Ανάλυση ΙΙ

Εξέταση 17 Φεβρουαρίου 2022

1. (15 Βαθμοί) (α) Έστω C^1 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι $\partial_x f(x,y) = ye^x$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Θεωρούμε την $g(s,t) := f(st - s^2, t - s)$. Να δειχθεί ότι $\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial g}{\partial t}(s,t) \geq 0$ για κάθε $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

2. (15 Βαθμοί) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = 3x^2 - 8xy - 4y^2 + 2x + 16y$$

για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και το σύνολο $A := [0,2] \times [0,2]$.
Να βρεθούν αν υπάρχουν κρίσιμα σημεία της f στο εσωτερικό του A και να χαρακτηριστεί καθένα από αυτά (δηλ. τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο, σαγματικό σημείο).

3. (20 Βαθμοί) (α) Να υπολογιστεί το $\int_0^1 \int_x^{2x} (x^2 + y)\, dydx$ και να σχεδιαστεί το χωρίο ολοκλήρωσης.
(β) Έστω $a > 0$ και $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\}$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_D y\, dxdy$.

4. (20 Βαθμοί) Έστω $D \subset \mathbb{R}^3$ το χωρίο που βρίσκεται πάνω από το επίπεδο $z = 0$ και κάτω από το γράφημα της $z = 1 - x^2 - y^2$.
(α) Να περιγραφεί το D σε κυλινδρικές συντεταγμένες.
(β) Να υπολογιστεί ο όγκος του D.

5. (20 Βαθμοί) Έστω $D := \{(x,y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$, C το σύνορο του D, και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I := \int_C (e^{x^2} - y^3)dx + x^3 dy$$

όπου το C είναι θετικά προσανατολισμένο ως προς το D. Να υπολογιστεί το I με χρήση του θεωρήματος Green.

6. (20 Βαθμοί) Έστω $E \subset \mathbb{R}^3$ το μέρος του γραφήματος της $z = 1 - x^2 - y^2$ (παραβολοειδές) που βρίσκεται πάνω από το επίπεδο $z = 0$.
(α) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας E.
(β) Να μετατραπεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα (πρώτου είδους)

$$\iint_E z\, dS$$

σε διπλό ολοκλήρωμα σε κατάλληλο χωρίο.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $1\frac{1}{2}$ ώρα. **Καλή επιτυχία!**