Θέμα 1ο.

Δίνεται το επίπεδο

$$P: \quad 3x + 4y - 5z + 6 = 0$$

και το διάνυσμα $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ (όπου a, b, c είναι τα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας).

A. Βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{u} \neq \vec{0}$ κάθετο στο επίπεδο P.

B. Βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{v} \neq \vec{0}$ κάθετο στο επίπεδο των $\vec{u}$ και $\vec{w}$.

Γ. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στο επίπεδο P και περιέχει την ευθεία

$$\vec{\ell}(t) = (1, 2, 3) + t(a, b, c), \quad t \in \mathbb{R}.$$

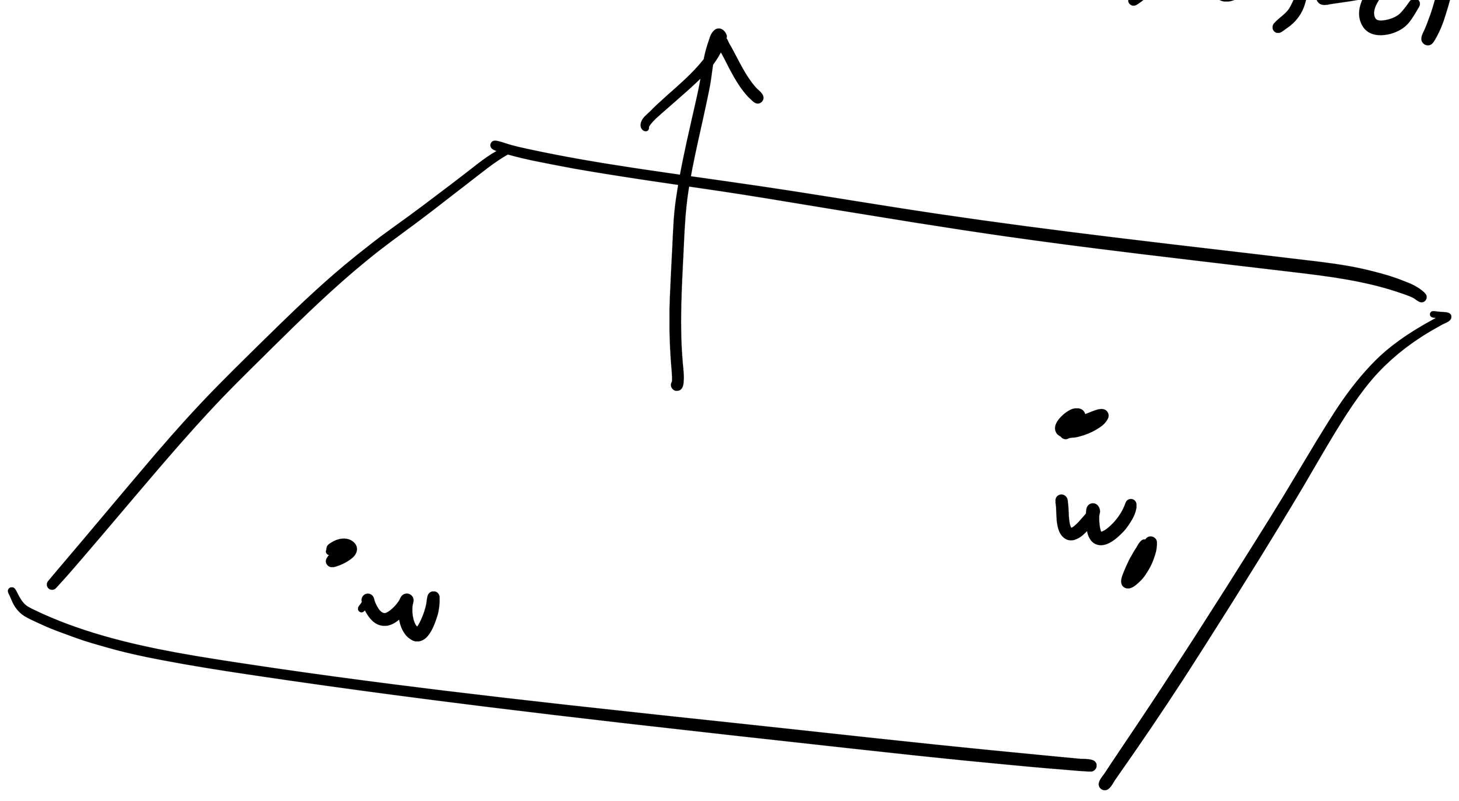
A. $u = (3, 4, -5)$

(x_0, y_0, z_0)

κάθετο στο $(\gamma, \delta, \varepsilon)$ τότε

για $(x, y, z) \in P$ ισχύει $\underbrace{(x, y, z)}_{w} - \underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{w_0}$

$\perp (\gamma, \delta, \varepsilon)$



$(x - x_0)\gamma + (y - y_0)\delta +$

$(z - z_0)\varepsilon = 0$

$\underline{\gamma x + \delta y + \varepsilon z} - \gamma x_0 - \delta y_0 - \varepsilon z_0 = 0$

Β) $u = (3, 4, -5)$

$w = (a, b, c)$

Ένα τέλειο διάνυσμα είναι το

$$v = u \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & -5 \\ a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$(4c + 5b,\ -3c - 5a,\ 3b - 4a)$$

Γ) Έστω $\tilde{P}$ το ζητούμενο επίπεδο.

Δυο διανύσματα παράλληλα σε αυτό είναι τα u, w

και $(1,2,3) \in \tilde{P}$

Άρα το $u \times w \perp \tilde{P}$

Για $(x, y, z) \in \tilde{P}$, επειδή $(1,2,3) \in \tilde{P}$

πρέπει

$$(x, y, z) - (1, 2, 3) \perp u \times w$$

Δηλ. $(x-1, y-2, z-3) \cdot (u \times w) = 0$

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & 4 & -5 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα και βρίσκουμε μια εξίσωση επιπέδου...

Έστω $k = c + 2$ (όπου c είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας). Εξετάστε αν υπάρχει καθένα από το παρακάτω όρια και, αν ναι, υπολογίστε το:

$$\text{(i)} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^k y^{k-1}}{(x^2+y^2)^k} \cdot \sin(x^2+y^2)$$

$$\text{(ii)} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^k y^k}{\sin\left((x^2+y^2)^k\right)}$$

Λύση

Έστω $k \geq 2$.

i) $z = (x, y)$, $\|z\| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|x| \leq \|z\|$ $\qquad \|z\|^{2k} = (x^2+y^2)^k$

$|y| \leq \|z\|$

$$\left| \frac{x^k \, y^{k-1}}{\|z\|^{2k-2}} \; \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \right|$$

$|\sin x| \leq |x|$

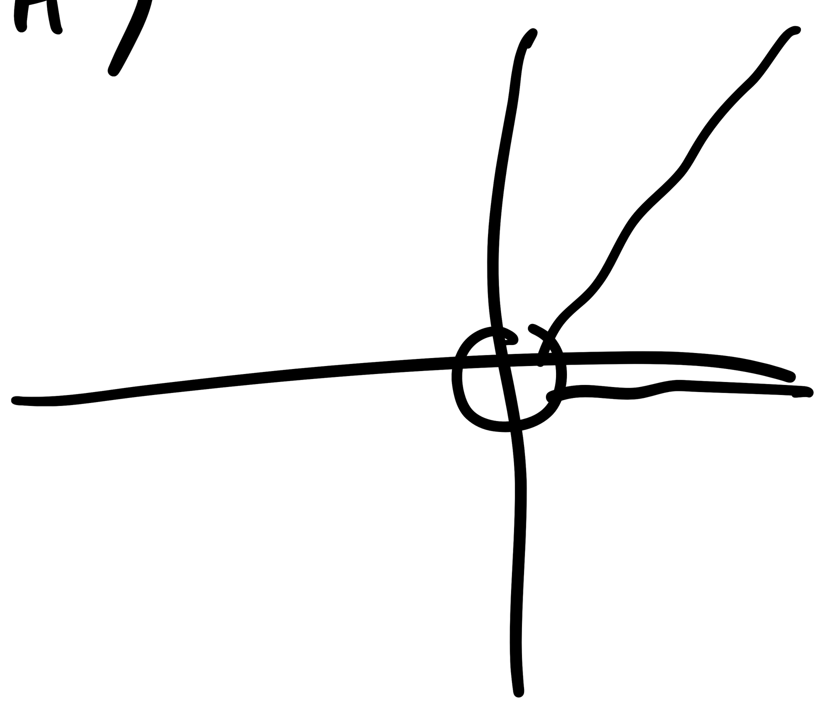
$$\leq \frac{\|z\|^k \, \|z\|^{k-1}}{\|z\|^{2k-2}} = \|z\| \to 0$$

για $(x, y) \to (0,0)$. Άρα το ζητούμενο όριο υπάρχει και ισούται με 0.

ii) $\dfrac{x^k y^k}{(x^2+y^2)^k}$ $\qquad$ $\dfrac{(x^2+y^2)^k}{\sin(\quad)}$

Έστω $f(x,y) = \dfrac{x^k y^k}{\sin((x^2+y^2)^k)}$

και ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$



Θα πρέπει τότε

$$\ell = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^{2k}}{\sin(2^k x^{2k})}$$

$$= \frac{1}{2^k} \lim_{x\to 0} \frac{2^k x^{2k}}{\sin(2^k x^{2k})} = \frac{1}{2^k}$$

$$\ell = \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0 \neq \frac{1}{2^k}$$

Άτοπο.

Κανονας αλυσιδας

Εστω

$$F(u,v) = h(\underbrace{x(u,v), y(u,v), z(u,v)}_{a})$$

$h(x,y,z)$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial h}{\partial x}(a)\,\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)$$

$$+ \frac{\partial h}{\partial y}(a)\,\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial h}{\partial z}(a)\,\frac{\partial z}{\partial u}(u,v)$$

2. (2 μον.) Έστω $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης. Θέτουμε $f(x, y) := \varphi(x + y, x - y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(α) Δείξτε ότι

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right] \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right] = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x + y, x - y)\right]^2 - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x + y, x - y)\right]^2.$$

(β) Δείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x + y, x - y) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x + y, x - y).$$

Έστω u,v τα ορίσματα της φ.

$\varphi(u,v)$ $\qquad \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$

4) υ είζουμε τις $u(x,y) = x+y$

$v(x,y) = x-y$

$$f(x,y) = \varphi(u(x,y), v(x,y))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(x,y), v(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\qquad)\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x+y, x-y) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x+y, x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x+y, x-y) - \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x+y, x-y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$- \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(x+y, x-y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}(x+y, x-y)$$

$$- \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(x+y, x-y) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(x+y, x-y)$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(x+y, x-y) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(x+y, x-y)$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z^2 \partial x^2} \qquad f(x, y, z)$$

6. (20 Βαθμοί) Δίνεται η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A := [1/2, 2] \times [1/2, 2]$, με

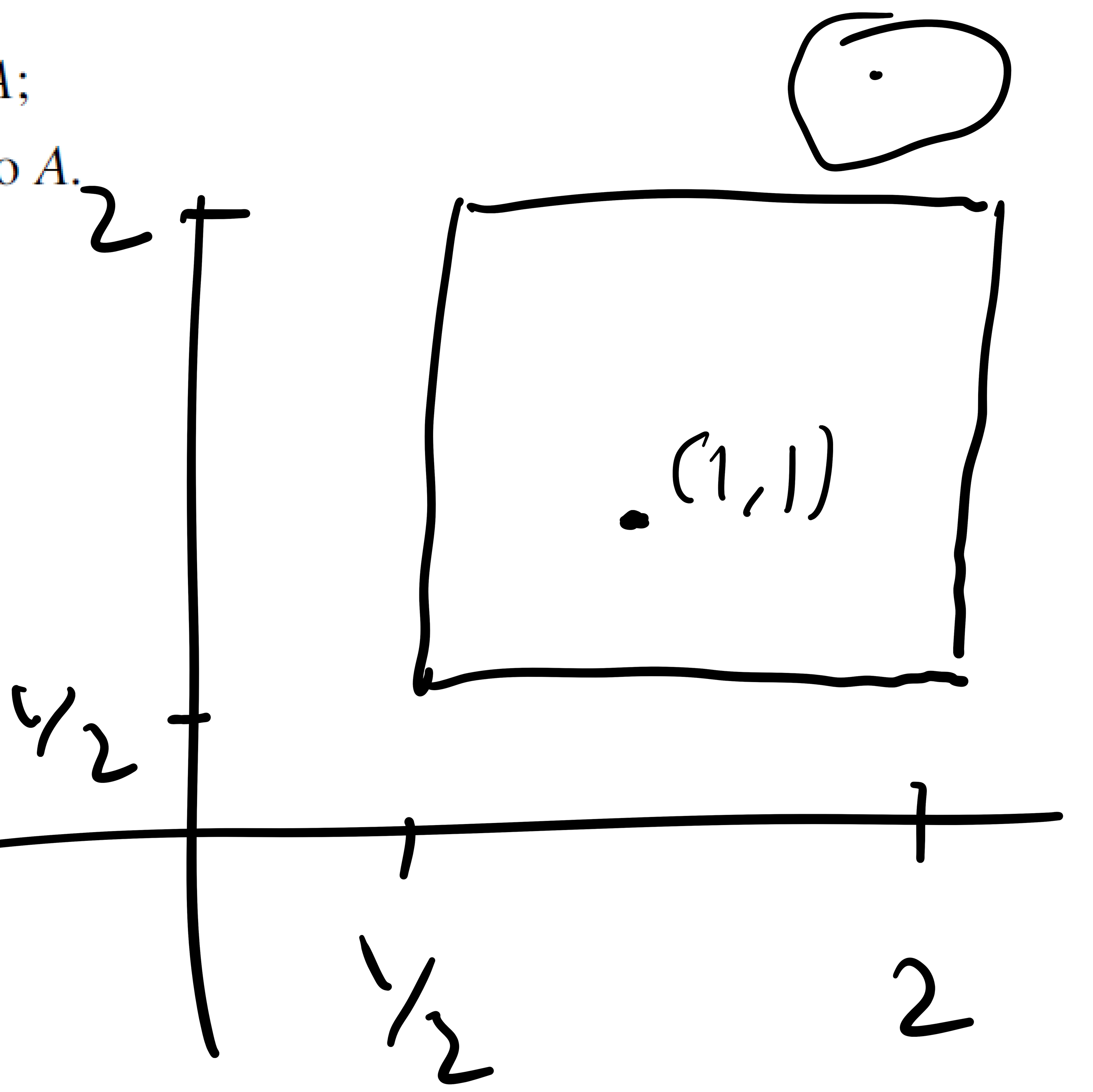
$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$$

για κάθε $(x, y) \in A$.

(α) Ποια είναι τα κρίσιμα σημεία της f στο εσωτερικό του A; Παρουσιάζει η f σε κάποιο από αυτά τοπικό ακρότατο;

(β) Δείξτε ότι η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο A;

(γ) Υπολογίστε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f στο A.



α) $\nabla f(x,y) = \left(-\frac{1}{x^2} + y, -\frac{1}{y^2} + x\right) = 0$

$\iff \begin{cases} x^2 y = 1 \\ x y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x^3 = 1 \end{cases} \iff x = y = 1$

Κρίσιμο σημείο το $(1,1)$

Εσσιανός πίνακας στο $(1,1)$

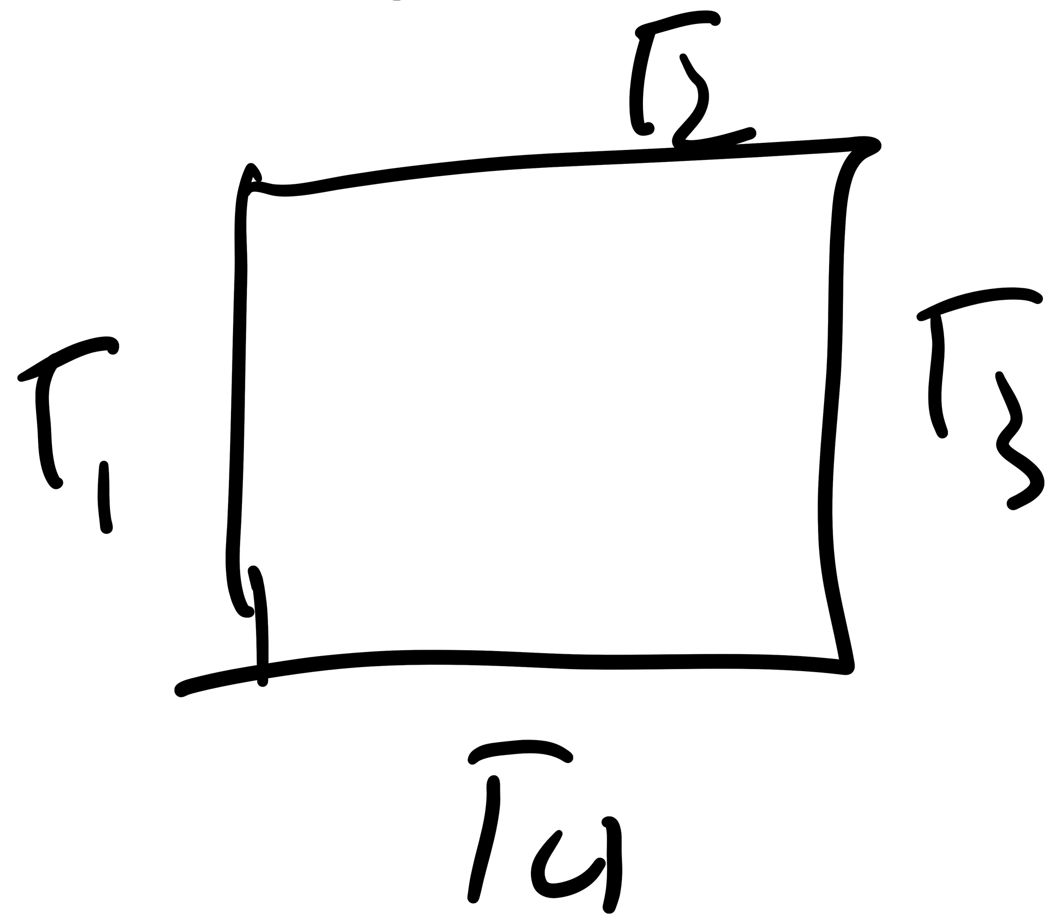
$f_{xx}(x,y) = \frac{2}{x^3}$, $f_{xy}(x,y) = 1$

$f_{yy}(x,y) = \frac{2}{y^3}$

$$(Hf)(1,1)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$ Θετικά ορισμένος

Άρα το $(1,1)$ τοπικό ελάχιστο.

γ) Μη λειτουργίες του f στο ∂A

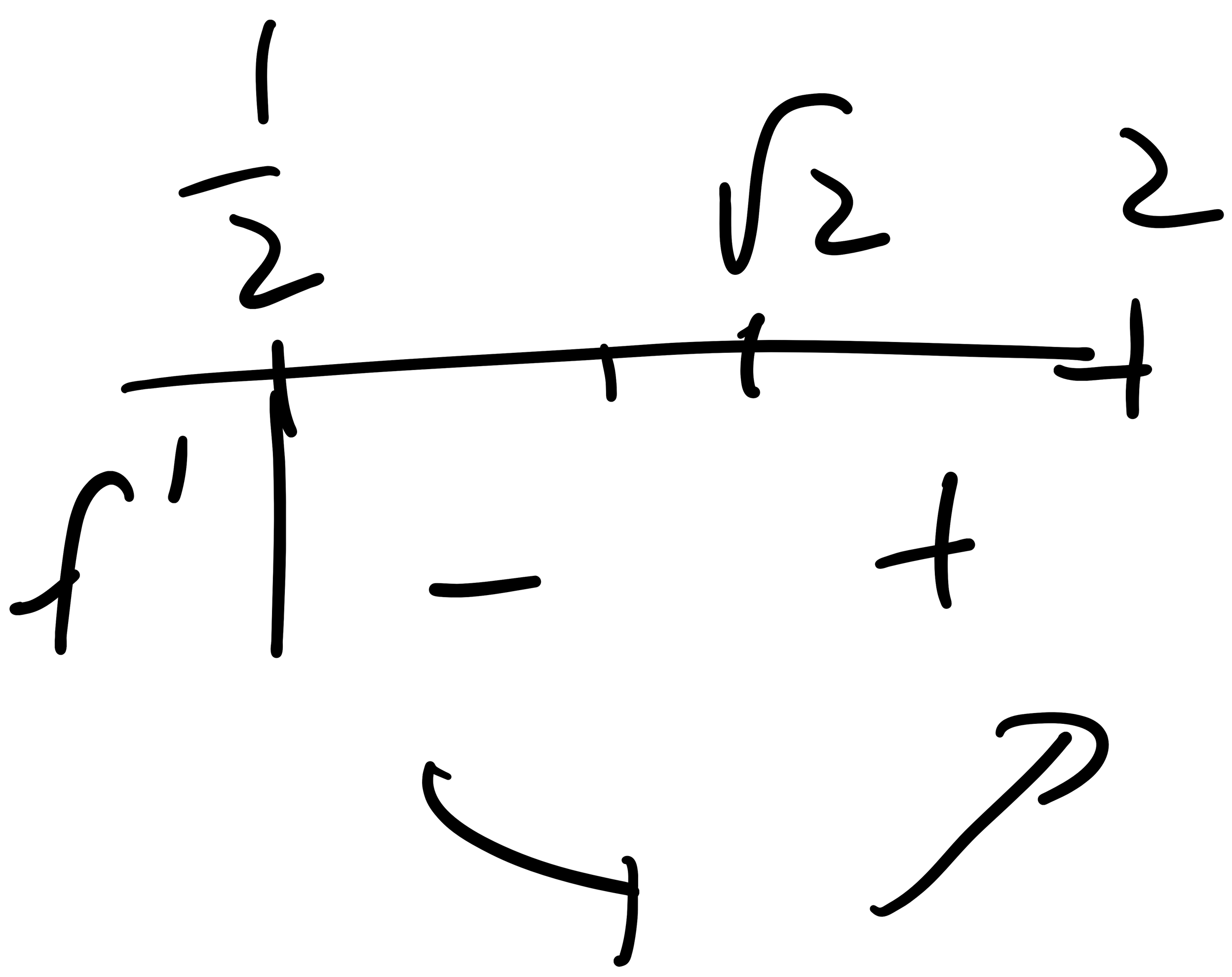


Στο Γ_1: $a(y) := f(\frac{1}{2}, y)$

$$= 2 + \frac{1}{y} + \frac{y}{2}$$

$$a'(y) = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{y^2-2}{2y^2}$$



Κρίσιμα σημεία $\frac{1}{2}, 2, \sqrt{2}$

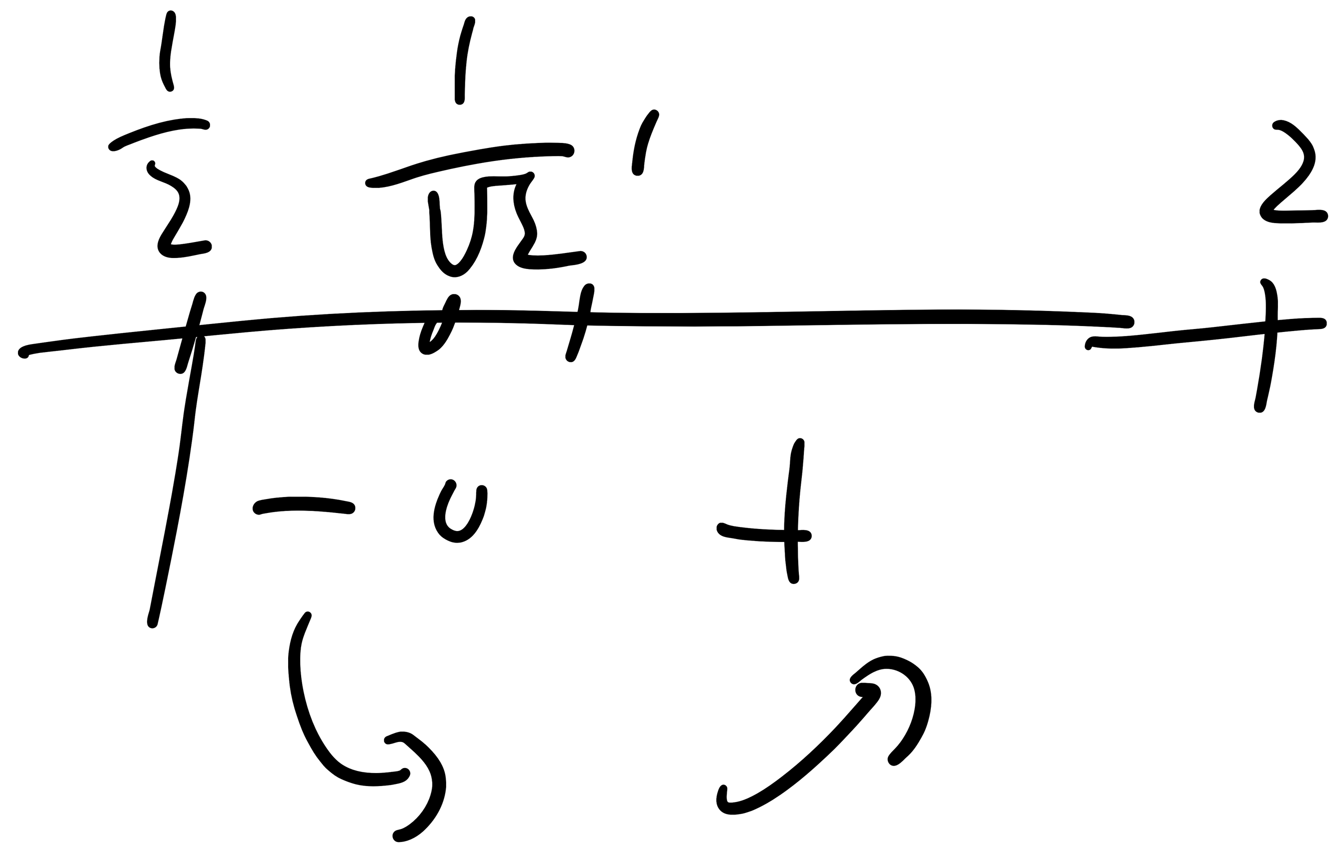
$$a(\tfrac{1}{2}) = 4 + \frac{1}{4} = 4.25$$

$$a(2) = 3.5$$

$$a(\sqrt{2}) = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2}$$

Στο Γ_2 $\quad h(x)=f(x,2)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+2x$

$h'(x)=-\frac{1}{x^2}+2$,



$h\left(\frac{1}{2}\right)=3.5$

$h(2)=5$

$h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}+\frac{1}{2}$

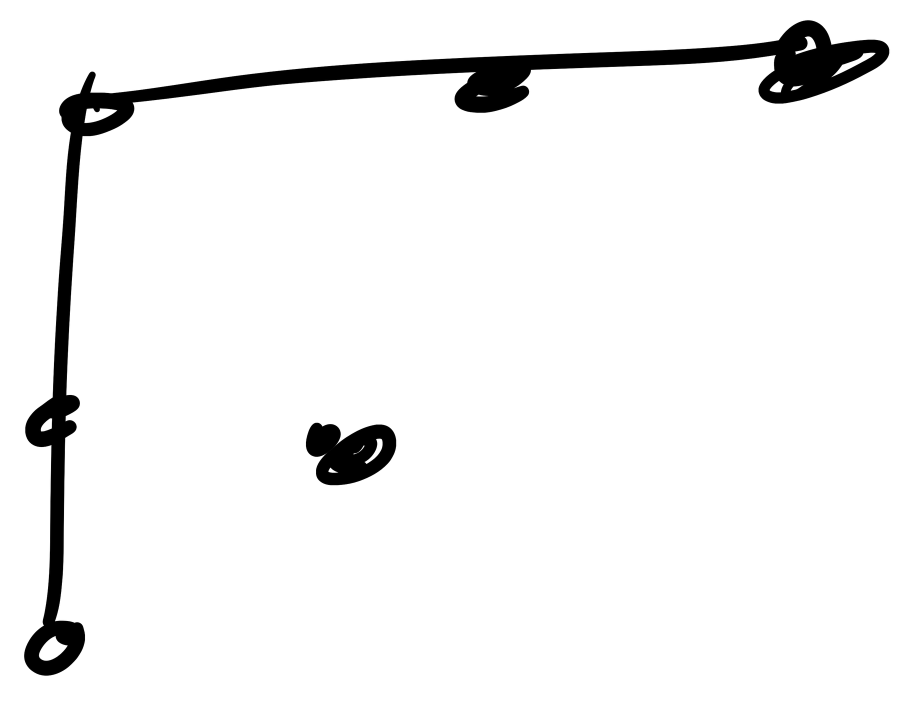
Στο Γ_3 $\quad g(y)=f(2,y)=$

$=f(y,2)=h(y) \qquad y\in\left[\frac{1}{2},2\right]$

όπως στη Γ_1

Στο Γ_4 $\quad$ όπως στο Γ_2

$f(1,1)=3$



$f(2,2)=5$ Δες το γράφημα της f στο τέλος

A. Έστω $\mu = c+2$. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) = \mu x^2 - 2y - y^2.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f πάνω στην έλλειψη $\mu x^2 + y^2 = 1$.

$\mu \geq 2$

$g(x,y) = \mu x^2 + y^2$

λύνουμε το σύστημα

$g(x,y) = 1$

$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ ως προς x, y, λ

$\mu x^2 + y^2 = 1$

$\iff$

$(2\mu x, -2-2y) = \lambda (2\mu x, 2y)$

$\mu x^2 + y^2 = 1$

$\iff$ $2\mu x = \lambda 2\mu x$

$-2-2y = \lambda 2y$

• Αν $\lambda = 1$, έχουμε $-2 = 4y$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}$

Και $\mu x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{4\mu}}$

$\lambda = 1$, $(x, y) = \left(\pm\sqrt{\frac{3}{4\mu}}, -\frac{1}{2}\right)$

• Αν $\lambda \neq 1$ έχουμε

$2\mu x(1-\lambda) = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow y = \pm 1$

έχουμε τα σημεία $(0, \pm 1)$

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{4\mu}}, -\frac{1}{2}\right) = \mu\frac{3}{4\mu} + 1 - \frac{1}{4}$$
$$= 3/2$$

$f(0,1) = -3$

$f(0,-1) = 1$

ελάχιστη τιμή το -3

μέγιστη " το $3/2$

Αλλιώς: Πάνω στην έλλειψη,
η f ισούται με

$$a(y) = 1 - 2y - 2y^2 \qquad y \in [-1, 1]$$

$$a(-1) = 1$$

$$a(1) = -3$$

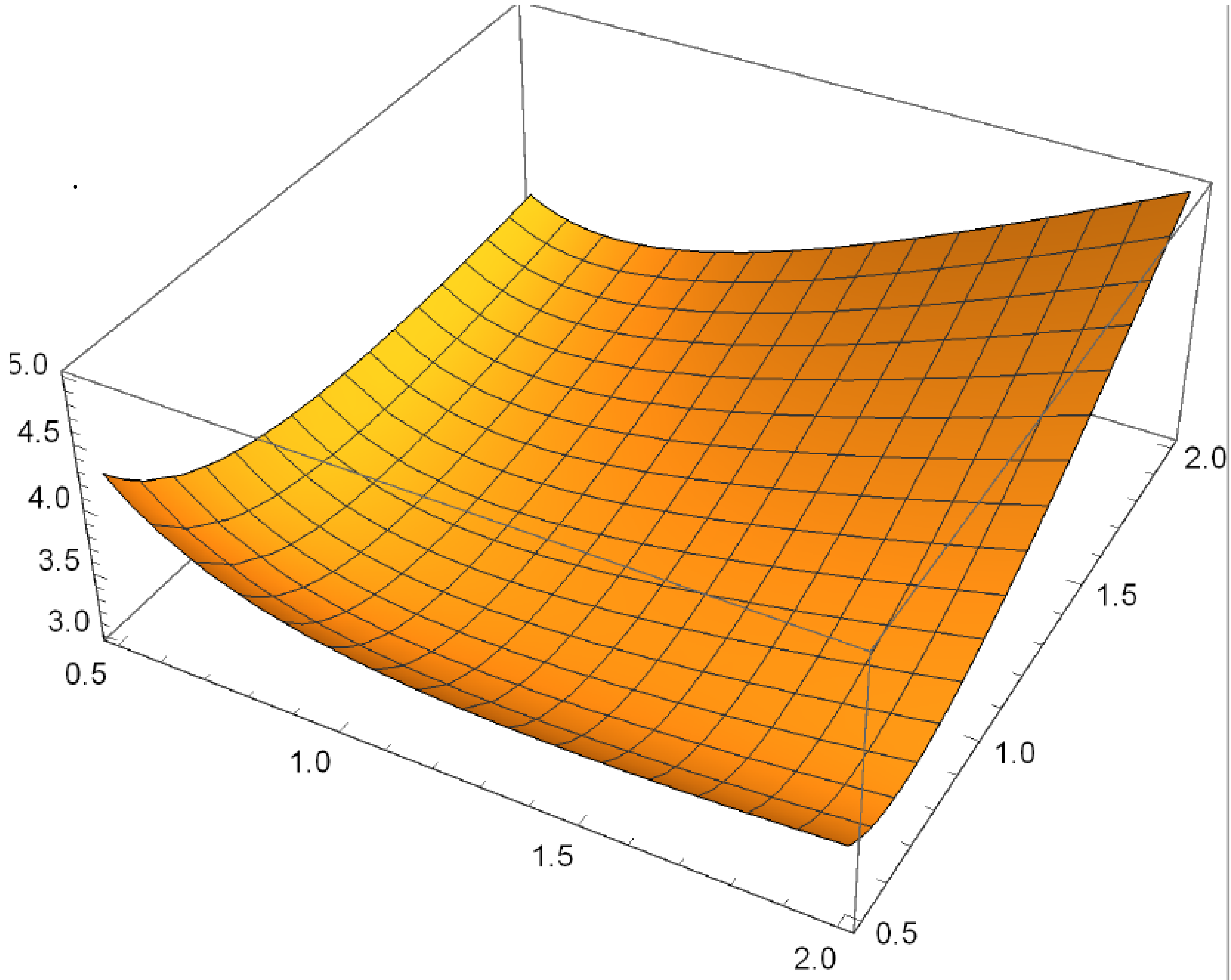
$$a'(y) = -2 - 4y = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

$$a\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Πιο πάνω, συμβολίσαμε τον Εσσιανό
πίνακα της f στο (x_0, y_0) με $(Hf)(x_0, y_0)$.
Αυτός είναι συνηθισμένος συμβολισμός ως

πολλά βιβλία και τα ακολούθησα στην Τάξη, το βιβλίο του Marsden-Tromba χρησιμοποιεί αυτό το σύμβολο για την Εσσιανή συνάρτηση.



Το γράφημα της $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy$ στο $[\frac{1}{2},1]\times[\frac{1}{2},1]$