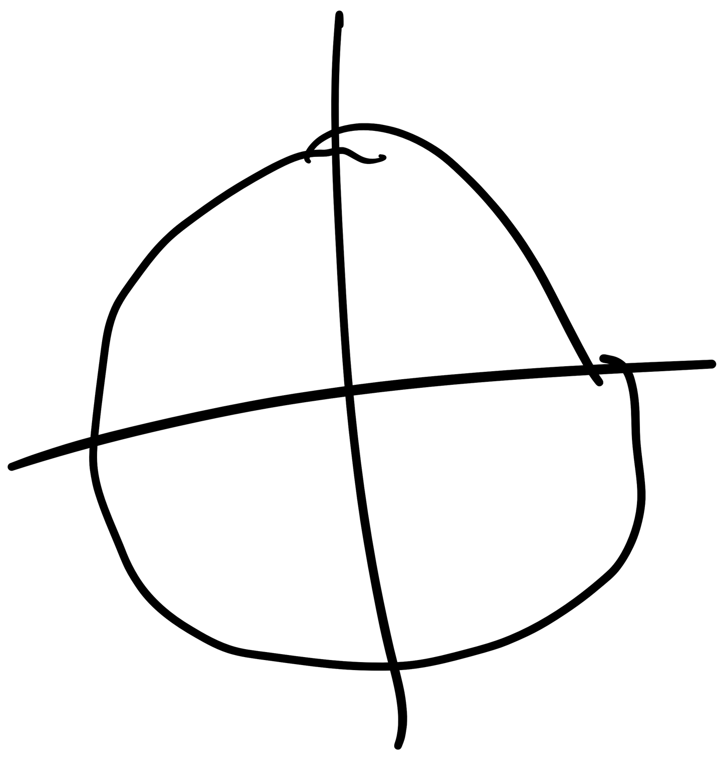
$$I = \int_{\gamma^+} (\underbrace{y^3}_{P}, \underbrace{3x - x^3}_{Q}) \cdot ds$$

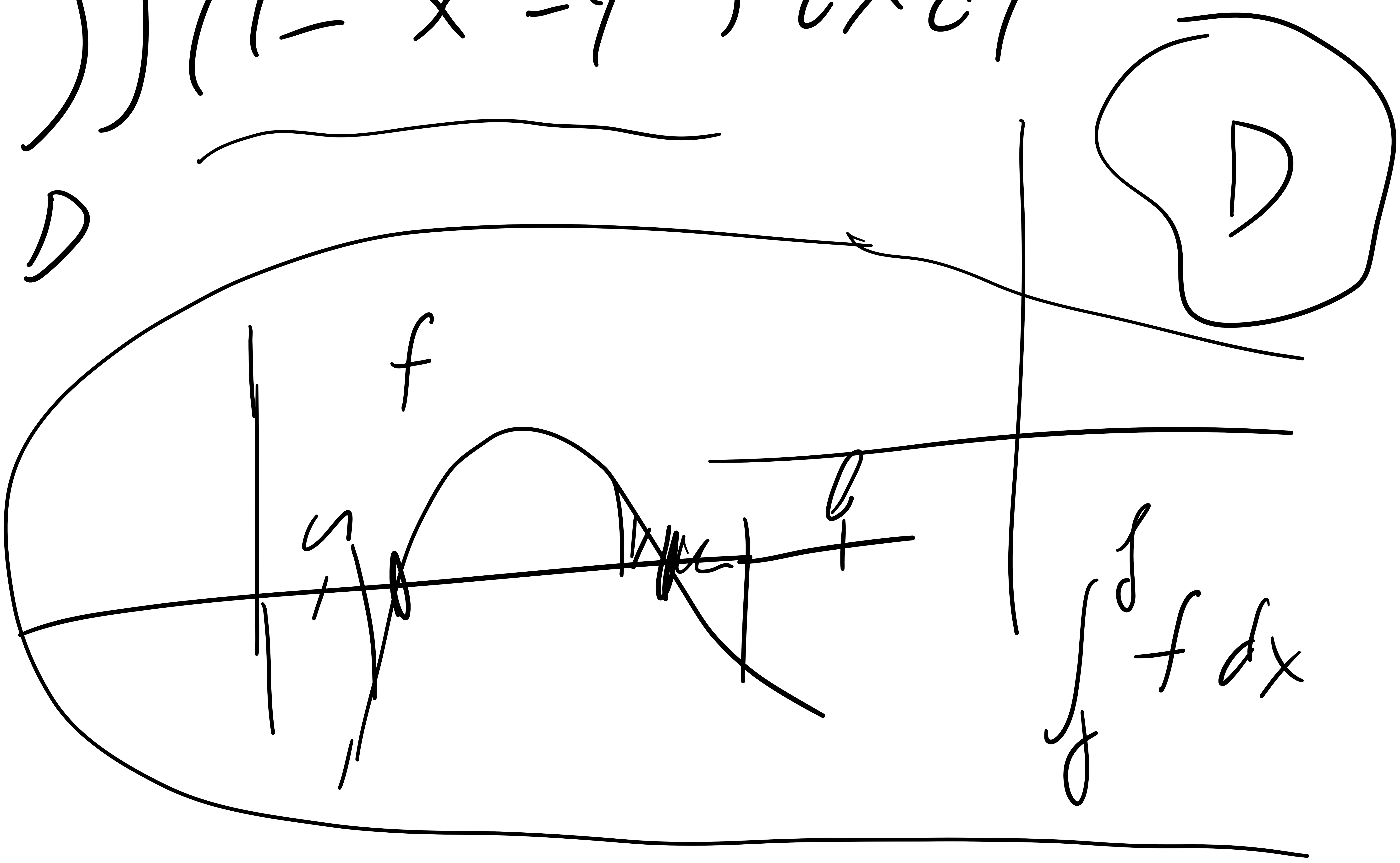
Green

$$= \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D (3 - 3x^2 - 3y^2)\,dx\,dy$$

$$= 3 \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$$

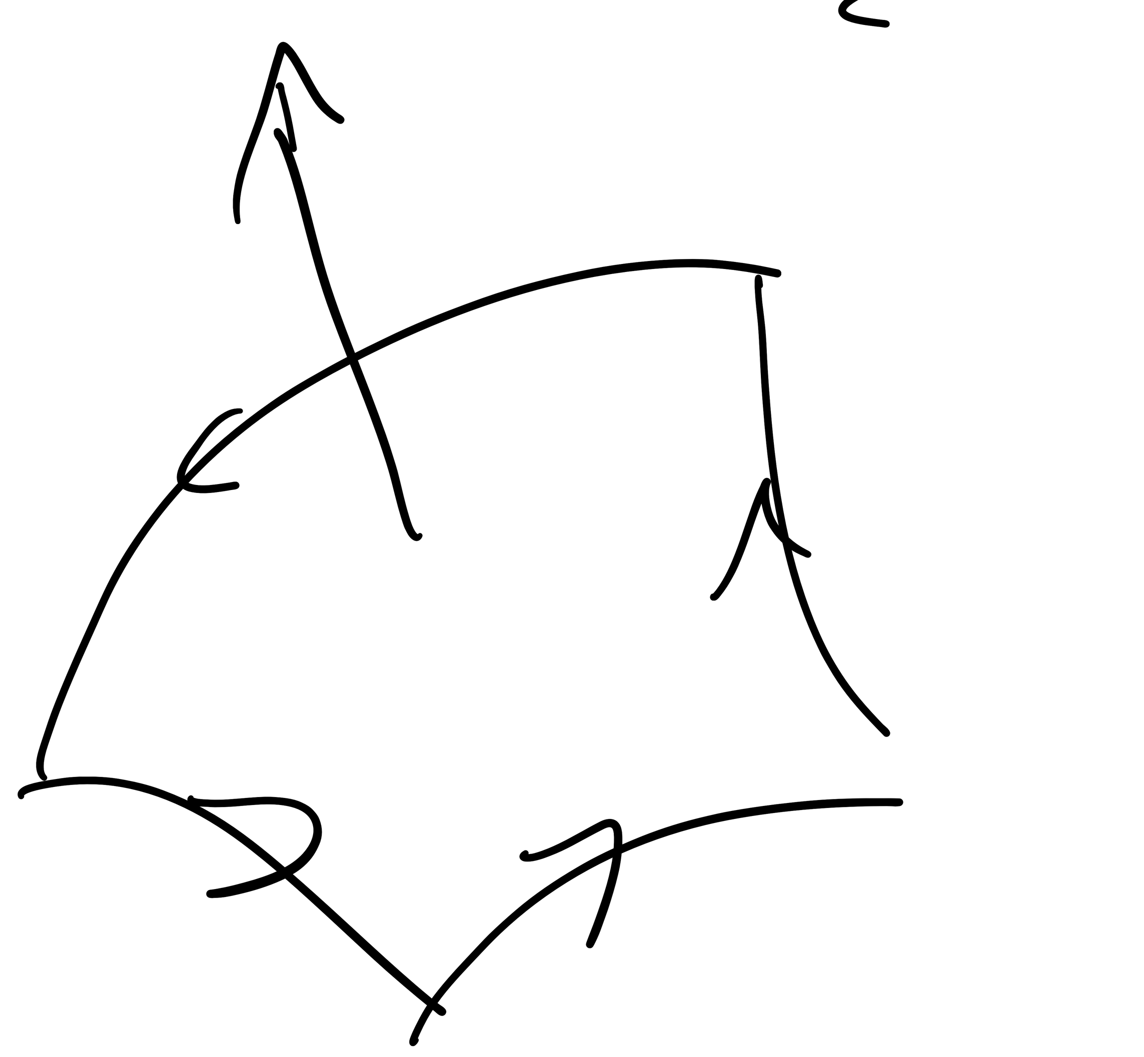




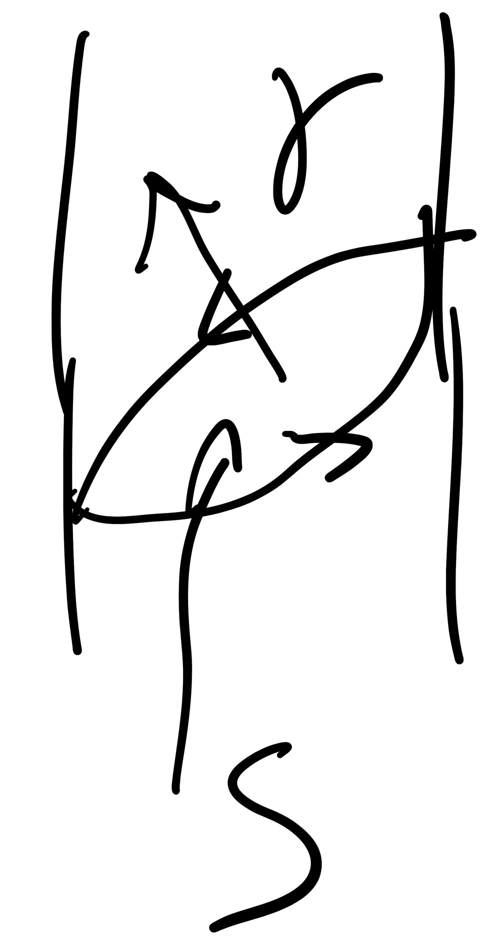
Μέγιστο στην $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$

Δχt $\gamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

$$\int_{\partial S} F \cdot ds = \iint_S \mathrm{curl} F \cdot dS$$



Άσκηση: Έστω $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ επίπεδο παράλληλο στον άξονα $x'x$ και όχι κάθετο στο xy επίπεδο.
Έστω K ο κύλινδρος $x^2+y^2=a^2$, $a>0$ και $\gamma = \Pi \cap K$.



Ν.δ.ό.

$$I := \oint_\gamma (yz - y)\,dx + (xz + x)\,dy = 2\pi a^2$$

Λύση

Έστω $(\alpha', \beta', \gamma') \perp \Pi$

$\Pi \parallel x'x \iff \alpha' = 0$

Π όχι κάθετο στο $xy \iff \gamma' \neq 0$

$(0, \beta', \gamma')$ το κάθετο διάνυσμα

$0x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0$

Το Π θα έχει εξίσωση της μορφής

$z = by + \gamma$

Έστω $S = \Pi \cap \{(x,y,z): x^2+y^2 \leq a^2\}$

Η S έχει παράμετρο.

$$\phi : \underbrace{\{(x,y): x^2+y^2 \leq a^2\}}_{=D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\phi(x,y) = (x, y, by+\gamma)$$

$$T_x = (1, 0, 0)$$

$$T_y = (0, 1, b)$$

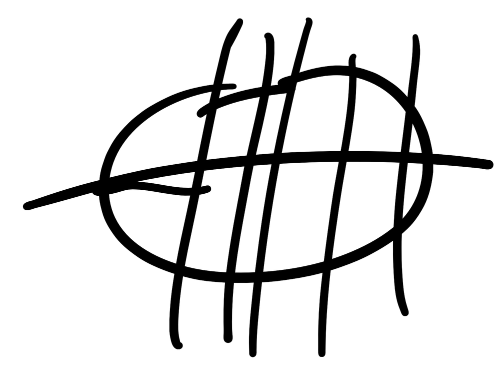
$$T_x \times T_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = (0, -b, 1)$$

Έστω $F(x,y,z) = (yz - y, xz + x, 0)$

$$I = \int_{\partial S} F \cdot ds = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot dS$$

$$= \iint_D \operatorname{curl} F(x, y, by+\gamma) \cdot \underbrace{(T_x \times T_y)}_{(0,-b,1)} dx\,dy \quad *$$

$$\operatorname{curl} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz-y & xz+x & 0 \end{vmatrix} = (-x, y, 2)$$

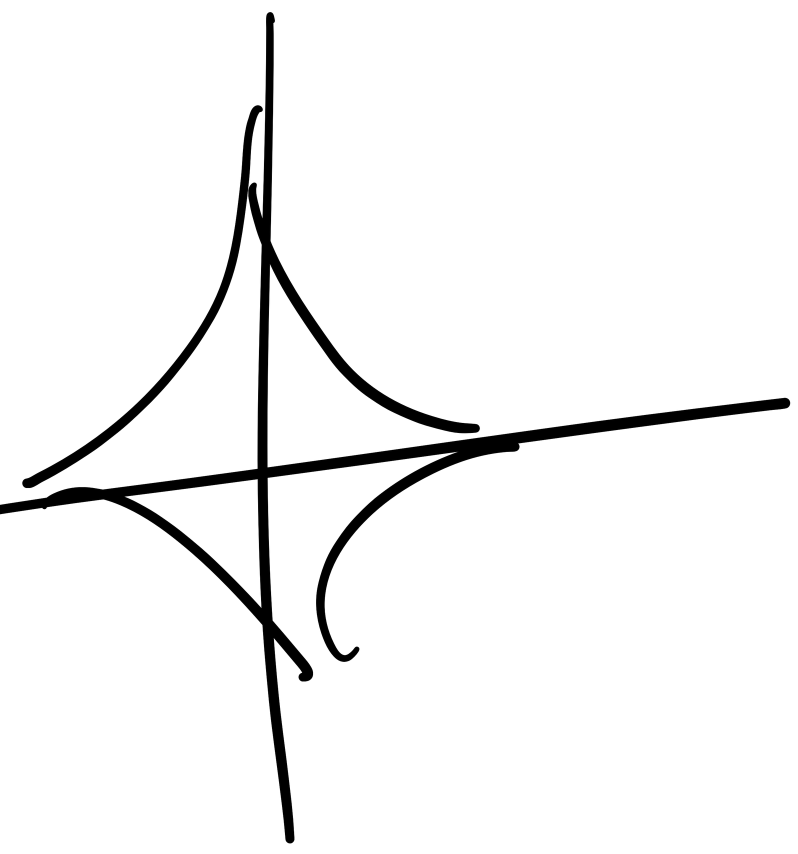


$$* = \iint_D (-\underset{\sim}{by} + 2)\, dx\, dy = 2 \iint_D dx\, dy$$

$$= 2\pi a^2$$

Σελ 431. παραδ. 2

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$



$$A(D) = \frac{1}{2} \int_\gamma -y\, dx + x\, dy$$

Σελ 390. Ασκ. 14

$0 < a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

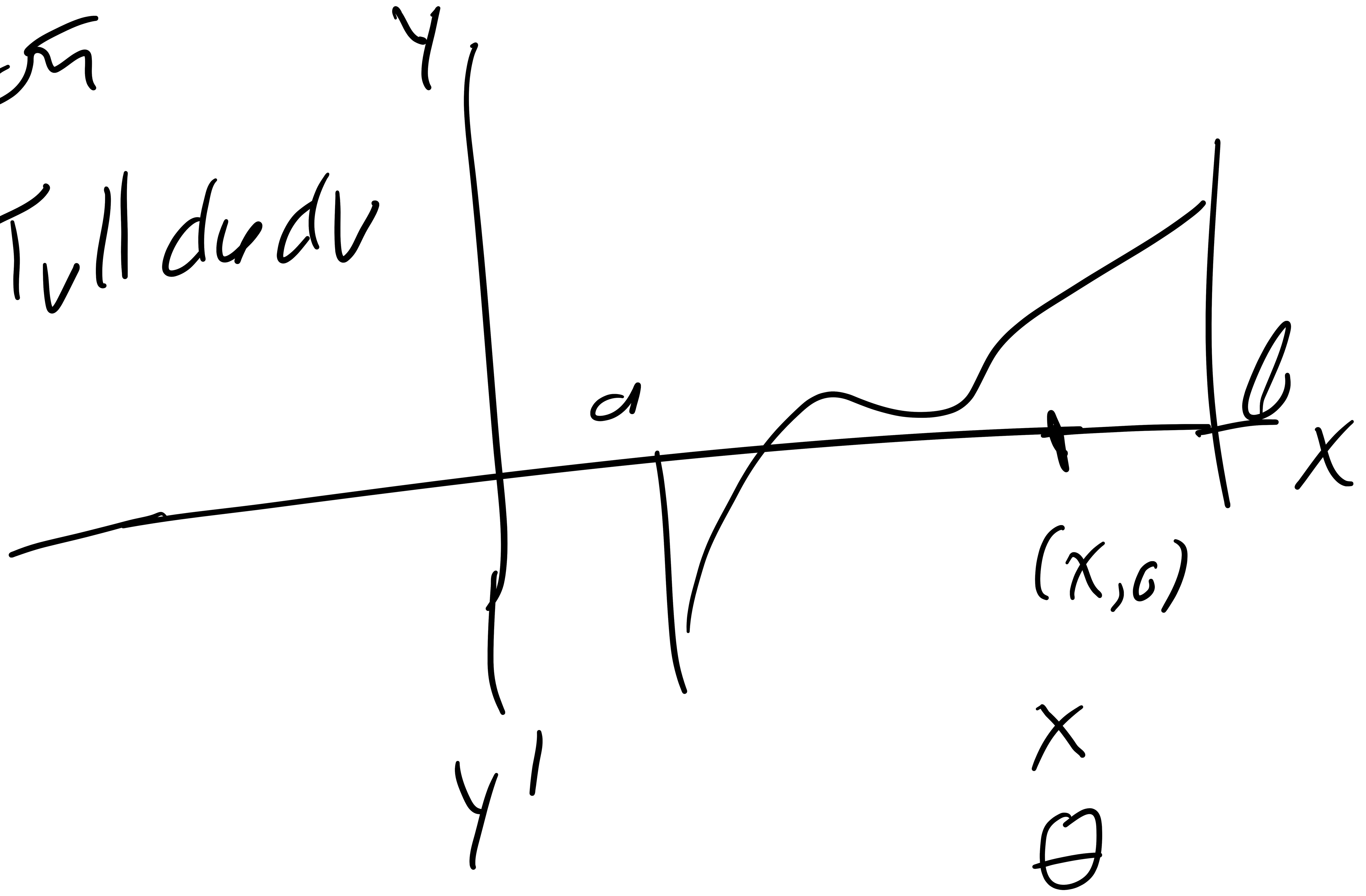
Περιστρέφουμε το γράφημα της f γύρω από τον άξονα των y. Ποιο το εμβαδόν της επιφάνειας από περιστροφή;

y

10σπ

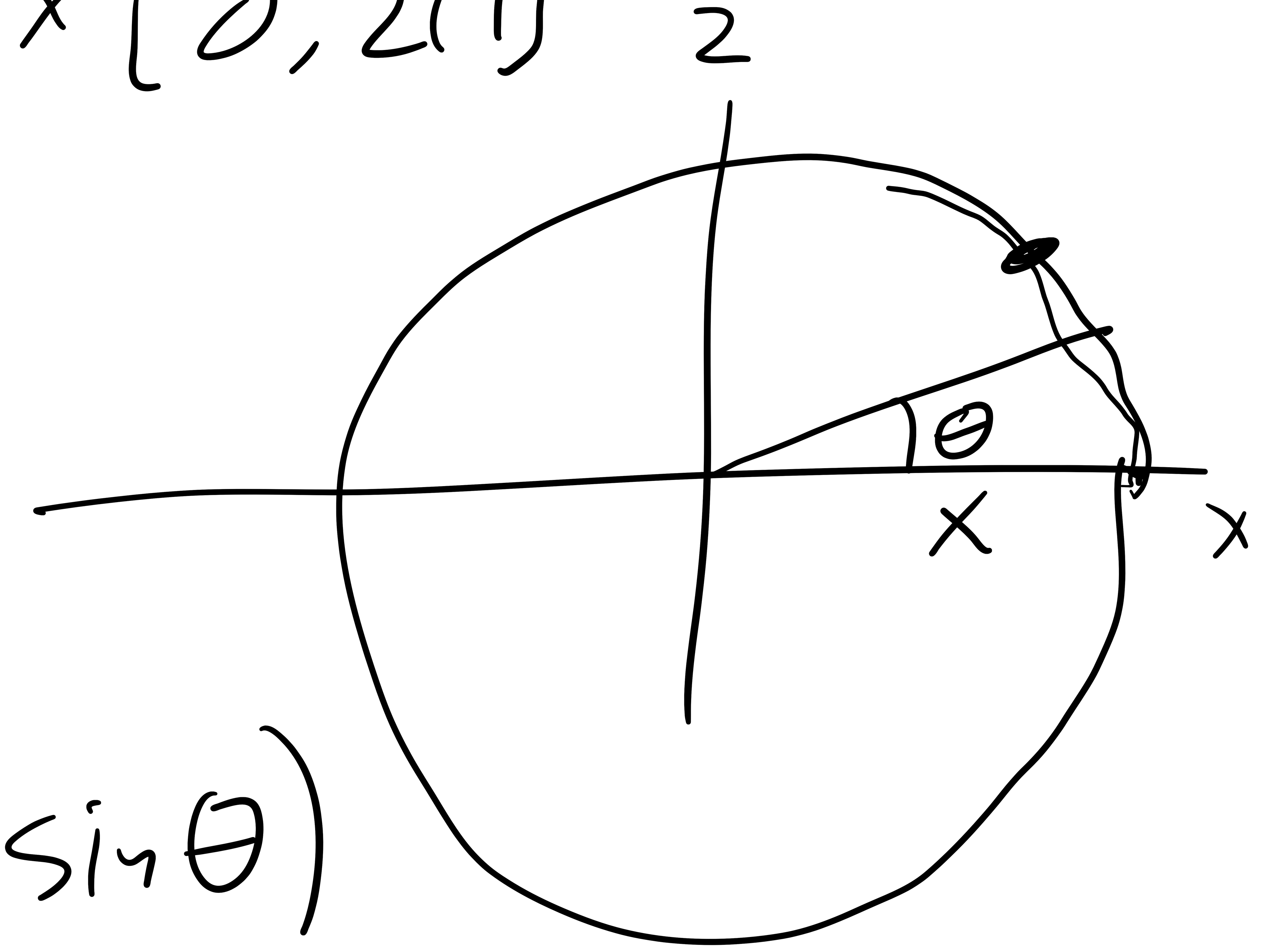
$$A(S) = \iint_D \| T_u \times T_v \| \, du \, dv$$

$$S = \Phi(D)$$



Έστω $D = [a, b) \times [0, 2\pi]$

$\Phi : D \to \mathbb{R}^3$



$\Phi(x, \theta) =$

$(x\cos\theta, f(x), x\sin\theta)$

$T_x = (\cos\theta, f'(x), \sin\theta)$

$T_\theta = (-x\sin\theta, 0, x\cos\theta)$

$$T_x \times T_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & f'(x) & \sin\theta \\ -x\sin\theta & 0 & x\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \left(x f'(x) \cos\theta,\ -x\cos^2\theta - x\sin^2\theta,\ f'(x)\, x \sin\theta \right)$$

$$= \left(x f'(x) \cos\theta,\ -x,\ x f'(x) \sin\theta \right)$$

$$\| T_x \times T_\theta \| = \sqrt{x^2 + x^2 (f'(x))^2}$$

$$= |x| \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Άρα $$A(S) = \iint_D |x| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$